



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

VICTOR HUGO ROSA MORAIS

**MODELAGEM FÍSICO-MATEMÁTICA DA SEDIMENTAÇÃO DE
ADENSANTES EM FLUIDOS DE PERFURAÇÃO EM SISTEMAS
BIDIMENSIONAIS**

SEROPÉDICA, 2026





VICTOR HUGO ROSA MORAIS

MODELAGEM FÍSICO-MATEMÁTICA DA SEDIMENTAÇÃO DE ADENSANTES EM FLUIDOS DE PERFURAÇÃO EM SISTEMAS BIDIMENSIONAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Química da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Química, área de concentração: Tecnologia Química.

Orientador: Prof. Dr. Luís Américo Calçada.
Coorientador: Prof. Dr. Renan de Souza Teixeira.

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M827m Moraes, Victor Hugo Rosa , 1999-
Modelagem físico-matemática da sedimentação de
adensantes em fluidos de perfuração em sistemas
bidimensionais / Victor Hugo Rosa Moraes. -
Seropédica, 2026.
129 f.

Orientador: Luís Américo Calçada.
Coorientador: Renan de Souza Teixeira.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal
Rural do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Química, 2026.

1. Sedimentação bidimensional. 2. Modelo matemático
2D. 3. Validação experimental. 4. Método dos volumes
finitos. I. Calçada, Luís Américo , 1966-, orient. II.
Teixeira, Renan de Souza, 1983-, coorient. III
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro.
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química. IV.
Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

VICTOR HUGO ROSA MORAIS

MODELAGEM FÍSICO-MATEMÁTICA DA SEDIMENTAÇÃO DE ADENSANTES EM
FLUIDOS DE PERFURAÇÃO EM SISTEMAS BIDIMENSIONAIS

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Química, no Curso de Pós-Graduação em Engenharia Química, Área de concentração em Tecnologia química.

Dissertação aprovada em 09 de abril de 2026.

BANCA EXAMINADORA:

Documento assinado digitalmente
 **LUIS AMERICO CALCADA**
Data: 28/05/2026 15:52:08-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Luís Américo Calçada - Orientador – DEQ/IT/UFRRJ

 Documento assinado digitalmente
BRUNO FRANCISCO OECHSLER
Data: 28/05/2026 15:36:09-0300
CPF: ***.182.959-**
Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

Bruno Francisco Oechsler – Membro Externo – EQA/UFSC

Documento assinado digitalmente
 **OBERDAN MIGUEL RODRIGUES DE SOUZA**
Data: 28/05/2026 16:04:20-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Oberdan Miguel Rodrigues de Souza – Membro Interno – DEMAT/ICE/UFRRJ

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu fiel Senhor e salvador Jesus Cristo em primeiro lugar por mais esta conquista em minha vida, pois sem Ele nada disso seria possível. Foi através da fé Nele e seu amparo que foi possível concluir meu trabalho antes mesmo do prazo estipulado, o que parecia impossível para mim frente aos desafios enfrentados, mas que foram vencidos no desenvolvimento da minha pesquisa. Sou grato aos meus pais, Ismael e Silvia, meus avós, Magdalena e Alberto, e minhas tias, Marlene e Bete, por contribuírem na minha formação desde a minha infância, me ajudando, motivando, incentivando, colaborando e sendo um refúgio para os momentos de dificuldade. Também sou muito agradecido pelo suporte, ajuda e orações da minha namorada Alice, que entrou em minha vida nestes últimos meses, sendo uma benção em minha vida. Agradeço ao meu professor orientador Luís Américo Calçada e à professora Cláudia Scheid, coordenadores do Laboratório de Escoamento de Fluidos, por permitirem a continuidade da minha pesquisa que teve início ainda na graduação e agora finalizada no mestrado. Suas orientações e feedbacks foram muito importantes para a realização deste trabalho. Sou grato também pelas orientações e paciência do meu coorientador Renan de Souza Teixeira em me ajudar com minhas dúvidas, tornando o que parecia difícil em um primeiro momento em algo simples. Sou grato também pela ajuda da Juliana Siqueira e da Juliana Mariano por trazerem os vasos sedimentadores utilizados em meus experimentos. Não posso deixar de agradecer também aos alunos de Iniciação Científica Bruna, Ricardo, Carla, Paulinho, Yasmin e Pedro que me ajudaram na coleta de meus dados experimentais quando não estava por perto para obtê-los e também ao realizar o quarteamento do material deste trabalho. Agradeço também ao Allan e à Carol pela colaboração e coleta dos dados de reologia de todos os meus experimentos. De forma geral, sou grato por toda equipe do LEF pelo apoio, colaboração e momentos de descontração ao longo desta minha caminhada no laboratório. Agradeço o financiamento da Petrobras no desenvolvimento desta pesquisa. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001.

RESUMO

MORAIS, Victor Hugo R. Modelagem físico-matemática da sedimentação de adensantes em fluidos de perfuração em sistemas bidimensionais. 2026. 131 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química, Tecnologia Química). Instituto de Tecnologia, Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2026.

A sedimentação de sólidos adensantes em fluidos de perfuração confinados em regiões anulares ocorre durante paradas operacionais nos processos de recuperação de petróleo. Devido à contração do diâmetro do anular e ao uso de revestimentos do tipo liner, forma-se um ressalto em forma de degrau no interior do anular. Com a presença desta variação geométrica das regiões anulares que contêm fluido confinado, deposição de sólidos nestes degraus pode ocorrer. Os trabalhos de modelagem matemática da sedimentação de adensantes vêm sendo tratados na literatura com base na teoria do contínuo ou em sistemas discretos, abordando sistemas unidimensionais. Neste contexto, a modelagem bidimensional pode proporcionar avanços na representação de sistemas em que ocorra o surgimento de degraus, com o objetivo de representar adequadamente a sedimentação em geometrias variáveis. Dessa forma, este trabalho propõe um modelo matemático bidimensional para representar o fenômeno da sedimentação por meio da mecânica do contínuo, baseado na conservação de massa e quantidade de movimento. Na solução do modelo, foram aplicadas hipóteses simplificadoras, o método dos volumes finitos para a discretização das variáveis espaciais e o método das linhas para integração no tempo, utilizando a linguagem FORTRAN. Para a validação do modelo bidimensional, foram realizados experimentos de sedimentação com um fluido base água contendo Goma Xantana adensado com barita a 10 % (v/v) e diâmetro médio de partícula igual a $18,1 \mu\text{m}$, em sedimentadores bidimensionais com três diferentes configurações de degrau: 10 cm x 7,5 cm, 15 cm x 7,5 cm e 10 cm x 15 cm. A interface superior da suspensão foi monitorada até sua estabilização (3 horas), sobre o degrau e afastada do mesmo, nos três casos. Parâmetros das equações constitutivas e do modelo reológico foram estimados com base nos dados experimentais. Para a validação dos resultados, os dados de decaimento da interface superior observados ao longo do tempo foram comparados com os simulados para cada caso. A análise dos parâmetros estimados mostrou que todos possuem significância estatística. O modelo representou adequadamente os dados experimentais com 95 % de confiança.

Palavras-chave: Sedimentação bidimensional, Modelo matemático 2D, Validação experimental, Método dos Volumes Finitos

ABSTRACT

MORAIS, Victor Hugo R. Two-dimensional physical–mathematical modeling of weighting material sedimentation in drilling fluids. 2026. 131 p. Thesis (Master of Science in Chemical Engineering, Chemical Technology). Institute of Technology, Department of Chemical Engineering, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2026.

The sedimentation of weighting solids in drilling fluids confined within annular regions occurs during operational shutdowns in oil recovery processes. Due to annular diameter contraction and the use of liner-type casings, a step-shaped protrusion is generated inside the annulus. With the presence of this geometric variation of annular regions containing the confined fluid, solids deposition may occur on these steps. Mathematical modeling studies of weighting solids sedimentation have been addressed in the literature based on continuum theory or discrete systems, generally considering one-dimensional systems. In this context, two-dimensional modeling may provide advances in the representation of systems in which steps arise, with the objective of properly representing the sedimentation in variable geometries. Therefore, this work presents a two-dimensional mathematical model to represent the sedimentation phenomenon through continuum mechanics, based on the conservation of mass and momentum. In solving the model, simplifying assumptions were applied, along with the finite volume method for spatial discretization and the method of lines for time integration, implemented using the FORTRAN language. For validation of the two-dimensional model, sedimentation experiments were conducted using a water-based fluid containing xanthan gum weighted with 10% (v/v) barite and mean particle diameter equal to $18.1\ \mu\text{m}$, in two-dimensional settlers with three different step configurations: 10 cm x 7,5 cm, 15 cm x 7,5 cm and 10 cm x 15 cm. The suspension's upper interface was monitored until stabilization (3 hours), both over the step and away from it, in all three cases. Parameters of the constitutive equations and the rheological model were estimated based on the experimental data. For validation of the results, the observed experimentally upper interface decay with time was compared with the simulated results for each case. The analysis of the estimated parameters showed that all are statistically significant. The model adequately represented the experimental data with 95 % confidence.

Keywords: Two-dimensional settling, 2D mathematical model, Experimental validation, The finite volumes method

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1.	(a) Esquema de um poço com mais de um anular e (b) vista superior do poço (Adaptado de GAO,QIAN; ZHENG, 2012).	19
Figura 2.2.	Tipos de revestimentos usados nas regiões anulares (Adaptado de FILSON FILTERS, 2024).	20
Figura 2.3.	Esquema de região anular com (a) ressalto dentro do anular (Adaptado de RAHMAN S. S. e CHILINGARIAN G. V., 1995) e (b) sapata aberta evidente (Adaptado de PINTO, 2020).	21
Figura 2.4.	Anular com <i>liner hanger</i> (Adaptado de WANG <i>et al.</i> , 2024).	22
Figura 2.5.	(a) Elemento de fluido no instante t , (b) deformação do fluido no tempo $t + \delta t$, (c) deformação do fluido no tempo $t + 2\delta t$ (Adaptado de FOX <i>et al.</i> , 2000).	23
Figura 2.6.	(a) Tensão de cisalhamento e (b) viscosidade aparente variando com a taxa de deformação para diferentes fluidos não-Newtonianos.	25
Figura 2.7.	Relação qualitativa entre tensão e taxa de cisalhamento para fluido dependente do tempo (Adaptado de CHHABRA; RICHARDSON, 2008).	26
Figura 2.8.	Coefficiente de arrasto em função do diâmetro de partícula equivalente para três geometrias (Adaptado de SANTANA <i>et al.</i> , 2026).	27
Figura 2.9.	Efeito da barita e sua distribuição de tamanho de partícula na viscosidade aparente de fluidos base óleo a 49 °C. (Adaptado de FAKOYA <i>et al.</i> , 2023).	28
Figura 2.10.	Efeito da taxa de deformação no gradiente de viscosidade aparente do fluido base (base óleo) a 49 °C. (Adaptado de FAKOYA <i>et al.</i> , 2023).	28
Figura 2.11.	Velocidade terminal de sedimentação predita vs. observada para os fluidos viscoelásticos do tipo lei da potência (Adaptado de OKESANYA; ABDUKARIMOV, KURU 2020).	29
Figura 2.12.	Velocidade terminal de sedimentação predita vs. observada para os fluidos viscoelásticos do tipo lei da potência (Adaptado de OKESANYA; ABDUKARIMOV, KURU 2020).	29
Figura 2.13.	Valores de ${}^{0.5}\sqrt{C_D}Re_p$ baseados nos dados disponíveis da velocidade de sedimentação de partículas em fluidos viscoelásticos e viscoinelásticos do tipo lei da potência. (Adaptado de OKESANYA; ABDUKARIMOV, KURU 2020).	30
Figura 2.14.	Zonas características dos testes de sedimentação em batelada (Adaptado de COE; CLEVENGER, 1916).	31

Figura 2.15.	Previsão do modelo de Kynch (1952) para interface superior com presença das linhas de propagação de densidade dos sólidos (Adaptado de KYNCH, 1952).	33
Figura 2.16.	Regiões de sedimentação em batelada (Adaptado de AROUCA, 2007).	34
Figura 2.17.	Comparação dos modelos de Kynch (1952) e D'Ávila (1978) com o fenômeno real (D'ÁVILA, 1978, apud AROUCA, 2007).	36
Figura 2.18.	Interfaces ascendente e descendente para sólidos compressíveis previstas por Tiller 1981 (Adaptado de TILLER, 1981).	37
Figura 2.19.	Representação das zonas de sedimentação (Adaptado de FRANÇA, MASSARANI e BISCAIA Jr., 1999).	39
Figura 2.20.	Model de CFD validado por meio da comparação com dados experimentais e resultados obtidos a partir da aplicação de modelos de viscosidade Newtoniano e do tipo lei de potência. (Adaptado de AWAD <i>et al.</i> , 2021).	45
Figura 2.21.	Diferença nas velocidades de sedimentação obtidas ao empregar os modelos reológicos de lei de potência, Cross e Carreau os fluidos contendo 0,5% PAC, 0,7% PAC e 1% PAC. (Adaptado de AWAD <i>et al.</i> , 2021).	45
Figura 2.22.	Velocidade média adimensional de sedimentação dos cascalhos para as distribuições de tamanho estreita (0,5 – 1,5 mm), média (0,5 – 6 mm) e ampla (0,5 – 10 mm). (Adaptado de AWAD <i>et al.</i> , 2021).	46
Figura 2.23.	Dados de concentração de 10 % de Barita, com a média e o erro padrão. a) CH1 – transmissor 1; b) CH2 – transmissor 2; c) CH3 – transmissor 3; d) CH4 – transmissor 4. (Adaptado de SOUZA., 2024).	47
Figura 2.24.	Evolução da concentração por diferencial de pressão para a concentração volumétrica de 10 % (Adaptado de SOUZA., 2024).	48
Figura 2.25.	Volumes de controle unidimensionais (Adaptado de MALISKA., 2023).	48
Figura 2.26.	Perfis de concentração volumétrica de sólidos para diferentes temperaturas (Adaptado de MOTTA <i>et al.</i> , 2024).	50
Figura 2.27.	Comparação de concentração volumétrica de sólidos prevista e experimental em diferentes casos para um diâmetro médio de μm (Adaptado de SHARMA <i>et al.</i> , 2024).	51
Figura 2.28.	Distribuição da concentração de sólidos sobre a seção transversal a 14,5 m da entrada para diferentes tamanhos de partícula e inclinações à velocidade de bulk igual a 0,41 m/s. (Adaptado de SHARMA <i>et al.</i> , 2024).	51
Figura 3.1.	Conjunto de sedimentadores utilizados.	55
Figura 3.2.	Viscosímetro Fann Model 35A.	56
Figura 3.3.	Balança de lama Fann 140.	56

Figura 3.4.	Misturador e pá utilizada no preparo dos fluidos.	57
Figura 3.5.	Quarteamento da Barita.	57
Figura 3.6.	Malvern Panalytical Mastersizer 3000.	58
Figura 3.7.	Distribuição granulométrica da Barita utilizada obtida com Malvern Panalytical Mastersizer 3000.	58
Figura 3.8.	Picnômetro com termômetro utilizado para obter a densidade da Barita.	59
Figura 3.9.	Balança analítica Shimadzu.	60
Figura 3.10.	Representação da malha numérica com notação do MVF e representação dos fluxos nas direções vertical e horizontal.	67
Figura 3.11.	Malha bidimensional simplificada.	68
Figura 3.12.	Esquematização do anular com contração de diâmetro e presença de degrau.	70
Figura 3.13.	Esquematização da implementação dos fluxos de sólidos na região do degrau.	71
Figura 3.14.	Ilustração sobre a necessidade de definir uma métrica (Adaptado de PINTO; SCHWAAB, 2007.).	72
Figura 3.15.	Modelo bom e experimentos bem-feitos (Adaptado de PINTO; SCHWAAB, 2007).	74
Figura 3.16.	Presença de <i>outliers</i> (Adaptado de PINTO; SCHWAAB, 2007).	75
Figura 3.17.	Modelo ruim e dados experimentais subestimados (Adaptado de PINTO; SCHWAAB, 2007).	75
Figura 3.18.	Modelo não uniforme da região de experimentação (Adaptado de PINTO; SCHWAAB, 2007).	76
Figura 3.19.	Comparação entre as simulações do código bidimensional e unidimensional para (a) 6 meses, (b) 1 ano, (c) 2 anos e (d) 5 anos.	78
Figura 4.1.	Curva reológica e análise estatística da estimação dos parâmetros do modelo Power-Law.	82
Figura 4.2.	Representação do ponto analisado na análise de convergência de malha.	85
Figura 4.3.	Análise de convergência de malha para simulações considerando o sedimentador 1.	86
Figura 4.4.	Resultado da triplicata do experimento realizado no sedimentador 1, simulações e análise de valores preditos pelo modelo.	87
Figura 4.5.	Fotos do experimento no sedimentador 1 e perfis de concentração volumétrica bidimensionais até 10 minutos.	90

Figura 4.6.	Fotos do experimento no sedimentador 1 e perfis de concentração volumétrica bidimensionais de 20 a 40 minutos.	91
Figura 4.7.	Fotos do experimento no sedimentador 1 e perfis de concentração volumétrica bidimensionais para 50, 60 minutos e tempo final.	92
Figura 4.8.	Altura de interface superior simulada pelo modelo bidimensional e dados experimentais no sedimentador 2.	93
Figura 4.9.	Fotos do experimento no sedimentador 2 e perfis de concentração volumétrica bidimensionais até 10 minutos.	95
Figura 4.10.	Fotos do experimento no sedimentador 2 e perfis de concentração volumétrica bidimensionais de 20 a 40 minutos.	96
Figura 4.11.	Fotos do experimento no sedimentador 2 e perfis de concentração volumétrica bidimensionais para 50, 60 minutos e tempo final.	97
Figura 4.12.	Altura de interface superior simulada pelo modelo bidimensional e dados experimentais no sedimentador 3.	98
Figura 4.13.	Perfis de concentração volumétrica bidimensionais no sedimentador 3 até 25 minutos.	100
Figura 4.14.	Perfis de concentração volumétrica bidimensionais no sedimentador 3 de 30 minutos até o tempo final.	101
Figura C.1.	Volumes de controle unidimensionais (Adaptado de MALISKA., 2023).	117
Figura C.2.	Representação de um volume de controle bidimensional para um problema de conservação de massa (Adaptado de MALISKA., 2023).	118
Figura C.3.	Esquema resumindo o método dos volumes finitos. (Adaptado de MALISKA., 2023).	120
Figura C.4.	Ilustração do método dos volumes finitos a partir da modificação do valor de Q no volume pelos fluxos através de suas faces ao longo do tempo e do espaço (Adaptado de LEVEQUE., 2002).	120
Figura C.5.	Camada limite em um plano (Adaptado de MALISKA., 2023).	121
Figura C.6.	Problemas parabólicos, elípticos e hiperbólicos (Adaptado de MALISKA., 2023).	123
Figura D.1.	Exemplo de sistemas a parâmetros concentrados (a) e distribuídos (b) (Adaptado de PINTO; SCHWAAB, 2007.).	126
Figura D.2.	Medidas experimentais, suas incertezas experimentais e possíveis retas que descrevem os dados experimentais (Adaptado de PINTO; SCHWAAB, 2007.).	127
Figura D.3.	Fluxograma do algoritmo de enxame de partícula (Adaptado de JUNEJA; NAGAR, 2016.).	129

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1.	Dados da picnometria para determinação da densidade dos sólidos.	59
Tabela 3.2.	Fluido base água utilizado nos experimentos.	61
Tabela 3.3.	Dados de entrada das simulações.	77
Tabela 4.1.	Resultado da estimação dos parâmetros reológicos do modelo Power-Law.	81
Tabela 4.2.	Resultado da estimação dos parâmetros das equações de Kozeny-Carman e do gradiente de pressão nos sólidos.	84
Tabela A.1.	Altura da interface superior afastada do degrau decaindo ao longo do tempo no experimento do sedimentador bidimensional 1 (Triplicata).	110
Tabela A.2.	Altura da interface superior acima do degrau decaindo ao longo do tempo no experimento do sedimentador bidimensional 1 (Triplicata).	111
Tabela A.3.	Altura da interface superior afastada do degrau decaindo ao longo do tempo no experimento do sedimentador bidimensional 2.	112
Tabela A.4.	Altura da interface superior acima do degrau decaindo ao longo do tempo no experimento do sedimentador bidimensional 2.	113
Tabela A.5.	Altura da interface superior afastada do degrau decaindo ao longo do tempo no experimento do sedimentador bidimensional 3.	114
Tabela A.6.	Altura da interface superior acima do degrau decaindo ao longo do tempo no experimento do sedimentador bidimensional 3.	115
Tabela B.1.	Dados reológicos: tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação.	116

LISTA DE SÍMBOLOS

B	Matriz de sensibilidade
B^T	Transposta da matriz de sensibilidade
C_D	Coeficiente de arraste [-]
c_1, c_2	Constantes de aceleração [-]
dp	Diâmetro de partículas [μm]
F_{Obj}	Função objetivo
$F_{s,x}$	Fluxo de sólidos na direção horizontal [ms^{-1}]
$F_{s,y}$	Fluxo de sólidos na direção vertical [ms^{-1}]
g	Aceleração da gravidade [$m s^{-2}$]
$gbest_{id}^k$	Melhor posição global [m]
I	Matriz identidade [-]
K	Permeabilidade do meio [m^2]
$m_{Calcita}$	Massa [kg]
m_{GX}	Massa de goma xantana [kg]
m_k	Força resistiva [N]
m_p	Massa [kg]
m_{pl}	Massa [kg]
m_{ps}	Massa [kg]
m_{psl}	Massa [kg]
M	Índice de consistência [$Pa s^n$]
n	Índice de comportamento do fluido [-]
n_{Ca}	Índice de potência associado ao modelo de Carreau [-]
n_{Cr}	Índice de potência do modelo de Cross [-]
n_p	Número de partículas [-]
p	Pressão estática [Pa]
$pbest_{id}^k$	Melhor posição pessoal [m]
P_s	Pressão efetiva nos sólidos [Pa]
P_{sref}	Pressão de referência [Pa]
q_s	Velocidade superficial [$m s^{-1}$]
q_{0s}	Velocidade superficial de sólidos alimentados [$m s^{-1}$]
Q_s^*	Fluxo adimensional de sólidos [-]
r_1^k, r_2^k	Números aleatórios [-]
Re_{gen}	Reynolds generalizado [-]

$Re_{p,elastic}$	Reynolds de partícula para fluidos elásticos [-]
$Re_{p,inelastic}$	Reynolds de partícula para fluidos inelásticos [-]
t	Tempo ou t de Student [s ou -]
$T_{ij,s}$	Tensão nos sólidos [Pa]
U	Velocidade relativa [$m s^{-1}$]
u_0	Perfil de velocidade [$m s^{-1}$]
u_s	Parâmetro de permeabilidade (Kozeny-Carman) [m^2]
$\vec{u}$	Vetor velocidade do fluido [$m s^{-1}$]
v_s	Velocidade de sedimentação [$m s^{-1}$]
v_{s0}	Velocidade inicial de sedimentação [$m s^{-1}$]
v_{∞}	Velocidade terminal da partícula [$m s^{-1}$]
v_t	Velocidade terminal de partícula isolada [$m s^{-1}$]
v_{id}^k	Velocidade da partícula [$m s^{-1}$]
v_{xs}, v_{sy}	Velocidade dos sólidos [$m s^{-1}$]
$V(\varepsilon_s)$	Velocidade de ascensão das ondas de equi-concentração [$m s^{-1}$]
$V_{Calcita}$	Volume [m^3]
V_{H_2O}	Volume [m^3]
V_{susp}	Volume [m^3]
V_{α}	Matriz de covariância
V_y	Matriz de covariância
W	Peso inercial [-]
x_{id}^k	Posição da partícula [m]
y_i^m	Valor do modelo
y_{ij}^e	Pontos experimentais
y_{ij}^m	Pontos do modelo
z	Posição [m]
$\Delta x, \Delta y$	Variação espacial [m]
$\dot{m}_i$	Taxa de massa [$kg s^{-1}$]
$\dot{\gamma}$	Taxa de deformação do fluido [s^{-1}]
$\dot{\gamma}_c$	Taxa de cisalhamento crítica [s^{-1}]
ε	Porosidade [-]
ε_{f0}	Perfil de porosidade [Adimensional]
ε_s	Concentração volumétrica de sólidos [Adimensional]
ε_{s0}	Concentração volumétrica inicial de sólidos [Adimensional]
ε_{scr}	Concentração crítica de sólidos [-]

ε_{sm}	Concentração volumétrica máxima de sólidos [Adimensional]
ε_{su}	Concentração volumétrica inicial de lama [Adimensional]
Θ_s	Concentração adimensional de sólidos [Adimensional]
λ_{Cr}	Constante de tempo característica [-]
μ	Viscosidade do líquido [$Pa\ s$]
μ_0	Viscosidade em regime de cisalhamento nulo [$Pa\ s$]
μ_{ap}	Viscosidade aparente [$Pa\ s$]
μ_∞	Viscosidade em altas taxas de cisalhamento [$Pa\ s$]
ϕ	Esfericidade [-]
ρ_f	Densidade de fluido [$kg\ m^{-3}$]
ρ_s	Densidade de sólidos [$kg\ m^{-3}$]
ρ_{H_2O}	Densidade da água [$kg\ m^{-3}$]
ρ_{ij}	Correlação paramétrica
ρ_{susp}	Densidade da suspensão [$kg\ m^{-3}$]
ρ_u, ρ_v, ρ_w	Fluxo de massa [$kg\ m^{-2}\ s^{-1}$]
$\sigma_{\alpha i}$	Desvio padrão
σ_{yij}^2	Variância experimental
$\hat{\sigma}_{yi}$	Desvio padrão
τ_{ij}	Tensão cisalhante [Pa]
$\bar{\tau}$	Tensor de tensões [Pa]
$\vec{F}_i$	Vetor de força externa [N]
$\hat{\alpha}_i$	Parâmetro
$\hat{V}_y$	Matriz de variâncias
$\chi_{min}^2, \chi_{max}^2$	Qui-quadrado
ρ^m	Coefficiente de correlação

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	17
2.1 Perfuração de poços de petróleo e o APB	19
2.2 Reologia de fluidos e sua influência na sedimentação	22
2.3 Fundamentação teórica da sedimentação	30
2.4 Método dos volumes finitos	48
3 METODOLOGIA	53
3.1 Material e métodos	55
3.2 Modelo matemático bidimensional da sedimentação	61
3.2.1 Discretização do modelo bidimensional da sedimentação pelo Método dos Volumes Finitos	66
3.2.1.1 Estruturação da malha	66
3.2.1.2 Integração da Equação Diferencial Parcial	67
3.2.1.3 Aproximações para os fluxos e demais derivadas	69
3.3 Estimação de parâmetros e análise estatística	71
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES	79
4.1 Estimação dos parâmetros reológicos	81
4.2 Testes no sedimentador 1 - Estimação de parâmetros e validação	83
4.3 Sedimentadores 2 e 3 - Experimentos e simulações	92
5 CONCLUSÕES	102
6 TRABALHOS FUTUROS	104
7 REFERÊNCIAS	105
8 ANEXO	110

1 INTRODUÇÃO

A perfuração de poços de petróleo é realizada com colunas de perfuração equipadas com brocas de diferentes diâmetros, utilizadas sequencialmente à medida que a profundidade aumenta. Após cada fase de perfuração, uma nova coluna de revestimento é instalada e cimentada, segundo Thomas (2001), formando a região anular entre o revestimento e a formação rochosa ou entre revestimentos. Fluidos de perfuração são empregados para carrear cascalhos e controlar a pressão hidrostática do poço, sendo adensados com sólidos como a barita e hematita, por exemplo. Contudo, durante períodos estáticos, esses sólidos podem sedimentar por ação da gravidade, fenômeno conhecido como *Sag* na indústria de petróleo (NGUYEN et al., 2006).

Após a cimentação, parte do fluido permanece confinado no anular e, durante a produção do poço, pode sofrer aquecimento devido à circulação do fluido do reservatório. Esse aumento de temperatura provoca expansão térmica do fluido e do revestimento, podendo causar o aumento de pressão no anular (*Annular Pressure Build-Up* (APB)), que pode comprometer a integridade do revestimento (GAO; QIAN; ZHENG, 2012; CALÇADA et al., 2016). Como estratégia de mitigação, utiliza-se a sapata aberta, região sem revestimento que permite o escoamento do fluido para a formação rochosa e o alívio da pressão. Entretanto, a sedimentação dos sólidos adensantes pode formar um leito consolidado que bloqueia essa comunicação, tornando o estudo da sedimentação desses sólidos relevante.

Nesse contexto, muitos estudos da modelagem matemática deste fenômeno têm sido feitos para representá-lo e prever seu comportamento. Contudo, os estudos até então desenvolvidos consideram o fenômeno da sedimentação unicamente em uma dimensão, em que o deslocamento de sólidos se dá unicamente na direção vertical. Neste seguimento de pesquisas, destaca-se o trabalho de Rocha *et al* (2020), cuja contribuição foi o simulador unidimensional da sedimentação, SimSag, desenvolvido no Laboratório de Escoamento de Fluidos da UFRRJ e foi validado por dados experimentais, e atualmente está em uso pela Petrobras.

Um aspecto que ainda não foi investigado desse fenômeno pela literatura é como ele se comporta frente às configurações de anular que possuem um ressalto em seu interior. Algumas regiões anulares, devido à contração de seu diâmetro, possuem um degrau. Assim, é necessário entender também o comportamento fenomenológico da sedimentação em casos desse tipo. Dessa forma, a proposta de um modelo matemático bidimensional da sedimentação permite considerar o deslocamento horizontal de sólidos nestes cenários obtendo informações que um modelo unidimensional não é capaz de recuperar.

Assim, o objetivo principal deste trabalho é propor e validar um modelo matemático bidimensional da sedimentação de sólidos adensantes através de dados experimentais de interface superior da suspensão. O modelo proposto nesta dissertação utiliza as equações da continuidade e do movimento bidimensionais, fazendo uso da mecânica do contínuo e também das mesmas hipóteses de Rocha *et al.* (2020). Sua resolução foi feita pelo método dos volumes finitos juntamente com a utilização do método das linhas, em que a implementação do algoritmo foi feita em linguagem de programação Fortran, gerando um simulador bidimensional da sedimentação de adensantes.

Além disso, no equacionamento do modelo 2D são consideradas equações constitutivas para a permeabilidade do meio e do gradiente de pressão nos sólidos, que possuem parâmetros a serem estimados e analisados estatisticamente. Outra consideração é a utilização

do modelo reológico lei da Potência para representar o comportamento pseudoplástico de fluidos de perfuração. A estimação do índice de consistência e de comportamento do fluido também é abordada neste trabalho e discutida estatisticamente.

Para a validação do modelo, experimentos de bancada foram realizados a fim de recriar a situação em que há um degrau no anular, em uma escala menor, para diferentes variações desta geometria dentro de três sedimentadores bidimensionais. Cada um destes sedimentadores possuem uma configuração específica de degrau, garantindo a variabilidade dos casos investigados e, posteriormente, simulados pelo modelo. Um fluido base água utilizando barita como adensante e goma xantana como viscosificante foi preparado para ser usado nos experimentos. A altura da interface superior da suspensão decaindo ao longo do tempo nas posições acima e afastada do degrau foram coletadas nos experimentos e os valores desta última, para um dos sedimentadores escolhido como referência, foram utilizados para estimar parâmetros de equações constitutivas do modelo matemático bidimensional.

CAPÍTULO I

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2 CAPÍTULO I: Revisão bibliográfica

RESUMO

Este capítulo apresenta o estado da arte acerca da sedimentação em batelada de sólidos adensantes por ação da gravidade em fluidos não-Newtonianos, com enfoque na evolução da modelagem matemática do fenômeno. Uma descrição geral do processo de perfuração de poços foi apresentada, destacando sua relação direta com o fenômeno de sedimentação de adensantes de fluidos de perfuração. Nesse contexto, são abordados aspectos relevantes do comportamento reológico de fluidos e modelos reológicos. O método dos volumes finitos foi apresentado para a solução numérica das equações diferenciais e algébricas que descrevem o fenômeno da sedimentação.

Palavras-chave: sedimentação, reologia, volumes finitos, modelo matemático.

2.1 Perfuração de poços de petróleo e o APB

A perfuração dos poços de petróleo é realizada utilizando uma coluna de perfuração, que em sua extremidade contém uma broca de ação rotativa. Neste processo, grande quantidade de energia na broca na forma de rotação e peso da coluna é demandada para promover a ruptura de formações rochosas. O poço é perfurado em fases, em que brocas de diferentes diâmetros são utilizadas na coluna de perfuração à medida que esta adentra a formação rochosa. Cada uma das fases é concluída com a descida de uma nova coluna de revestimento e sua cimentação (THOMAS, 2001). A região entre o revestimento e a formação rochosa é chamada de região anular. A redução do diâmetro da broca ocasiona a redução do diâmetro do poço e, conseqüentemente, da região anular. Neste caso, mais de um revestimento é utilizado para estabilizar o poço e a região anular, ver Figura 2.1. Algumas das principais funções dos revestimentos é prevenir o desmoronamento do poço, evitar a contaminação de água potável, impedir a migração de fluidos das formações, sustentar os equipamentos de segurança de cabeça de poço e as colunas de revestimento (THOMAS, 2001).

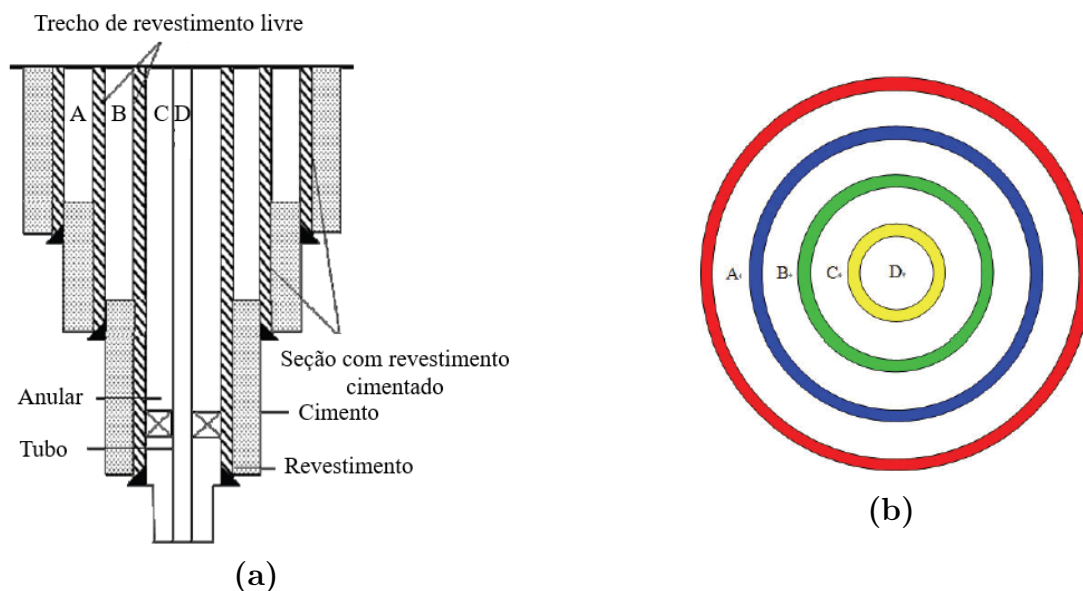


Figura 2.1. (a) Esquema de um poço com mais de um anular e (b) vista superior do poço (Adaptado de GAO,QIAN; ZHENG, 2012).

A depender da profundidade do poço e condições geológicas, mais de um revestimento deverá ser utilizado para promover a devida estabilização do poço. Nesse sentido, cada coluna de revestimento cumpre uma função específica. De acordo com Thomas (2001), os tipos de coluna de perfuração são:

- **Condutor:** Se trata do primeiro revestimento do poço, assentado a pequena profundidade, entre 10 m a 50 m, para sustentar sedimentos superficiais não consolidados.
- **Revestimento de superfície:** Medindo de 100 m a 600 m, protege os horizontes superficiais de água e previne o desmoronamento de formações não consolidadas. Os equipamentos de segurança de cabeça de poço são apoiados por este revestimento, que é cimentado por toda sua extensão evitando flambagem devido ao peso dos equipamentos e revestimentos seguintes.

- **Revestimento intermediário:** Sua função é proteger zonas de alta e baixa pressão, formações em risco de desmoronamento, zonas de perda de circulação, formações portadoras de fluidos corrosivos ou contaminantes de lama. Sua faixa de assentamento varia entre 1000 m a 4000 m, sendo cimentado somente na parte inferior ou em um trecho intermediário adicional. Este revestimento é sustentado na superfície por cunhas apropriadas, apoiadas no sistema de cabeça de poço.
- **Revestimento de produção:** É descido para permitir a produção do poço, suportando as paredes e possibilitando o isolamento intervalos produtores.
- **Liner:** Coluna curta de revestimento de descida para cobrir apenas a parte inferior do poço: poço aberto. É independente do sistema de cabeça de poço sendo ancorado acima da extremidade inferior do revestimento anterior.

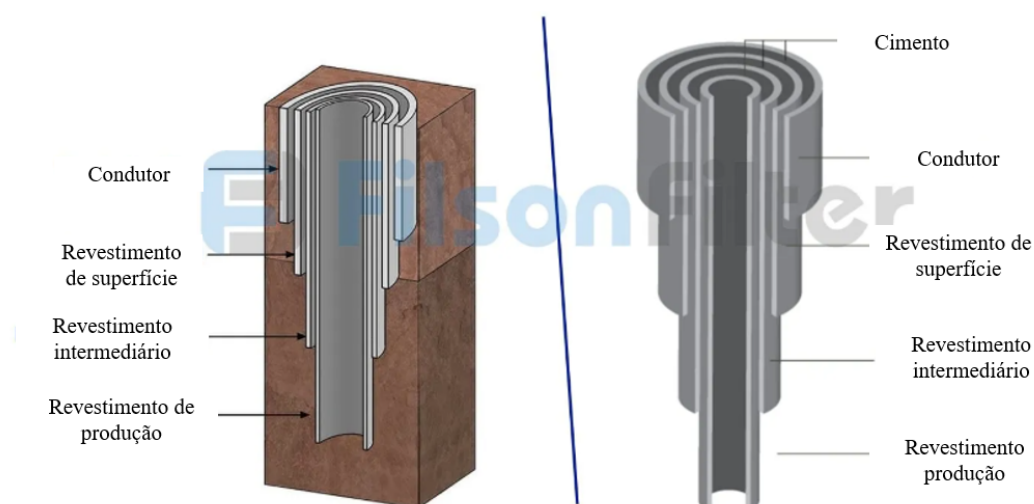


Figura 2.2. Tipos de revestimentos usados nas regiões anulares (Adaptado de FILSON FILTERS, 2024).

A broca, à medida que perfura o solo, libera fluido de perfuração, que é uma mistura de componentes químicos sintéticos e naturais, como emulsificantes, viscosificantes, adensantes, sais, entre outros, e que estão dispersos em fase contínua composta por água ou óleo, o que resulta em fluidos base-água e base-óleo (FINK, 2021).

Estes fluidos possuem diversas funções (CAENN; CHILLINGAR, 1996):

- Carrear os cascalhos do poço até a superfície, para que sejam separados;
- Resfriar e limpar a broca;
- Reduzir atrito entre a coluna de perfuração e o poço ou o revestimento;
- Manter a estabilidade do poço;
- Prevenir a entrada de fluidos da formação rochosa;
- Não prejudicar o meio ambiente;

A estabilidade do poço é controlada por meio do controle da pressão hidrostática. Minerais de alta densidade como barita e hematita são utilizados para adensar o fluido, promovendo o controle da pressão de fundo de poço. A sedimentação destes sólidos adensantes por ação da gravidade ocorre quando o fluido fica estático por períodos prolongados, fenômeno designado por "*Sag*" na indústria de petróleo (NGUYEN et al., 2006). Além disso, após a cimentação, parte do fluido de perfuração fica retido entre as paredes do revestimento e a formação rochosa ou entre revestimentos. Quando estes poços começam a produzir de dois a três anos após sua completação, na fase de produção, o fluido confinado é exposto a um gradiente de temperatura causado pela circulação do fluido do reservatório através da cadeia de produção. O aumento de temperatura faz com que ocorra uma expansão térmica do fluido confinado e também do revestimento, segundo Gao *et al.* (2012). A expansão térmica promove o aumento de pressão dentro do anular, fenômeno térmico chamado de *Annular Pressure Build-Up*, que pode romper o revestimento e comprometer as operações (CALÇADA et al., 2016).

Uma das estratégias de mitigação do APB é a sapata aberta, região sem revestimento dentro do anular, que permite a comunicação do fluido de perfuração com a formação rochosa e está ilustrada na Figura 2.3b. Esta comunicação permite que o fluido escoe para dentro da formação quando a pressão interna do anular aumenta, aliviando assim a pressão da região, evitando o colapso do revestimento e, conseqüentemente, do poço. Em contrapartida, a sedimentação dos sólidos adensantes pode formar um leito consolidado de sólidos cobrindo esta região, o que impede o escoamento do fluido. Dessa forma, a sedimentação dos sólidos (utilizados para adensar os fluidos de perfuração) tem sido alvo de estudo devido aos diferentes aspectos que afetam este fenômeno, como o efeito do gradiente de temperatura, o diâmetro das partículas, a pressão do anular, entre outras.

Contudo, um aspecto pouco investigado desse fenômeno é como ele se comporta frente às configurações de anular que possuem um ressalto em seu interior. Algumas regiões anulares, devido à contração de seu diâmetro, possuem um ressalto em formato de degrau, a depender do local em que o revestimento é assentado, conforme Figura 2.3a.

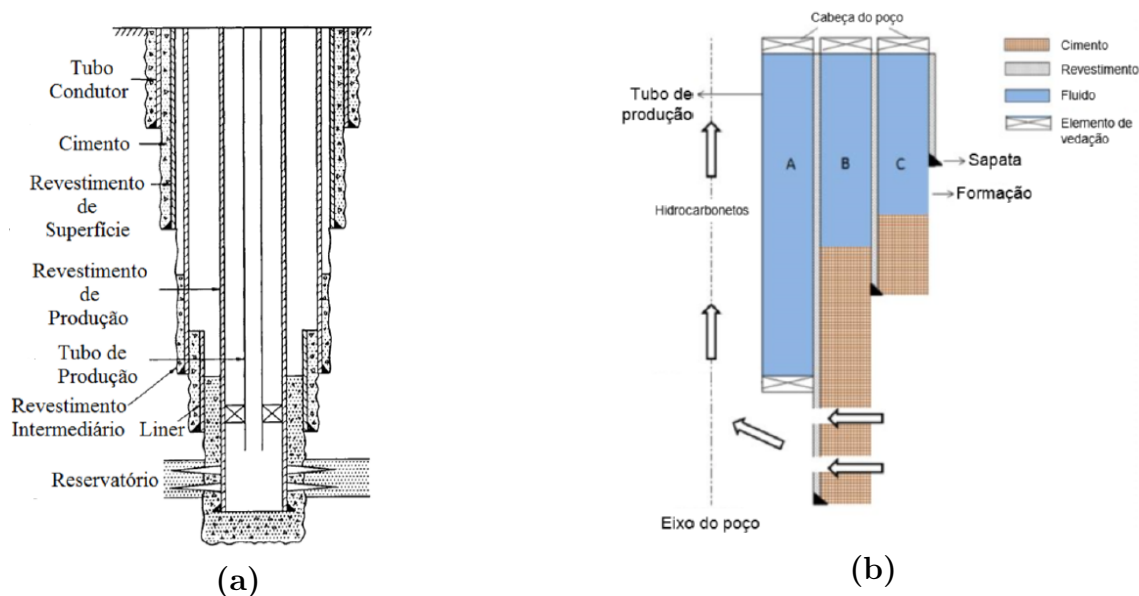


Figura 2.3. Esquema de região anular com (a) ressalto dentro do anular (Adaptado de RAHMAN S. S. e CHILINGARIAN G. V., 1995) e (b) sapata aberta evidente (Adaptado de PINTO, 2020).

A sedimentação de sólidos adensantes de fluidos de perfuração em anulares com este

ressalto ainda não foi investigada na literatura. Normalmente, este ressalto está associado ao revestimento do tipo *liner*, já abordado anteriormente, que também é conhecido como *liner hanger*. De acordo com Thomas *et al* (2001), o uso deste revestimento é crescente em virtude de sua economia, versatilidade e rapidez de operação, permitindo a substituição do revestimento intermediário ou de produção. A Figura 2.4 mostra este revestimento bem como a geometria em ressalto, característica de anulares com esta configuração de revestimento.

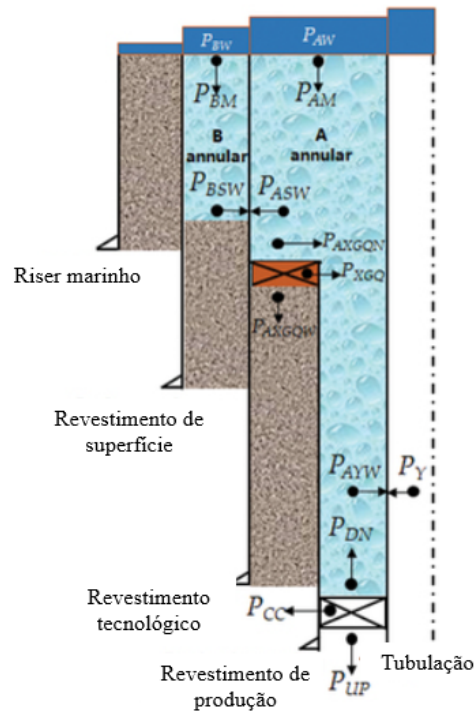


Figura 2.4. Anular com *liner hanger* (Adaptado de WANG *et al.*, 2024).

2.2 Reologia de fluidos e sua influência na sedimentação

Segundo Barnes *et al* (1989), a definição de reologia é a ciência que estuda a deformação e o escoamento da matéria. O conhecimento acerca deste assunto é importante para os cientistas de várias indústrias, como as de plástico, tintas comuns e de impressora, óleos, detergentes entre outros. Para melhor compreender os conceitos por trás deste tema, faz-se necessário primeiro conhecer formalmente a definição de fluidos: substância que se deforma continuamente sob a aplicação de uma tensão de cisalhamento (tangencial), não importando o quão pequeno seja o seu valor (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2000). Outro conceito fundamental é o de viscosidade, que será apresentado resumidamente a seguir através do seguinte exemplo formulado por Fox *et al* (2000).

Primeiro considere o escoamento de um fluido entre duas placas sólidas infinitas, conforme Figura 2.5. Considere também que a placa está inicialmente em repouso (a).

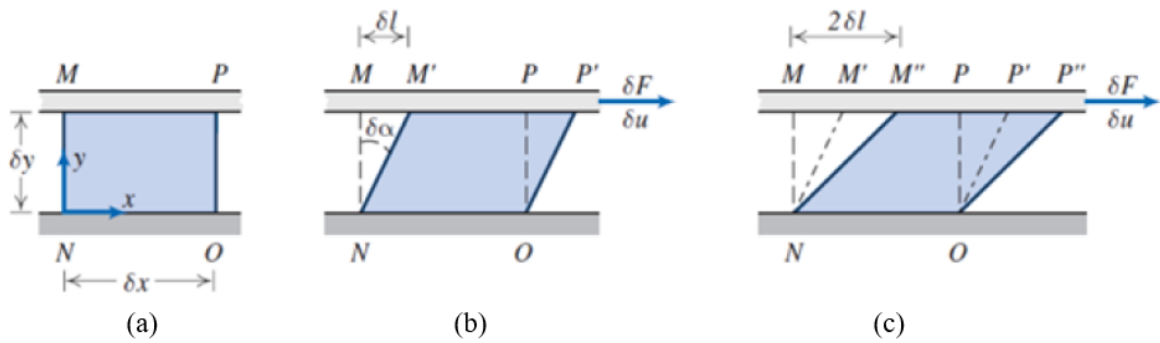


Figura 2.5. (a) Elemento de fluido no instante t , (b) deformação do fluido no tempo $t + \delta t$, (c) deformação do fluido no tempo $t + 2\delta t$ (Adaptado de FOX *et al.*, 2000).

Seja uma força constante aplicada δF_x , fazendo com que a placa se mova com velocidade δu , que depende da viscosidade do fluido em contato com a placa, conforme Figura 2.5 (b) e (c). De maneira geral, a força tangencial aplicada à placa, produz uma tensão de cisalhamento no fluido, τ_{yx} , e, por este motivo, este experimenta uma taxa de deformação ou de cisalhamento du/dy . Assim, qualquer fluido sujeito a uma tensão de cisalhamento escoará, possuindo uma taxa de cisalhamento. A forma como a tensão de cisalhamento se relaciona com a taxa de deformação pode ser usada para classificar cada tipo de fluido. Dessa forma, os fluidos em que a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional à taxa de deformação do fluido são classificados como fluidos newtonianos, uma vez que seguem a lei de Newton da viscosidade, Equação 2.1, em que x é a direção da força aplicada, enquanto y é a direção normal do plano de aplicação da força, μ é a viscosidade do fluido e u é a velocidade de deslocamento do fluido. Exemplos de fluidos newtonianos incluem o ar, gasolina, a água, óleos, a glicerina, entre outros (MACHADO, 2002, FOX *et al.*, 2000, BIRD, 2004.).

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \quad (2.1)$$

Os fluidos não-Newtonianos são aqueles cuja tensão não possui relação diretamente proporcional com a taxa de deformação ou requerem uma tensão crítica inicial para escoar, a tensão limite de escoamento. Para este tipo de fluido a viscosidade não é constante e varia com a sua taxa de deformação (MACHADO, 2002, FOX *et al.*, 2000, BIRD, 2004.). Segundo Barnes *et al.* (1989), a tensão cisalhante medida, e portanto a viscosidade, pode também aumentar ou diminuir de acordo com o tempo de aplicação do cisalhamento. A seguir estão os comportamentos reológicos de acordo com a premissa mencionada anteriormente.

• Independentes do tempo

Para estes fluidos, as propriedades reológicas independem do tempo de aplicação da tensão de cisalhamento e podem ser classificadas, quanto ao comportamento reológico, nas seguintes categorias:

1) Pseudoplásticos: Quanto maior a taxa de deformação ($du/dy = \dot{\gamma}$), conseqüentemente, quanto maior a tensão (τ), menor é a viscosidade aparente. A maioria dos fluidos não-Newtonianos se enquadram neste grupo, como exemplo as soluções de polímeros,

suspensões coloidais e a polpa de papel em água (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2000).

2) Dilatantes: Quanto maior a taxa de deformação do fluido ($du/dy = \dot{\gamma}$), consequentemente, quanto maior a tensão (τ), maior é a viscosidade aparente.

Estes dois comportamentos reológicos são tipicamente descritos pelo modelo reológico lei da potência, conforme Equação 2.2 (SCHWALBERT, 2013).

$$\tau = M\dot{\gamma}^n \quad (2.2)$$

em que M é o índice de consistência do fluido, enquanto que n é o seu índice de comportamento e $\dot{\gamma}$ sua taxa de deformação. Note que para valores de n menores que 1, o comportamento reológico é pseudoplástico, ou seja, sua viscosidade aparente diminui com o aumento da taxa de cisalhamento. Por outro lado, para valores de n maiores que 1, o comportamento é dilatante, em que a viscosidade aparente aumenta com o aumento da taxa de cisalhamento. Caso $n = 1$, tem-se por padrão um fluido newtoniano, em que a tensão é diretamente proporcional à taxa de formação (PINTO et al., 2020).

3) Plástico de Bingham: Necessita de tensão de cisalhamento inicial para escoar. A relação entre tensão e taxa de deformação é linear, e tal comportamento é descrito pelo modelo reológico da Equação 2.3,

$$\tau_{yx} = \tau_0 + \mu_P \frac{du}{dy} \quad (2.3)$$

em que τ_0 é a tensão limítrofe, a partir do qual um "fluido", que se comportava como sólido, passa a escoar e μ_P é a viscosidade plástica. Exemplos de substâncias que exibem este comportamento são argila, lama de perfuração e pastas de dente (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2000).

4) Herschel-Bulkley: Também considera o fluido que apresenta comportamento de sólido até que uma tensão limite de escoamento, τ_0 , seja excedida, se comportando logo em diante como um fluido do tipo lei da potência. A relação entre a tensão e a taxa de deformação é dada conforme Equação 2.4, em que M é o índice de consistência e n , o de comportamento. Em casos particulares, este modelo pode descrever o comportamento newtoniano ($\tau_0 = 0$ e $n = 1$), lei da potência ($\tau_0 = 0$ e $n \neq 1$) e Plástico de Bingham ($n = 1$) (SILVA, 2023).

$$\tau_{yx} = \begin{cases} \tau_0 + M\dot{\gamma}^n, & \text{se } \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0, & \text{se } \tau \leq \tau_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

A Figura 2.6 resume detalhadamente e permite observar o comportamento reológico em termos gráficos dos tipos de fluidos analisados anteriormente.

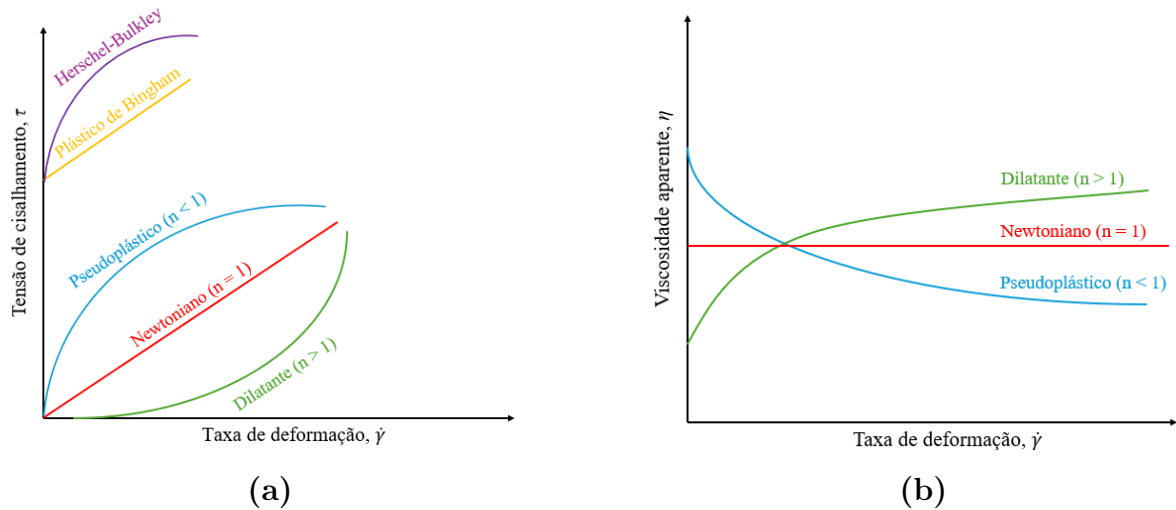


Figura 2.6. (a) Tensão de cisalhamento e (b) viscosidade aparente variando com a taxa de deformação para diferentes fluidos não-Newtonianos.

• Dependentes do tempo

As propriedades reológicas além de variarem com a tensão cisalhante, variam com o tempo de aplicação da tensão, possuindo memória. Estes tipos de fluidos são classificados em duas categorias:

1) Tixotrópicos: A viscosidade aparente decresce com o tempo de aplicação do cisalhamento, isto é, o tempo que a tensão τ é aplicada, retornando a sua estrutura original quando esta cessa (BARNES; HUTTON; WALTERS, 1989). De acordo com Silva (2023), tem-se o petróleo cru e tintas como exemplos.

2) Reopéticos: Apresenta comportamento contrário ao dos fluidos tixotrópicos, isto é, a viscosidade aparente aumenta com o tempo de aplicação da tensão de cisalhamento τ . Os exemplos são argila e bentonita, conforme Silva (2023).

A Figura 2.7 apresenta o comportamento da tensão em relação a taxa de deformação para os fluidos tixotrópicos e reopéticos. Observa-se que as curvas ascendentes e descendentes não se sobrepõem, isto é, o comportamento reológico depende do tempo de aplicação da força de cisalhamento, em outras palavras, do histórico de cisalhamento, fenômeno denominado histerese. A área entre as curvas define a magnitude da histerese, que está relacionada à energia necessária para romper a estrutura gel do fluido (BIRD et al., 2004; FOX et al., 2000).

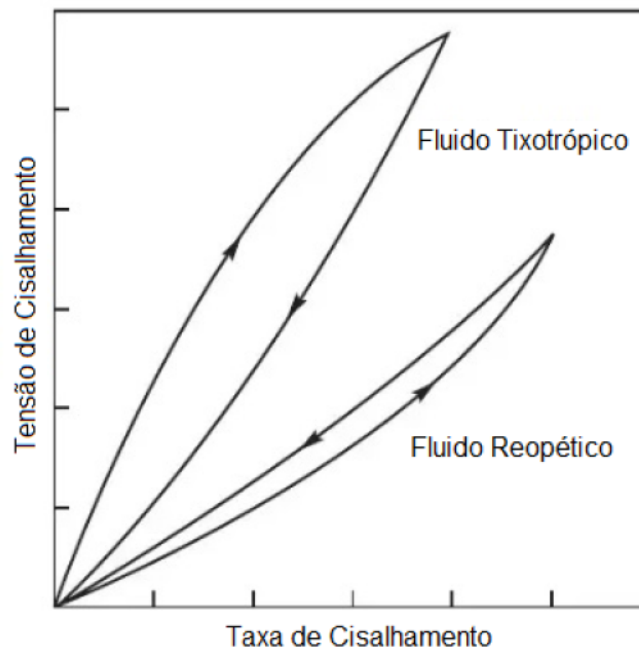


Figura 2.7. Relação qualitativa entre tensão e taxa de cisalhamento para fluido dependente do tempo (Adaptado de CHHABRA; RICHARDSON, 2008).

• Influência da reologia na sedimentação

Santana *et al.* (2026) apresentaram uma investigação experimental da sedimentação de uma única partícula sedimentando em um fluido Newtoniano (Glicerina 18 % em massa) e em um não-Newtoniano (*Carbopol*VR 0,05% em massa) considerando três diferentes geometrias de partículas ao longo de cinco classes de tamanho. Utilizando técnicas de captura de imagens em alta velocidade, reconstrução de trajetória 3D baseada em *deep learning* e caracterização reológica precisa, os efeitos da reologia e geometria das partículas foram estudados em como afetam o coeficiente de arraste, número de Reynolds e estabilidade da trajetória.

Os autores identificaram que o comportamento pseudoplástico altera a dinâmica de sedimentação significativamente. No fluido *Carbopol*, as partículas maiores sedimentaram de forma estável, enquanto que as menores, devido a efeitos viscoelásticos, apresentaram velocidade terminal retardada ou ausente. Estas apresentaram oscilações de velocidade e aprisionamento transitório, associados a contribuições viscoelásticas em taxas de deformação próximas à transição do fluido entre os regimes elástico e viscoso. A transição ocorreu aproximadamente para taxas de deformação entre 0,045 e 0,35 s^{-1} . Partículas maiores atingem a velocidade terminal estacionária mais rapidamente, comportando-se de forma semelhante à sedimentação newtoniana sob regime dominado pela viscosidade. Para o fluido não-Newtoniano, os coeficientes de arrasto foram maiores para esferas pequenas ($C_D > 50$) e diminuíram com o tamanho das partículas (C_D aproximadamente na faixa entre 0,8 e 1,6 para os maiores casos), conforme Figura 2.8.

A geometria das partículas também influenciou a estabilidade da trajetória. Elipsóides oblatos seguiram as trajetórias mais estáveis e lineares, enquanto esferas apresentaram desvios laterais significativos de até seis vezes o seu diâmetro no fluido Newtoniano, especialmente para números de Reynolds mais elevados. Elipsóides prolados apresentaram comportamento intermediário.

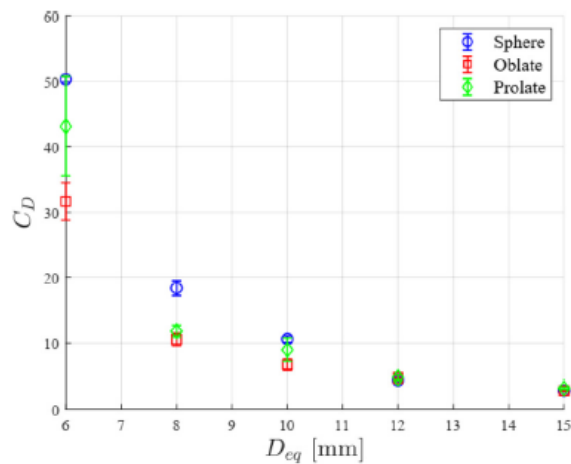


Figura 2.8. Coeficiente de arrasto em função do diâmetro de partícula equivalente para três geometrias (Adaptado de SANTANA *et al.*, 2026).

Os resultados mostram que a reologia do fluido e a geometria das partículas afeta de forma significativa o arrasto e as trajetórias de sedimentação, com implicações diretas no transporte de cascalhos de perfuração e na estabilidade do poço. O estudo sugere que fluidos pseudoplásticos podem reduzir significativamente as variações de sedimentação induzidas pela geometria, como evidenciado pelo coeficiente de arrasto baixo e estável (0,8–1,6) para todas as formas e tamanhos de partículas no fluido Carbopol, se comparado com variações mais amplas do fluido Newtoniano com glicerina (entre 4 e 50).

Fakoya *et al.* (2023) estudaram a sedimentação de barita em fluidos base óleo por meio de experimentos e modelagem matemática. Um destes experimentos consistia em medir a viscosidade aparente das lamas com um reômetro. Em seguida, foi realizado o teste intitulado *Viscometer Sag Shoe Test (VSST)*, sendo um método em que os autores estudaram a deposição de barita a 49 °C variando a velocidade rotacional e a distribuição de tamanho dos sólidos.

Os autores verificaram por meio de dados de viscosidade aparente que o tamanho das partículas não influenciou a reologia dos fluidos base óleo. Além disso, observaram que a sedimentação da barita aumenta quanto maiores são as partículas e velocidade rotacional. Estudos paramétricos para um modelo indicaram ainda que a sedimentação da barita diminui ao aumentar os parâmetros reológicos dos fluidos base óleo: tensão limite de escoamento, índices de consistência e de comportamento do fluido.

A Figura 2.9 demonstra o comportamento pseudoplástico para o fluido base óleo com barita. Este comportamento é observado em uma faixa de taxa de formação que se estende de 0,1 a 1000 s^{-1} , com a viscosidade aparente diminuindo quanto maior a deformação no fluido. Nota-se, além disso, que a barita aumentou a viscosidade aparente do fluido, como era de se esperar (quanto maior o diâmetro).

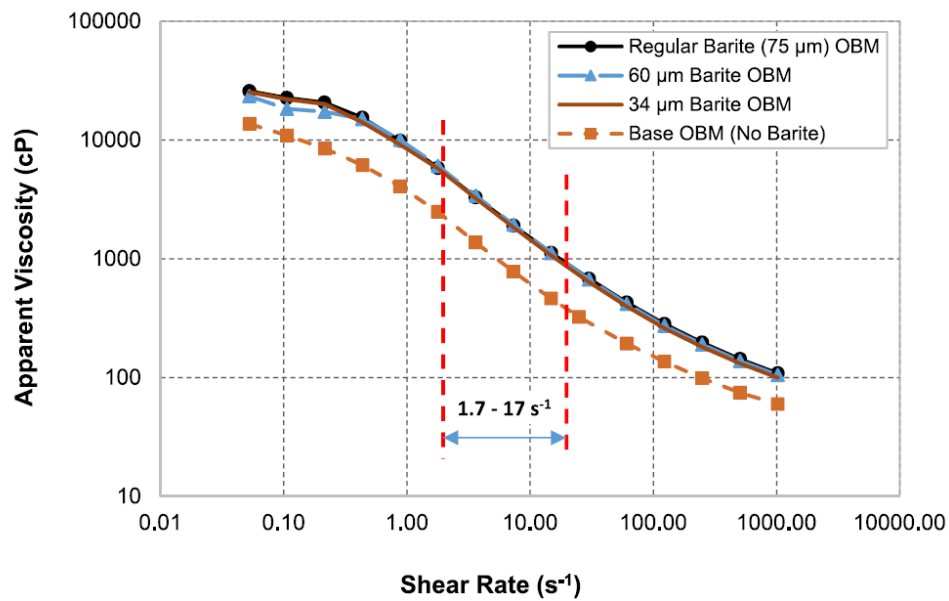


Figura 2.9. Efeito da barita e sua distribuição de tamanho de partícula na viscosidade aparente de fluidos base óleo a 49 °C. (Adaptado de FAKOYA *et al.*, 2023).

Observa-se, contudo, que a intensidade do comportamento pseudoplástico diminui com a taxa de deformação, como mostrado na Figura 2.10. Esta figura trata do valor absoluto do gradiente de viscosidade aparente em relação à taxa de deformação do fluido. Observa-se na Figura 2.10 que para taxas maiores que 150 s^{-1} o comportamento pseudoplástico começa a diminuir, o que indica a tendência de comportamento Newtoniano em taxas extremamente altas.

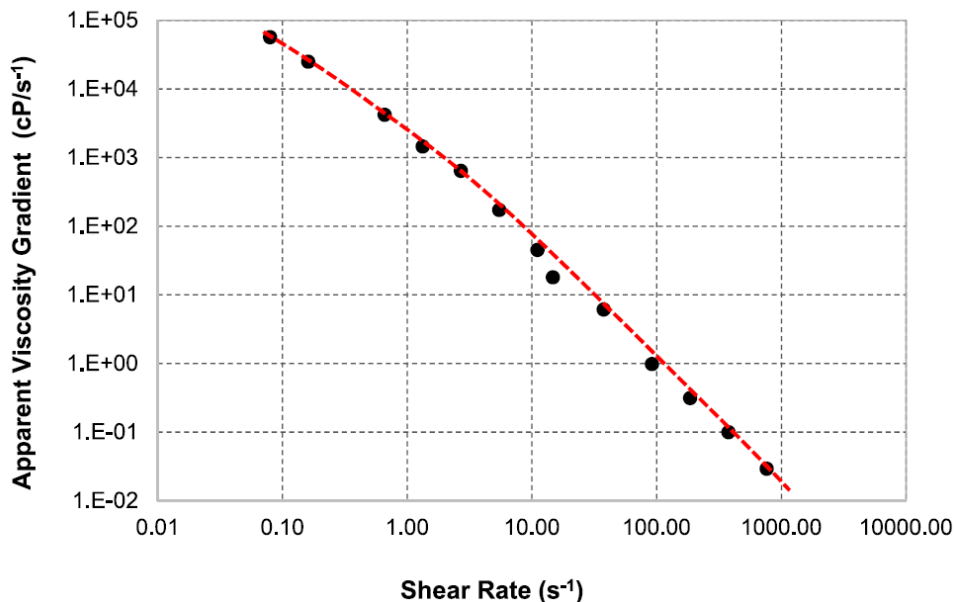


Figura 2.10. Efeito da taxa de deformação no gradiente de viscosidade aparente do fluido base (base óleo) a 49 °C. (Adaptado de FAKOYA *et al.*, 2023).

Okesanya, Abdulkarimov e Kuru (2020) conduziram experimentos para medir a velocidade terminal de sedimentação de partículas esféricas em fluidos viscoelásticos e viscoinelásticos do tipo lei da potência. Os autores buscaram ampliar o conjunto atual de

dados experimentais disponível na literatura. Além disso, por meio de uma abordagem semimecanística, estimaram o coeficiente de arrasto e a velocidade de sedimentação de partículas nestes fluidos por meio de modelos matemáticos explícitos. Novas correlações para o coeficiente de arrasto e para o número de Reynolds de partículas aplicáveis a esses fluidos fora elaboradas.

Os autores levaram em conta o efeito da elasticidade de forma a prever a velocidade de sedimentação de partículas esféricas em fluidos viscoelásticos do tipo lei de potência. Proporam, então, a seguinte correlação explícita para o número de Reynolds da partícula para a sedimentação em fluidos viscoelásticos:

$$Re_{p,elastic} = \frac{Re_{p,inelastic}}{(1 + \kappa)^{0.689}}, \quad (2.5)$$

em que κ é o índice de consistência do fluido.

Utilizou-se a técnica de *Particle Image Shadowgraphy (PIS)* para medir a velocidade de sedimentação de partículas esféricas em soluções de poliacrilamida hidrolisada e Tylose. As Figuras 2.11 e 2.12 mostra os plots de comparação entre valores preditos e observados da velocidade terminal da sedimentação das partículas nestes dois tipos de fluido.

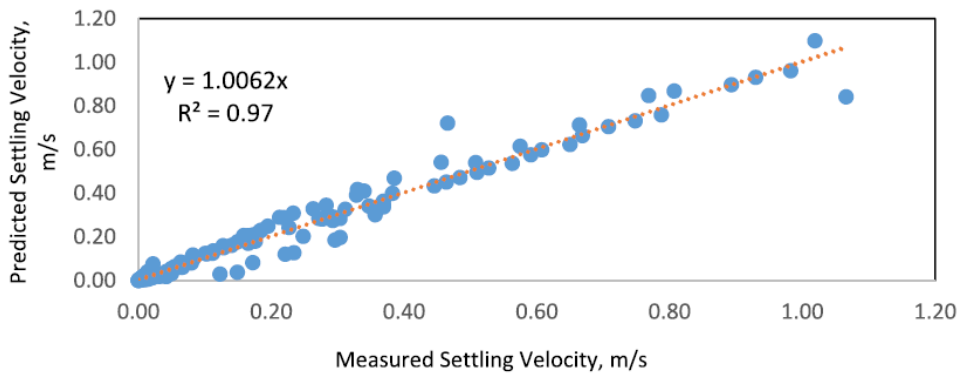


Figura 2.11. Velocidade terminal de sedimentação predita vs. observada para os fluidos viscoelásticos do tipo lei da potência (Adaptado de OKESANYA; ABDUKARIMOV, KURU 2020).

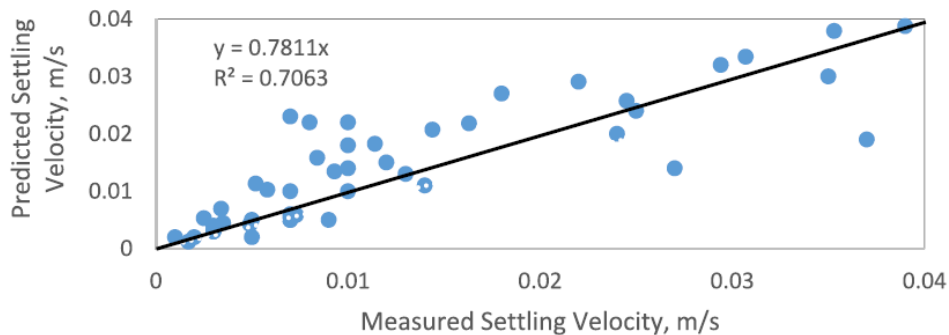


Figura 2.12. Velocidade terminal de sedimentação predita vs. observada para os fluidos viscoelásticos do tipo lei da potência (Adaptado de OKESANYA; ABDUKARIMOV, KURU 2020).

A análise estatística mostrou que os modelos propostos preveram a velocidade de sedimentação de partículas em fluidos viscoelásticos e viscoelásticos do tipo lei de potência de forma adequada. Um Erro Percentual Médio Absoluto (PMAE) de 7,5 % e 30

% foi obtido para os modelos dos fluidos viscoinelásticos e viscoelásticos, respectivamente. A Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE) também foi obtidos para a previsão da velocidade de sedimentação das partículas nestes dois fluidos, sendo iguais a $0,04 \text{ m/s}$ e $0,009 \text{ m/s}$, respectivamente.

A partir da Figura 2.13, os dados experimentais de ${}^{0.5}\sqrt{C_D}Re_p$ para fluidos viscoelásticos mostram um deslocamento em relação à tendência geral de dados semelhantes obtidos em ensaios com fluidos viscoinelásticos. Segundo os autores, essa redução aparente pode ser atribuída ao efeito da elasticidade. Esses resultados destacam a contribuição significativa da elasticidade na redução da velocidade de sedimentação das partículas, devido às forças de arrasto efetivas atuando significativamente, o que também se traduz em uma redução no número de Reynolds da partícula.

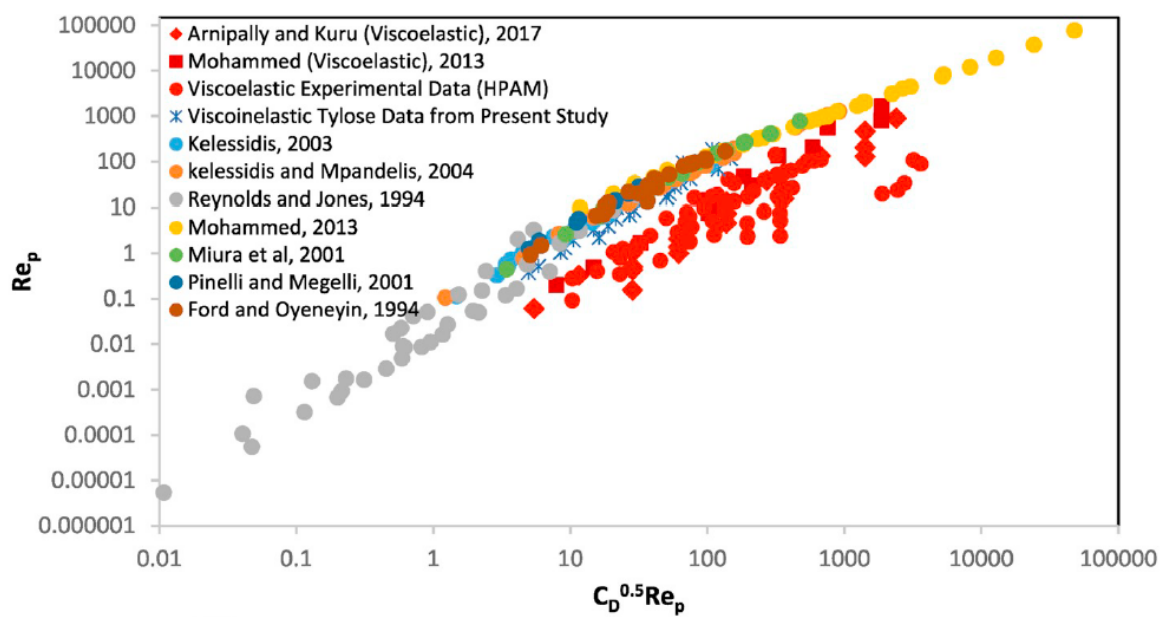


Figura 2.13. Valores de ${}^{0.5}\sqrt{C_D}Re_p$ baseados nos dados disponíveis da velocidade de sedimentação de partículas em fluidos viscoelásticos e viscoinelásticos do tipo lei de potência. (Adaptado de OKESANYA; ABDUKARIMOV, KURU 2020).

2.3 Fundamentação teórica da sedimentação

Um dos primeiros estudos sobre a sedimentação em batelada de partículas por ação da força gravitacional foi abordada no trabalho pioneiro de Coe e Clevenger (1916). A pesquisa dos autores identifica a existência das zonas típicas do fenômeno que aparecem na suspensão quando seus sólidos decantam: região de clarificado, sedimentação livre, concentração variável e compactação. A suspensão utilizada nos experimentos era homogeneizada, diluída e polidispersa. A Figura 2.14 ilustra estas zonas observadas pelos autores.

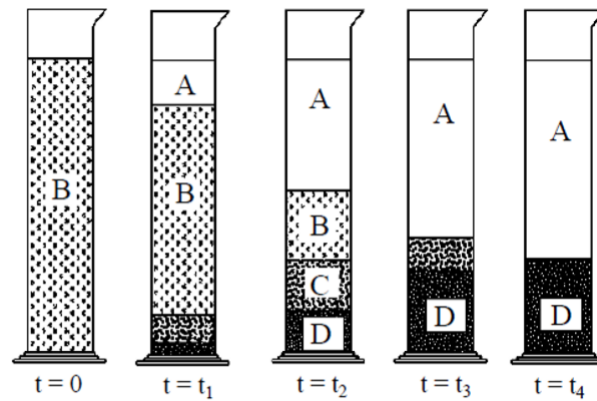


Figura 2.14. Zonas características dos testes de sedimentação em batelada (Adaptado de COE; CLEVENGER, 1916).

Os testes experimentais permitiram observar que, inicialmente, as partículas sedimentavam a uma velocidade constante, acumulando-se na base do recipiente, formando um leito consolidado de partículas na base da proveta. Além disso, os autores fizeram a suposição de uma região de sedimentação livre, onde as partículas sedimentam sem qualquer suporte mecânico das partículas presentes abaixo. Segundo os autores, as zonas da Figura 2.14 apresentam as seguintes características:

- Região de líquido clarificado (A): A concentração de sólidos é nula.
- Sedimentação livre (B): A concentração de sólidos é homogênea, permanecendo constante e igual à inicial, sendo considerada como zona de sedimentação livre.
- Concentração variável (C): A concentração é variável, diminuindo do fim da região C (início da região D) para o início da região C (fim da região B), onde a concentração é igual à concentração inicial, uma vez que a região B é homogênea.
- Compactação (D): Os sólidos se depositam uns sobre os outros, acumulando-se na base do recipiente. A base do recipiente é alcançada primeiramente pelas maiores e mais pesadas partículas. Em contrapartida, os sólidos de menor diâmetro, inicialmente próximos à base, sedimentam e ocupam parcialmente os espaços intersticiais entre as partículas mais grossas. Para que os sólidos se movimentem significativamente em direção ao fundo do recipiente é necessário que líquido seja expelido dos poros formados entre os sólidos.

Vale ressaltar que as regiões não existem simultaneamente durante todo o teste de sedimentação, de tal forma que as extensões das zonas B e C diminuem ao longo do tempo quando os sólidos da suspensão sedimentam, ao passo que a zona D aumenta, restando ao final do experimento somente a zona de clarificado (A) e de compressão (D). A partir dos testes de sedimentação em batelada, Coe e Clevenger (1916) desenvolveram um método para projetar sedimentadores contínuos determinando a sua capacidade. Concluiu-se que o espessamento das suspensões estudadas seria obtido ao esperar tempo suficiente para que o líquido escoasse para fora dos interstícios das partículas até a zona de clarificado. Assim, uma equação para a velocidade superficial de sólidos alimentados foi proposta, conforme Equação 2.6,

$$q_{0s} = \frac{v_{s0}}{\frac{1}{\varepsilon_{s0}} - \frac{1}{\varepsilon_{su}}} \quad (2.6)$$

onde, q_{0s} é a velocidade superficial de sólidos alimentados, v_{s0} é a velocidade inicial de sedimentação, ε_{s0} e ε_{su} são, respectivamente, a concentração inicial e de lama.

Em seguida, Comings (1940) constatou que a teoria de Cloe e Clevenger (1916) se aplicava somente a suspensões incompressíveis (densidade constante). Nesse sentido, o acúmulo de sólidos formado na base da coluna de sedimentação é rígido de tal maneira a não sofrer modificações com o aumento da altura de sedimentos que decantaram. Dessa forma, a espessura da zona compressão quase não influencia significativamente na concentração máxima de sólidos, permanecendo constante nesta região. Em contrapartida, se tratando de sólidos compressíveis, a altura de sedimentos está relacionada diretamente com a concentração máxima de sólidos na região de compressão e, assim, quanto mais espessa a zona de compactação, maior é a concentração máxima de sólidos. Observou-se que esta característica se aplica tanto para os testes em batelada, quanto para os de sedimentação em sistemas contínuos.

Em termos de modelo matemáticos da sedimentação, Kynch (1952) fez a primeira contribuição, em que o balanço de massa para a fase sólida foi utilizado para compor o modelo, que não levava em conta o balanço de forças que atuam nas partículas e era válido para suspensões de sólidos incompressíveis. Este é um modelo matemático com caráter hiperbólico, já que não considera os efeitos inerciais, a força de interação entre as fases sólido e fluido e os efeitos da aceleração da gravidade previstos pela equação do movimento. Através da equação da continuidade para esta fase, o autor foi capaz de descrever a sedimentação como um fenômeno de propagação de ondas de equi-concentração partindo do fundo da coluna até o topo do fluido, monitorando a interface inferior. A teoria foi fundamentada na consideração que a velocidade de sedimentação é função exclusiva da concentração local de sólidos. Algumas hipóteses foram feitas pelo autor na elaboração de seu modelo fenomenológico:

- Fenômeno unidimensional na direção vertical;
- Aumento da concentração de sólidos em direção à base da coluna ao longo do tempo;
- A velocidade de sedimentação tende a zerar conforme a concentração se aproxima da concentração máxima, sendo função unicamente da concentração local de sólidos;
- Não há consideração do efeito de parede;
- As fases sólida e líquida são considerados meios contínuos;

Com essas hipóteses, o modelo matemático de Kynch (1952) é mostrado a seguir:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial q_s}{\partial z} = 0 \quad (2.7)$$

em que ε_s é a concentração volumétrica de sólidos, q_s é a velocidade superficial de sólidos, dada por $\varepsilon_s v_s$, onde v_s é a velocidade intersticial de deposição de sólidos. A coordenada z representa a posição medida a partir da base da coluna e t é o tempo de sedimentação.

Como $\varepsilon_s = \varepsilon(z, t)$, $v_s = v_s(\varepsilon_s)$ e $q_s = q_s(\varepsilon_s)$, as relações matemáticas 2.8 e 2.9 são verdadeiras.

$$\frac{\partial q_s}{\partial z} = \frac{\partial q_s}{\partial \varepsilon_s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + V(\varepsilon_s) \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} = 0 \quad (2.9)$$

Onde,

$$V(\varepsilon_s) = \frac{\partial q_s}{\partial \varepsilon_s} \quad (2.10)$$

em que as condições inicial e de contorno a seguir são aplicadas:

$$\varepsilon_s(t = 0, z) = \varepsilon_{s0} \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_s(t > 0, z = 0) = \varepsilon_{sm} \quad (2.12)$$

com ε_{s0} e ε_{sm} sendo a concentração volumétrica de sólidos inicial e máxima, nesta ordem, e $V(\varepsilon_s)$ se trata da velocidade de ascensão das ondas de equi-concentração.

Como abordado anteriormente, o modelo representava a interface ascendente. Sendo assim, a interface superior, ou descendente, só seria possível de ser representada através de uma análise empírica. Através da Figura 2.15, é possível observar uma curva típica de sedimentação em termos de decaimento da interface superior ao longo do tempo, sendo a variação de sua posição ao longo do tempo representada pela Equação (2.13). Através da curva da Figura 2.15, o autor também foi capaz de identificar as zonas típicas da sedimentação, observando também as linhas de propagação de densidade dos sólidos.

$$\frac{dx}{dt} = -v(\varepsilon_s) \quad (2.13)$$

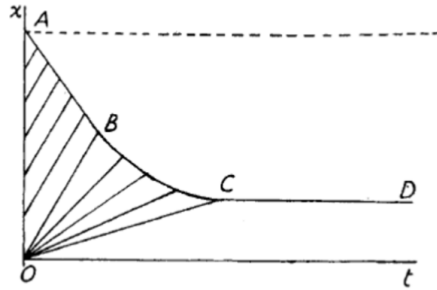


Figura 2.15. Previsão do modelo de Kynch (1952) para interface superior com presença das linhas de propagação de densidade dos sólidos (Adaptado de KYNCH, 1952).

Kynch (1952) observou as seguintes zonas de sedimentação, assim como Coe e Clevenger (1916) :

- **Região de líquido clarificado:** Região acima dos pontos ABCD e entre o tracejado, onde a concentração volumétrica de sólidos é nula ($\varepsilon_s = 0$);
- **Região de sedimentação livre:** Região abaixo do segmento AB (região AOB), onde a concentração volumétrica de sólidos é constante e igual à inicial ε_{s0} . Nesta região, a velocidade de sedimentação é constante ($v_s = v_{s0}$);
- **Região de transição:** Região BOC, representada pela curva BC. Nesta região, a concentração de sólidos varia entre a inicial e a máxima, isto é, a concentração da zona de compactação, e a velocidade de sedimentação diminui até ser nula;

- **Região de formação de sedimento:** Região onde a concentração de sólidos é máxima e a velocidade de sedimentação é nula, localizada abaixo dos segmentos OC e CD.

A Figura 2.16 mostra uma comparação gráfica com as regiões propostas por Cloe e Clevenger (1916):

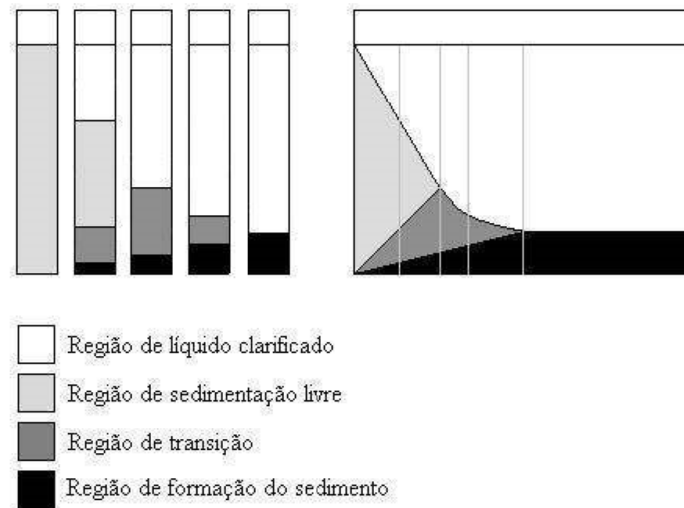


Figura 2.16. Regiões de sedimentação em batelada (Adaptado de AROUCA, 2007).

Richardson e Zaki (1954) estudaram o efeito da concentração de sólidos na taxa de sedimentação das partículas nos sistemas em batelada e na fluidização sólido-líquido. Sob condições viscosas, foi sugerido que a razão entre a velocidade de sedimentação (v_s) e a velocidade terminal da partícula (v_∞) é função única da concentração de sólidos (ε_s), conforme

$$\frac{v_s}{v_\infty} = (1 - \varepsilon_s)^{4,7}. \quad (2.14)$$

Telmage e Fitch (1955) desenvolveram um método gráfico que permite obter a área de sedimentadores contínuos por meio de ensaios em batelada. O principal objetivo do trabalho foi realizar uma comparação entre os métodos de Cloe e Clevenger (1916) e Kynch (1952). Os experimentos demonstraram que as metodologias são equivalentes quando baixas concentrações são empregadas, porém concluíram que o método de Kynch (1952) era o mais adequado.

Scott (1968) fez uso de métodos baseados em ensaios de sedimentação em batelada de suspensões de sílica, como os de Cloe e Clevenger (1916) e Talmage e Fitch (1955) para comparar a área efetiva com a predita em sistemas de sedimentação contínuos. Algumas divergências entre os casos teóricos e práticos foram observadas, embora a metodologia de Talmage e Fitch (1955) tenha se mostrado mais adequada. Essas diferenças confirmam que a sedimentação de suspensões floculadas apresenta a formação de canais estreitos (*Channeling*), que aceleram a taxa de sedimentação das partículas sólidas.

Dixon (1977) fez um estudo teórico considerando o balanço de forças que atuam na sedimentação em batelada de suspensões inicialmente homogêneas. Considerou-se que as fases líquida e sólida são contínuas e interagem entre si por meio da força de arraste sobre os sólidos em qualquer ponto, sendo uma função da concentração de sólidos e da velocidade relativa. A conclusão do autor foi que o gradiente da concentração de sólidos

existe apenas na zona de compressão, pois a força resultante na zona de sedimentação livre é nula, uma vez que o sistema está em equilíbrio. Como não há força resultante, não existe gradiente de velocidade, consequentemente, não existe gradiente de concentração de sólidos. Para Dixon (1977), a zona de formação de sedimento corresponde às zonas C, de concentração variável, e D, zona de compactação, observadas por Coe e Clevenger (1916), como na Figura 2.14.

D'Ávila (1978) desenvolveu um modelo matemático buscando descrever a sedimentação de partículas sólidas, que utilizou os conceitos da *Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo*, desenvolvendo um modelo matemático levando em conta o balanço de forças atuante sobre as partículas através da equação do movimento. O autor fez das seguintes hipóteses em seu modelo:

- Fenômeno unidimensional;
- As fases líquida e sólida são incompressíveis;
- Sem efeito de parede;
- O tensor tensão da fase sólida é função única da porosidade do meio, possuindo somente componentes normais à superfície de contato, como a seguir

$$T_s = T_s(\varepsilon_s) = -P_s(\varepsilon_s)\mathbf{I}, \quad (2.15)$$

$$T_s(\varepsilon_s) = \begin{bmatrix} \tau_{ss,s} & \tau_{xy,s} & \tau_{xz,s} \\ \tau_{yx,s} & \tau_{yy,s} & \tau_{yz,s} \\ \tau_{zx,s} & \tau_{zy,s} & \tau_{zz,z} \end{bmatrix} = -P_s(\varepsilon_s)\mathbf{I}, \quad (2.16)$$

em que $\mathbf{I}$ é a matriz identidade, P_s é a pressão efetiva nos sólidos, ε_s é a concentração volumétrica de sólidos e τ_{ijs} é a tensão nos sólidos atuando no plano perpendicular ao eixo i e na direção do eixo j .

O autor constatou que as velocidades de sólido e fluido na base da coluna de sedimentação são nulas, tratando o fato como uma restrição cinemática. Esta restrição permite que a concentração volumétrica de sólidos e a velocidade sejam descritos através da equação da continuidade e do movimento da fase sólida. Com isso, equações constitutivas são necessárias para a tensão nos sólidos e para a força resistiva e, além disso, o autor considerou escoamento darcyano no desenvolvimento de seu modelo, cuja forma adimensionalizada é mostrado por:

$$-D \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial \xi} + (1 - \varepsilon_f) \frac{\partial u}{\partial z^*} - u \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z^*} = 0, \quad (2.17)$$

$$(1 - \varepsilon_f) \left(D \frac{\partial u}{\partial \xi} + u \frac{\partial u}{\partial z^*} \right) + S \frac{dP}{d\varepsilon_f} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z^*} = -Au + B(1 - \varepsilon_f), \quad (2.18)$$

em que as variáveis adimensionais são dados por:

$$u = \frac{v_s}{v_{s0}}, \xi = \frac{t}{t_0}, z^* = \frac{z}{z_0}, P = \frac{P_s}{P_{s0}}, \quad (2.19)$$

$$D = \frac{z_0}{v_{s0}t_0}, S = \frac{P_0}{\rho_s v_{s0}^2}, A = \frac{\mu z_0}{\rho_s v_{s0} K(\varepsilon_f)}, B = \frac{(\rho_s - \rho_f)g_z}{\rho_s v_{s0}^2}, \quad (2.20)$$

As condições iniciais são dadas por:

$$\xi = 0, u = u_0(z^*), \varepsilon_f = \varepsilon_{f0}(z^*). \quad (2.21)$$

em que, u_0 é o perfil de velocidade e o ε_{f0} o perfil de porosidade, ambos no início da sedimentação.

O modelo foi resolvido pelo método das características permitindo a predição das duas interfaces inferior e superior, como mostrado na Figura 2.17. Esse comportamento é dado pelas Equações 2.22 e 2.23, que representam respectivamente o decaimento da interface superior e inferior. A Figura 2.17 apresenta três regiões descritas pelo modelo de D'Ávila (1978): a região de líquido clarificado, de sedimentação livre e a zona de compressão, onde há a formação do leito de sólidos com presença de líquido retido nos interstícios. Para cada uma dessas regiões um mesmo conjunto de equações constitutivas pode ser utilizado para descrevê-las pelo modelo,

$$\frac{dZ}{dT} = \frac{1}{M} \left(V - \sqrt{-K \frac{dP}{d\varepsilon_f}} \right) e \quad (2.22)$$

$$\frac{dZ}{dT} = \frac{1}{M} \left(V + \sqrt{-K \frac{dP}{d\varepsilon_f}} \right). \quad (2.23)$$

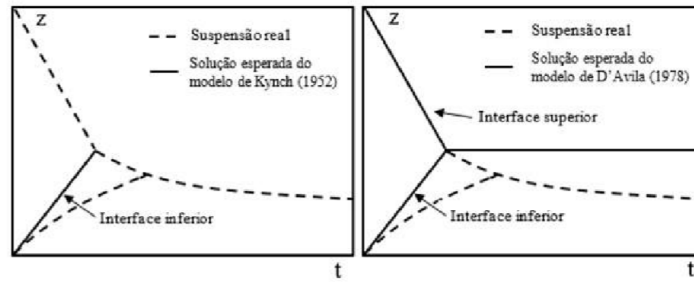


Figura 2.17. Comparação dos modelos de Kynch (1952) e D'Ávila (1978) com o fenômeno real (D'ÁVILA, 1978, apud AROUCA, 2007).

Tiller e Leu (1980) estudaram equações constitutivas para a permeabilidade do meio e pressão nos sólidos. Realizaram a estimação dos parâmetros destas equações, que foi possível por meio de dados de porosidade média a partir de experimentos de filtração. Ainda que as equações tenham sido obtidas por meio de experimentos de filtração, elas são válidas para o estudo sedimentação de partículas. Estas equações propostas consideram que a permeabilidade do meio e a pressão exercida sobre a fase sólida (fase dispersa) são funções somente da concentração local de sólidos (ε_s). Nesse sentido, a Equação 2.24 foi proposta para descrever a permeabilidade do meio, onde K_{sc} , ϵ_c e ψ , são parâmetros a serem estimados, sendo

$$K = K_{sc} \left(\frac{\varepsilon_s}{\epsilon_c} \right)^{-\psi}. \quad (2.24)$$

A pressão nos sólidos, segundo os autores, é descrita pelas seguintes equações constitutivas,

$$P_s = P_{sa} \left[\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{scr}} \right)^{1/\beta} - 1 \right], \quad (2.25)$$

$$P_s = P_{sa} \exp\left(\frac{-1}{\varepsilon_s}\right), \quad (2.26)$$

$$P_s = P_{sa} \exp(\beta \varepsilon_s), \quad (2.27)$$

em que P_s e ε_{scr} são a pressão da fase sólida e concentração crítica de sólidos sob ausência de pressão na fase sólida, enquanto P_{sa} e β são parâmetros do modelo que precisam ser estimados.

Tiller (1981) buscou revisar o trabalho de Kynch (1952) e adequá-lo ao caso da sedimentação de sólidos compressíveis. Tiller (1981), ao contrário de Kynch (1952), propôs um modelo matemático em que o surgimento das zonas de equi-concentração se dá a partir do topo do sedimento formado na zona de compressão, onde a velocidade do líquido ascendente influencia diretamente a taxa de sedimentação de sólidos. Seu modelo representou o comportamento das duas interfaces, superior (entre a zona de clarificado e zona de concentração constante), caracterizada pela letra H, e inferior (entre a zona de concentração variável e o compactado), dada pela letra L. As duas interfaces, H e L, podem ser observadas na Figura 2.18.

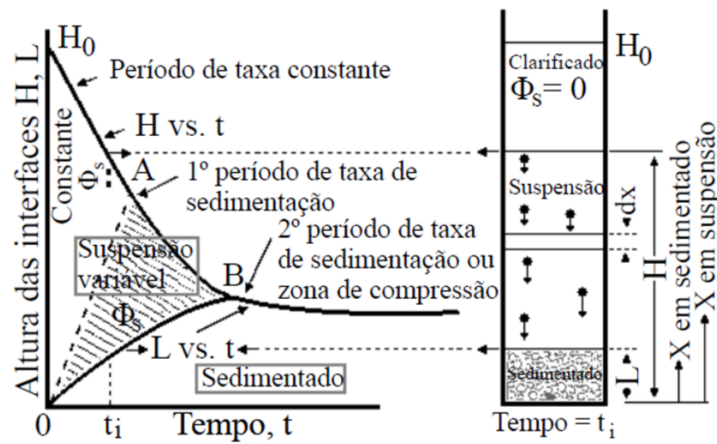


Figura 2.18. Interfaces ascendente e descendente para sólidos compressíveis previstas por Tiller 1981 (Adaptado de TILLER, 1981).

Wakeman e Holdich (1984) concluíram que os termos inerciais não influenciam significativamente na sedimentação das partículas da zona do compactado, quando comparadas às forças gravitacional e de arraste. Experimentos que monitoravam a concentração de sólidos em função da posição e o tempo também foram realizados pelos autores, com ênfase ao comportamento da zona de compactação a partir destas concentrações.

Concha e Bustos (1987) propuseram uma mudança na condição de contorno de Kynch (1952), na base da coluna de sedimentação, para que fossem incorporadas ao modelo as características compressíveis de suspensões reais. Considerando que a pressão nos sólidos é função somente da concentração de sólidos, a modificação na condição de contorno é obtida pela aplicação da equação do movimento na base da coluna, conforme Equação 2.28,

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} = \frac{(\rho_s - \rho_f)g \varepsilon_s}{\frac{dP_s}{d\varepsilon_s}}, \quad (z = 0, t), \quad (2.28)$$

onde ε_s , ρ_f , ρ_s , P_s e g significam, respectivamente, a concentração volumétrica de sólidos, a densidade do fluido, a densidade de sólidos, pressão nos sólidos e a aceleração da gravidade.

Resultados coerentes com o comportamento de suspensões floculadas foram obtidos e, para suspensões de alto grau de compressibilidade, os autores observaram que as características são linhas curvas, o que contraria as linhas retas presente no gráfico de Kynch (1952).

Laruccia (1990) desenvolveu uma correlação para o cálculo do coeficiente de arraste, C_D , de partículas com diferentes esfericidades sedimentando em fluidos não-Newtonianos que não possuem efeito de memória. Obteu-se a equação por meio de análise dimensional e dados experimentais dos regimes laminar, de transição e turbulento, de tal forma a propor a seguinte expressão para o coeficiente de arraste, que não depende do modelo reológico do fluido,

$$C_D = \left\{ \left[\frac{24\Omega(\phi)}{Re_{gen}} \right]^p + [X(\phi)]^p \right\}^{1/p}, \quad (2.29)$$

onde C_D é o coeficiente de arraste, p um parâmetro característico do escoamento turbulento, enquanto $\Omega(\phi)$ e $X(\phi)$ são funções da esfericidade, obtidas por dados experimentais que fizeram uso de limites para escoamento laminar e turbulento, respectivamente. Re_{gen} é o número de Reynolds generalizado, dado por,

$$Re_{gen} = \frac{\rho v_t^2 \Psi(\phi)}{\tau(\dot{\gamma})}, \quad (2.30)$$

O número de Reynolds generalizado depende da tensão cisalhante, $\tau(\dot{\gamma})$, da velocidade terminal da partícula isolada, v_t , massa específica da fase fluida, ρ_f , e da esfericidade, ϕ , contida em $\Psi(\phi)$.

Se tratando de escoamentos laminares, como o caso da sedimentação, a equação proposta para o coeficiente de arraste se resume à Equação (2.31), uma vez que $p = 1$ e $X(\phi)$ igual a zero.

$$C_D = \frac{24\Omega(\phi)}{Re_{gen}}, \quad (2.31)$$

com $\Omega(\phi)$ e $\psi(\phi)$, ajustadas aos dados experimentais, conforme

$$\Omega(\phi) = 1,65 - 0,65\phi, \quad (2.32)$$

$$\psi(\phi) = -3,45\phi^2 + 5,25\phi - 1,41. \quad (2.33)$$

França, Massarani e Biscaia Jr. (1999) estimaram parâmetros de equações constitutivas de permeabilidade do meio e pressão nos sólidos. O modelo matemático dos autores possui uma abordagem fenomenológica que considera a equação da conservação de massa e do movimento para as fases sólida e líquida de duas zonas consideradas coexistentes: zonas de sedimentação livre e compressão, conforme a Figura 2.19.

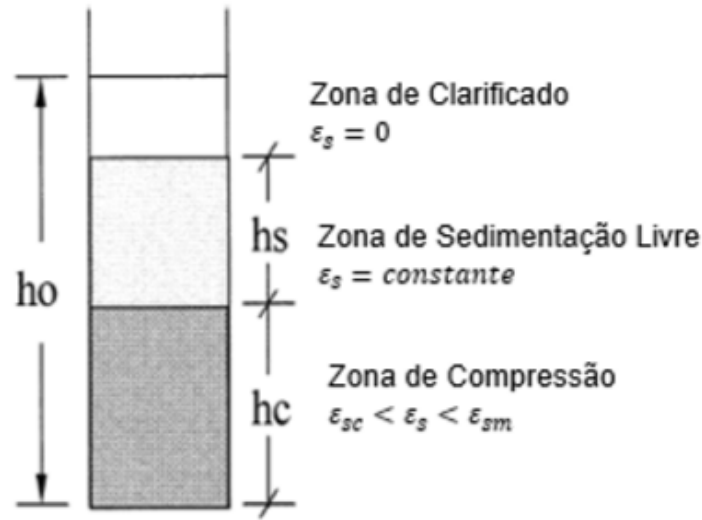


Figura 2.19. Representação das zonas de sedimentação (Adaptado de FRANÇA, MASSARANI e BISCAIA Jr.,1999.).

A concentração volumétrica de sólidos é constante na zona de sedimentação livre, onde as partículas sedimentam livremente sem interação entre si. A partir dessas considerações, equações que descrevem a velocidade de deslocamento da interface superior, bem como a variação de sua altura com o tempo, foram propostas, como mostradas a seguir:

$$v_{sup} = k_2 \left[\frac{1 - \exp(-k_1 t)}{k_1} \right], \quad (2.34)$$

$$h = h_0 - \lambda \left(t - \frac{1 - e^{-k_1 t}}{k_1} \right), \quad (2.35)$$

onde, k_1 , k_2 e λ são dados por:

$$k_1 = \frac{\mu}{K(\varepsilon_{s0})\rho_s\varepsilon_{s0}}, k_2 = \frac{(\rho_s - \rho_f)g}{\rho_s}, \lambda = \frac{k_1}{k_2}, \quad (2.36)$$

em que, ε_{s0} é a concentração inicial de sólidos, μ é a viscosidade do líquido, ρ_f é a densidade do fluido, ρ_s é a densidade dos sólidos, g é a aceleração da gravidade e $K(\varepsilon_{s0})$ é a permeabilidade do meio, que depende da porosidade e é estabelecida por meio de uma expressão de Kozeny (1927) e Carman (1937), conforme Equação 2.37,

$$K(\varepsilon_s) = (\alpha + \gamma\varepsilon_s) \frac{(1 - \varepsilon_s)^3}{\varepsilon_s^2}, \quad (2.37)$$

em que α e γ são parâmetros a serem estimados.

As equações da continuidade e do movimento para a fase sólida estão representadas nas Equações (2.38) e (2.39), respectivamente, e são aplicadas para a zona de compressão. Como as forças de interação sólido-sólido passam a ser significativas, a concentração de sólidos também varia com o espaço e o tempo,

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} - \frac{\partial Q_s}{\partial z} = 0, \quad (2.38)$$

$$\rho_s \left[\frac{\partial Q_s}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q_s^2}{\varepsilon_s} \right) \right] = \frac{\partial P_s}{\partial z} - \frac{\mu Q_s}{K(\varepsilon_s)} + (\rho_s - \rho_f)g\varepsilon_s. \quad (2.39)$$

As condições de contorno são:

$$z = 0; Q_s = 0, \quad (2.40)$$

$$z = h_c(t); \varepsilon_s = \varepsilon_{scr}; P_s = 0, \quad (2.41)$$

em que ε_{scr} é a concentração crítica de sólidos. Os autores fizeram uso de duas equações para a pressão nos sólidos: a proposta de Tiller e Leu (1980), Equação (2.25), e outra do tipo Langmuir, conforme

$$P_s(\varepsilon_s) = P_a \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_{scr})}{(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_s)}. \quad (2.42)$$

Arouca (2007) utilizou os mesmos conceitos físicos dos modelos de Burger e Concha (1998) e D'Ávila (1978), propondo um modelo matemático unidimensional ao estudar a sedimentação de diferentes materiais sólidos. A partir do estudo dos autores, ficou claro que não foi necessário usar condições de salto nas fronteiras móveis que separam as regiões de sedimentação livre e de compactação, já que os resultados foram coerentes para todo o domínio do problema, mostrando uma melhor capacidade de representar sistemas pouco permeáveis. O autor também introduziu um modelo reológico do tipo lei de potência com dois parâmetros estimáveis para representar a tensão nos sólidos.

Os estudos até agora abordados utilizaram suspensões newtonianas em seus experimentos e elaboração de modelos matemáticos. Trabalhos presentes na literatura envolvendo fluidos não-Newtonianos também são amplamente estudados no tema da sedimentação de adensantes em fluidos de perfuração. Existem estudos de sedimentação sobre o efeito do gradiente térmico e da pressão, além da proposta de modelos matemáticos que contribuíram para a elaboração de simuladores da sedimentação de sólidos adensantes em regiões anulares de poços de petróleo, entre outros.

Calçada et al. (2016) apresentou uma metodologia para avaliar a capacidade de drenagem de fluidos de perfuração confinados em anulares como estratégia de mitigação do fenômeno APB (Annular Pressure Build-up). Um modelo matemático capaz de prever a sedimentação de sólidos adensantes de fluidos de perfuração foi desenvolvido. O modelo fenomenológico, que considerava a sedimentação como um fenômeno unidimensional, era constituído pelas equações da continuidade e pela equação do movimento, considerando assim o balanço de forças no sistema. A força de interação sólido-líquido para $Re_p < 0,2$ está representada pelo primeiro termo entre colchetes na Equação 2.44 conforme estabelecido por Richardson e Zaki (1954), e o segundo, à força de interação sólido-sólido proposta pelos autores em seu trabalho. As equações estão resumidas a seguir:

Equação da continuidade:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} = -\varepsilon_s \frac{\partial v_s}{\partial z} - v_s \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z}. \quad (2.43)$$

Equação do movimento:

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = g - \frac{1}{\rho_s} \left[\frac{18\mu_{ap}(v_f - v_s)}{d_p^2(1 - \varepsilon_s)^{2,7}} - a\varepsilon_s^b \right]. \quad (2.44)$$

As seguintes condições de contorno e inicial são aplicadas:

$$C.I. : \varepsilon_s(t = 0, z) = \varepsilon_{s0}, \quad (2.45)$$

$$C.C. : \varepsilon_s(z = 0, t) = 0, \quad (2.46)$$

$$C.I. : v_s(t = 0, z) = 0, \quad (2.47)$$

cujas variáveis ε_s , v_s , ρ_s , d_p , v_f , g , a e b indicam, nessa ordem, a concentração, a velocidade, a densidade, o diâmetro dos sólidos, a fase líquida, a aceleração gravitacional e parâmetros do modelo. A viscosidade aparente (μ_{ap}) é representada por:

$$\mu_{ap} = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{\tau\sqrt{K}}{v_s}, \quad (2.48)$$

em que, τ é a tensão de cisalhamento, $\dot{\gamma}$ a taxa de cisalhamento e K é a permeabilidade do meio, calculada pela equação de Kozeny-Carman.

Aline (2020) estudou o fenômeno da sedimentação em termos de efeitos de temperatura. Dois modelos de sedimentação não-isotérmicos para fluidos com tensão limite de escoamento foram propostos. Estes modelos, que são baseados na mecânica do contínuo, predizem a dinâmica da sedimentação e o perfil axial da sedimentação de barita em fluido sintético em diferentes temperaturas. A equação da continuidade e do movimento compõem os modelos para a fase sólida e as propriedades das fases líquidas e sólidas são obtidas por meio de equações constitutivas. O primeiro modelo em função da velocidade de sólidos, em sua forma adimensionalizada, está representado a seguir na Equação 2.49, sujeita ao campo de velocidades orindo da equação do movimento conforme

$$\frac{\partial(\Theta_s)}{\partial\xi} + S \frac{\partial(\Theta_s u_s)}{\partial z^*} = 0, \quad \xi = \frac{t}{t_f}, \quad z^* = \frac{z}{L_0}, \quad \Theta_s = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{s0}}, \quad u_s = \frac{v_s}{v_{s0}}, \quad S = \frac{v_{s0} t_f}{L_0} e \quad (2.49)$$

$$u_s = \frac{1}{v_{so}} \left\{ \frac{K}{M(1 - \varepsilon_{so} \Theta_s)^{1-n}} \left[\frac{d_p}{\theta(\phi)} \right]^{n-1} \left(\frac{\rho_{susp}}{\rho_{susp} - \rho_s \varepsilon_{so}} \right) \left[\varepsilon_{so} \Theta_s (\rho_s - \rho_l) g - \frac{1}{L_0} \frac{dP_s}{d\varepsilon_s} \frac{\partial \Theta_s}{\partial z^*} \right] \right\}^{\frac{1}{n}}. \quad (2.50)$$

em que Θ_s , ε_{s0} , u_s , K , d_p , M , n , ρ_{susp} , ρ_s , $\frac{dP_s}{d\varepsilon_s}$, $\frac{\partial \Theta_s}{\partial z^*}$, L_0 são, respectivamente, a concentração de sólidos adimensional, a concentração volumétrica inicial de sólidos, a velocidade dos sólidos, a permeabilidade da matriz porosa, o diâmetro de partícula, o índice de consistência da suspensão, o índice de comportamento do fluido, a densidade da suspensão, a densidade de sólidos, o gradiente de pressão nos sólidos, o gradiente de concentração adimensional de sólidos e a altura inicial da suspensão. O segundo modelo é dado em função do fluxo,

$$\frac{\partial \Theta_s}{\partial \xi} + S \frac{\partial Q_s^*}{\partial z^*} = 0, \quad (2.51)$$

em que Q_s^* é o fluxo de sólidos adimensional ($Q_s^* = \Theta_s u_s$). A mudança de variáveis é feita de forma análoga na equação do movimento.

Estas equações estão sujeitas às condições inicial e de contorno,

$$C.I. : \Theta_s(z^*, \xi = 0) = 1, \quad (2.52)$$

$$C.C.I. : Q_s^* = \Theta_s u_s(z^* = 0, \xi) = 0, \quad (2.53)$$

$$C.C.II : Q_s^* = \Theta_s u_s(z^* = 1, \xi) = 0 . \quad (2.54)$$

Um procedimento matemático rigoroso foi empregado na resolução dos modelos, que foram solucionados numericamente pelo método dos volumes finitos. Por meio de dados experimentais de sedimentação de sólidos adensantes em fluido Br-Mul, a estimação de parâmetros das equações da permeabilidade do meio, pressão dos sólidos e tempo de relaxação foi realizada. Quanto aos parâmetros reológicos não-isotérmicos do modelo do tipo Arrhenius, estes também foram estimados no trabalho de Aline (2020). Este trabalho permitiu concluir que a tensão limite quando introduzida no modelo matemático através do parâmetro de tempo de relaxação ajustou adequadamente a dinâmica inicial da sedimentação, uma vez que descreve a transição do fluido do estado majoritariamente viscoso, quando ocorre o início da sedimentação. Além disso, o modelo de Arrhenius se mostrou mais adequado para o fluido analisado e, a elevadas temperaturas, a dinâmica de sedimentação é acelerada significativamente. Portanto, a temperatura deve ser levada em consideração, pois negligenciar sua influência pode resultar na predição de altura de sedimento menor que a real.

Rocha et al. (2020) elaboraram um modelo fenomenológico para prever a dinâmica de sedimentação de sólidos adensantes em fluidos não-Newtonianos. O adensante utilizado foi a barita e o comportamento reológico do fluido era descrito por um modelo do tipo lei da Potência. As equações da continuidade, Equação (2.55) e do movimento para a fase sólida descrevem o modelo, considerando a fase sólida meio contínuo, Equação (2.56), por meio do qual o campo de velocidade é calculado. Equações constitutivas e correlações empíricas para abordar a permeabilidade do meio e a tensão da fase sólida foram incorporadas ao modelo matemático dos autores. As hipóteses simplificadoras utilizadas no modelo estão elencadas a seguir:

- Sedimentação unidimensional;
- Fase sólida incompressível;
- Os termos da aceleração local e transporte convectivo de quantidade de movimento desconsiderados (escoamento lento);
- Modelo reológico: lei da potência (*Power-Law*)

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_s v_s}{\partial z} = 0, \quad (2.55)$$

$$v_s = \left[\frac{K}{M(1 - \varepsilon_s)^{1-n}} \left[\frac{d_p}{\Psi(\phi)} \right]^{n-1} \left(\frac{\rho_{susp}}{\rho_{susp} - \rho_{s\varepsilon s0}} \right) \left[\varepsilon_s(\rho_s - \rho_l)g - \frac{dP_s}{d\varepsilon_s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} \right] \right]^{1/n}, \quad (2.56)$$

sujeito às seguintes condições de contorno e inicial,

$$C.I. : \varepsilon_s(z, t = 0) = \varepsilon_{s0}, \quad (2.57)$$

$$C.C.I : Q_s = \varepsilon_s v_s(z = 0, t) = 0, \quad (2.58)$$

$$C.C.II : Q_s = \varepsilon_s v_s(z = L_0, t) = 0. \quad (2.59)$$

Nas equações apresentadas, ε_s , ε_{s0} e v_s são, respectivamente, a concentração volumétrica de sólidos, a concentração volumétrica inicial e a velocidade de sólidos. O termo g é a aceleração da gravidade, ρ_s , ρ_f e ρ_{susp} são a densidade do sólido, densidade do fluido e densidade da suspensão respectivamente. d_p é o diâmetro das partículas e M e n são o índice de consistência e comportamento do fluido, respectivamente. A proposta de Laruccia (1990) foi empregada para descrever a esfericidade, válida na faixa de $0,5 < \phi < 1$, conforme Equação 2.33.

A equação constitutiva utilizada para a permeabilidade do meio foi uma modificação da Equação de Tiller e Leu (1980), Equação (2.24), de forma que a permeabilidade, K , se aproxime de zero quando a concentração de sólidos, ε_s for máxima (ε_{sm}),

$$K = K_0 d_p^2 \left(\frac{\varepsilon_{sm}}{\varepsilon_s} - 1 \right)^A, \quad (2.60)$$

em que K_0 e A são parâmetros do modelo.

Para tratar a pressão nos sólidos, Rocha *et al.* (2020) realizaram uma derivação em relação à concentração volumétrica na Equação proposta por Tiller e Leu (1980),

$$P_s(\varepsilon_s) = P_{sref} \exp \left[-\beta \left(\frac{1}{\varepsilon_s} - \frac{1}{\varepsilon_{sref}} \right) \right], \quad (2.61)$$

obtendo-se assim o gradiente de pressão nos sólidos com a regra da cadeia,

$$\frac{dP_s}{d\varepsilon_s} = P_{sref} \exp \left[-\beta \left(\frac{1}{\varepsilon_s} - \frac{1}{\varepsilon_{sref}} \right) \right] \cdot \frac{d}{d\varepsilon_s} \left[-\beta \left(\frac{1}{\varepsilon_s} - \frac{1}{\varepsilon_{sref}} \right) \right] \quad (2.62)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon_s} \left[-\beta \left(\frac{1}{\varepsilon_s} - \frac{1}{\varepsilon_{sref}} \right) \right] = -\beta \left(-\frac{1}{\varepsilon_s^2} \right) \quad (2.63)$$

$$\frac{dP_s}{d\varepsilon_s} = \frac{\beta}{\varepsilon_s^2} P_{sref} \exp \left[-\beta \left(\frac{1}{\varepsilon_s} - \frac{1}{\varepsilon_{sref}} \right) \right] \quad (2.64)$$

cujo resultado final é o gradiente da pressão nos sólidos em relação à concentração volumétrica de sólidos,

$$\frac{dP_s}{d\varepsilon_s} = \frac{A}{\varepsilon_s^2} \exp \left[-\beta \left(\frac{1}{\varepsilon_s} - \frac{1}{\varepsilon_{sref}} \right) \right], \quad (2.65)$$

em que A e β são parâmetros que precisam ser estimados. Este modelo proposto foi validado por dados experimentais, que foram utilizados para a estimação dos parâmetros do modelo. Este estudo contribuiu para a criação do SimSag, simulador unidimensional da sedimentação, desenvolvido no Laboratório de Escoamento de Fluidos -LEF/UFRRJ e validado por dados experimentais. Este simulador é um código fechado, cuja solução das equações governantes foi realizada de forma numérica pelo método dos volumes finitos.

Awad *et al.* (2021) apresentam um estudo de Fluidodinâmica Computacional (CFD) sobre a sedimentação de partículas durante operações de perfuração. A influência da reologia do fluido, regime de escoamento, tamanho e forma das partículas na taxa de queda foram os aspectos principais investigados pelo trabalho. Segundo os autores, o método Euleriano-Lagrangiano (E-L) conta com a equação do movimento para descrever o fenômeno. A solução aquosa de celulose polianiónica (PAC) com três diferentes concentrações de polímero (0,5%, 0,7% e 1% de PAC) foi empregada no estudo.

Nesse método, a fase fluida é modelada pela resolução das equações de Navier–Stokes em um referencial Euleriano, enquanto as trajetórias das partículas são obtidas pela segunda lei de Newton em um referencial Lagrangiano. Para fluidos incompressíveis, as equações de conservação da massa e da quantidade de movimento são dadas por

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\nabla p - \nabla \cdot (\bar{\tau}) + \rho \vec{g} + \sum \vec{F}_i, \quad (2.67)$$

em que ρ e $\vec{u}$ representam, nesta ordem, a densidade e a velocidade do fluido, p é a pressão estática, $\bar{\tau}$ é o tensor de tensões, $\rho \vec{g}$ corresponde à força gravitacional e $\sum \vec{F}_i$ representa as forças externas, como a troca de quantidade de movimento entre as fases particulada e fluida.

Utilizou-se esta abordagem para rastrear trajetórias de partículas em um fluido pseudoplástico em repouso, considerando diferentes modelos reológicos. O modelo de lei de potência foi utilizado, além modelos newtonianos generalizados, como os modelos de Cross e de Carreau, que oferecem uma descrição mais precisa do comportamento reológico de diversos fluidos utilizados em operações de perfuração e completção (AWAD et al., 2021). Esses modelos consideram explicitamente a viscosidade no regime de baixa taxa de cisalhamento (viscosidade de cisalhamento nulo).

O modelo de Cross é dado por:

$$\eta_{Cr} = \frac{\mu_0}{1 + (\lambda_{Cr}, \dot{\gamma})^{1-n_{Cr}}} \quad (2.68)$$

em que μ_0 é a viscosidade em regime de cisalhamento nulo, n_{Cr} é o índice de potência do modelo de Cross, e λ_{Cr} é a constante de tempo característica, definida como o inverso da taxa de cisalhamento crítica $\dot{\gamma}_c$, na qual o fluido passa de comportamento newtoniano para não newtoniano.

O modelo de Carreau é expresso por:

$$\eta_{Ca} = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) [1 + (\lambda_{Ca}, \dot{\gamma})^2]^{\frac{n_{Ca}-1}{2}} \quad (2.69)$$

onde λ_{Ca} é a constante de tempo do modelo de Carreau, μ_∞ corresponde à viscosidade em altas taxas de cisalhamento, e n_{Ca} é o índice de potência associado ao modelo.

Uma vantagem importante dos modelos generalizados em relação ao modelo de lei da potência simples é a capacidade de representar corretamente os limites newtonianos tanto em baixas quanto em altas taxas de cisalhamento. Na região intermediária de cisalhamento, esses modelos se aproximam do comportamento descrito pela lei de potência clássica.

A análise inclui partículas esféricas e elipsoidais, com diâmetros entre 2 a 6 mm, além de diferentes distribuições de tamanho de partículas. Os resultados contidos nas Figuras 2.20 e 2.20, mostram que o uso de um modelo lei de potência não newtoniano em baixas taxas de cisalhamento (onde o fluido se comporta como newtoniano) superestima a velocidade de sedimentação em 11–19 %. Por outro lado, assumir comportamento newtoniano na região de transição, ignorando o cisalhamento induzido pelas partículas, gera diferenças de 8–10 % em relação aos dados experimentais. Modelos reológicos mais completos, como Cross e Carreau, apresentaram maior precisão nas previsões. Isso evidencia que a escolha adequada do modelo reológico é crucial, especialmente para partículas pequenas, onde o comportamento newtoniano predomina.

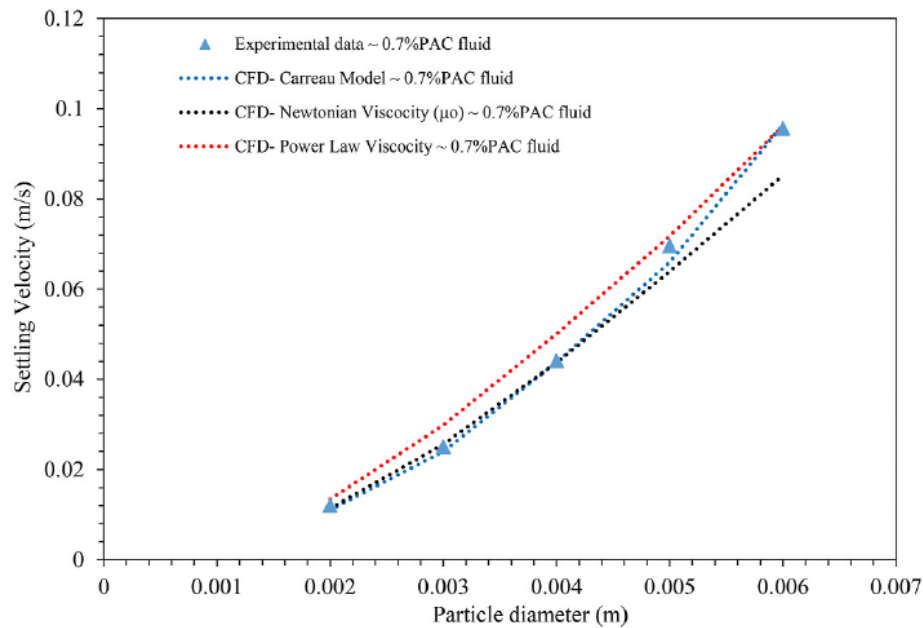


Figura 2.20. Model de CFD validado por meio da comparação com dados experimentais e resultados obtidos a partir da aplicação de modelos de viscosidade Newtoniano e do tipo lei de potência. (Adaptado de AWAD *et al.*, 2021).

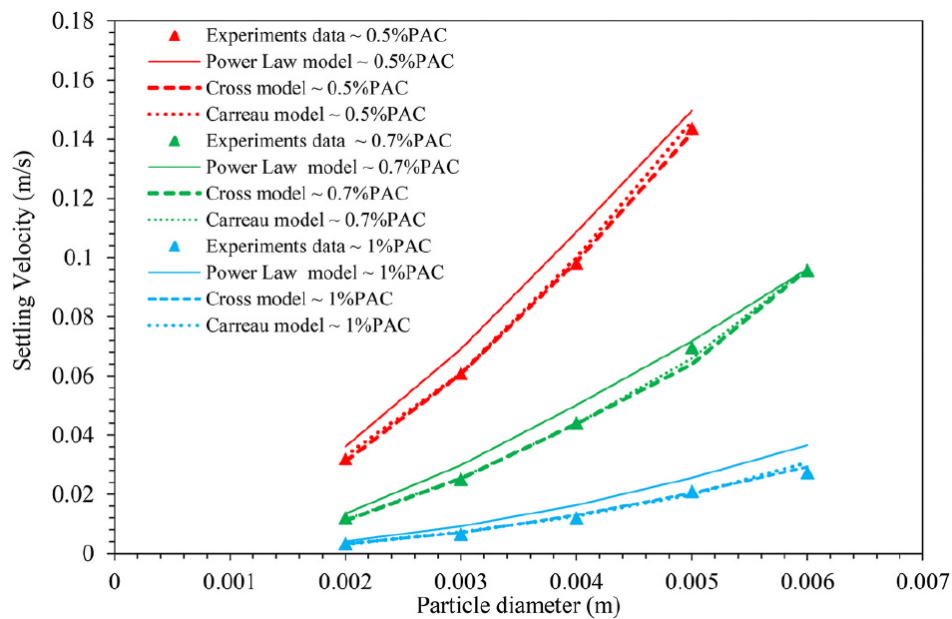


Figura 2.21. Diferença nas velocidades de sedimentação obtidas ao empregar os modelos reológicos de lei de potência, Cross e Carreau os fluidos contendo 0,5% PAC, 0,7% PAC e 1% PAC. (Adaptado de AWAD *et al.*, 2021).

Além disso, partículas elipsoidais apresentaram maior resistência à sedimentação do que partículas esféricas devido ao aumento da força de arrasto, embora sua velocidade terminal aumente com a razão de aspecto. Conforme Figura 2.22, observou-se que partículas com distribuição de tamanho ampla sedimentam até cerca de 32 vezes mais rápido do que aquelas com distribuição estreita.

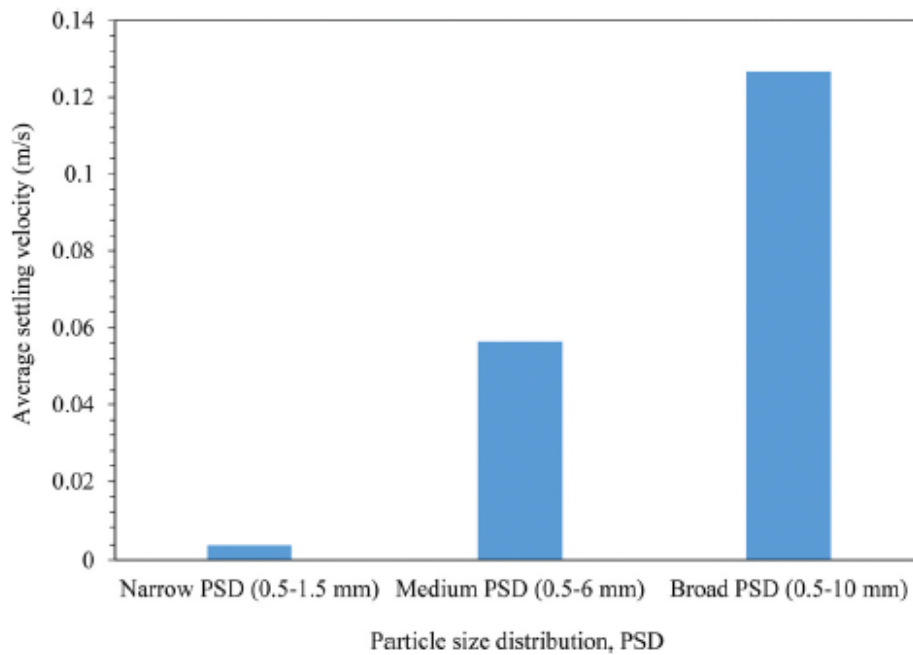


Figura 2.22. Velocidade média adimensional de sedimentação dos cascalhos para as distribuições de tamanho estreita (0,5 – 1,5 mm), média (0,5 – 6 mm) e ampla (0,5 – 10 mm). (Adaptado de AWAD *et al.*, 2021).

Souza (2024) focou em monitorar a concentração de sólidos durante o processo de sedimentação por meio de transmissores de pressão em diferentes alturas de uma coluna de sedimentação. Em seus estudos, construíram-se três unidades distintas de alturas diferentes para a realização dos testes experimentais. Os fluidos empregados foram de base aquosa e utilizavam barita e calcita em diferentes concentrações volumétricas como sólidos adensantes. Como exemplo, a Figura 2.23 ilustra os perfis de concentração obtidos para o experimento contendo 10 % barita em água. No canal 1, CH1, localizado a 120 cm da base da coluna, é possível observar uma rápida queda de partículas a uma velocidade alta. Ao se aproximar de uma hora de teste, observou-se a passagem da interface superior pelo sensor do transdutor de pressão. Além disso, a concentração volumétrica se aproxima de zero, mas não chega a atingir esse valor durante o tempo de sedimentação. Isso ocorre devido à presença de uma camada fina de espuma próxima ao topo da coluna, que permaneceu durante o teste. Essa camada resulta em uma pequena concentração de sólidos nessa região, impedindo que a concentração atinja zero.

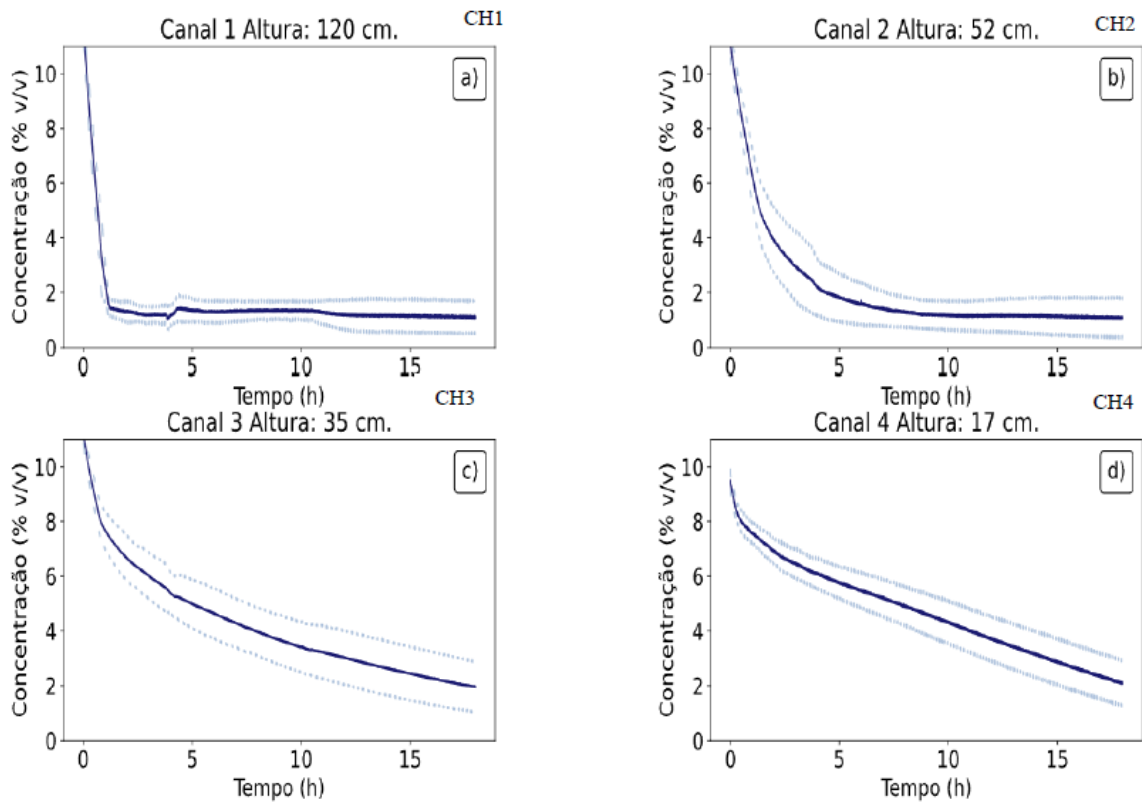


Figura 2.23. Dados de concentração de 10 % de Barita, com a média e o erro padrão. a) CH1 – transmissor 1; b) CH2 – transmissor 2; c) CH3 – transmissor 3; d) CH4 – transmissor 4. (Adaptado de SOUZA., 2024).

Foi possível observar a detecção da passagem da interface superior durante a sedimentação em alguns pontos de medição, especialmente os próximos ao topo da coluna. Os perfis de concentração ao longo da coluna também foram obtidos através do sistema de medidas de pressão, cujos diferenciais de pressão possibilitaram o entendimento da dinâmica de compactação de sólidos nas posições em que as pressões foram medidas. Como consequência direta deste trabalho, a análise da propagação da pressão no sedimento compactado no fundo da coluna foi feita, oferecendo informações sobre transmissibilidade de pressão no meio poroso.

A variação média do diferencial de pressão foi realizada para este teste, Figura 2.24. A leitura do diferencial de pressão entre os canais 1 e 2 (transdutores próximos do topo da coluna) indica uma queda da velocidade de sedimentação em uma hora de teste aproximadamente. Isso ocorreu devido à migração das partículas para a base da coluna assim que o fluido é vertido na coluna, indicando rápidas taxas de sedimentação. A concentração de sólidos inicialmente começa a decair até o momento em que ocorre a passagem da interface descendente pelo ponto em que está localizado o transdutor. Quando a interface atinge o ponto de leitura da pressão, as concentrações de sólidos indicam valores próximos de zero. Entende-se que o comportamento está relacionado a fase contínua da suspensão, assim sendo, a água, que tem uma baixa viscosidade e contribui para a alta taxa de sedimentação na região delimitada.

As linhas em laranja, cujos sensores estão posicionados perto do fundo da coluna, mostram primeiro um crescimento na concentração volumétrica de sólidos na mistura.

Este aumento está associado ao momento em que as partículas chegam à região onde se encontra o transdutor. Passadas cerca de quatro horas, a concentração começa a diminuir. Isso indica que as partículas estão se rearranjando para formar o sedimento, um processo que ainda não atingiu um estado de equilíbrio. A compactação do sedimento que se forma faz com que haja menos sólidos no ponto específico onde a medição é feita. Além disso, em uma etapa mais detalhada da pesquisa, a técnica de utilizar pares de transmissores foi essencial para capturar dados específicos sobre como a sedimentação ocorria em cada local.

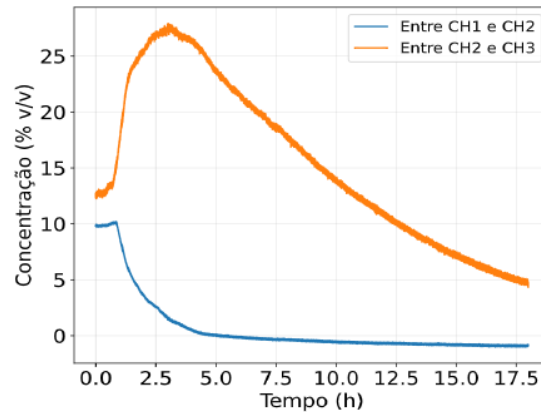


Figura 2.24. Evolução da concentração por diferencial de pressão para a concentração volumétrica de 10 % (Adaptado de SOUZA., 2024).

A investigação da sedimentação por análise da pressão mostrou que em concentrações elevadas a taxa de sedimentação é reduzida por conta da interação das partículas, influenciando no processo.

2.4 Método dos volumes finitos

Um método de discretização das coordenadas espaciais empregado na solução de modelos baseados nas leis de conservação, que dão origem a Equações Diferenciais Parciais (EDP's,) é o Método dos Volumes Finitos (MVF). Segundo Eymard *et al.* (2000), o método conta com a conservação local dos fluxos numéricos das grandezas conservativas, uma vez que é baseado no balanço da grandeza conservativa. O método consiste em dividir o domínio em volumes de controle, conforme Figura 2.25, em que o fluxo grandeza é conservado de um volume para o seu vizinho.

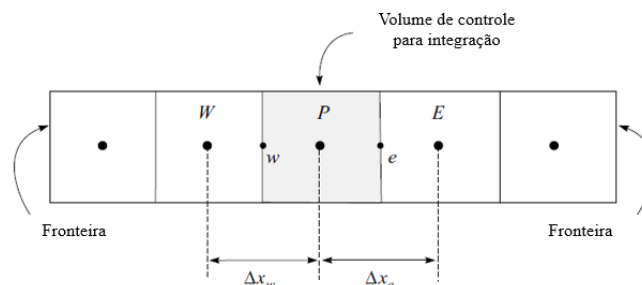


Figura 2.25. Volumes de controle unidimensionais (Adaptado de MALISKA., 2023).

O valor da propriedade de interesse é calculado em seu centro P , em que este valor é considerado como um valor médio representativo daquele volume. O MVF se aplica às leis de conservação de qualquer propriedade. Sendo assim, sua utilização é adequada para leis de conservação de caráter hiperbólico, parabólico ou elíptico (EYMARD; GALLOUËT; HERBIN, 2000).

Muitos campos da engenharia como a engenharia de petróleo, a mecânica dos fluidos, transferência de calor e massa fazem uso desta técnica numérica (muito utilizada em softwares comerciais) na resolução de suas equações (EYMARD; GALLOUËT; HERBIN, 2000)

Fudihara (2000), em seu estudo de modelagem matemática, empregou o MVF por meio de um código fluido-dinâmico computacional com variáveis co-localizadas em coordenadas generalizadas para a obtenção das soluções das equações de transporte. O alvo de estudo foram fenômenos complexos de transferência de massa, momento e energia em fornos com jatos de escoamento em vórtice em configurações bidimensionais e tridimensionais.

Muniz (2003) utilizou o método para a resolução das equações governantes do escoamento de fluidos viscoelásticos. Fez uso de aproximações de alta ordem para os fluxos médios lineares e não-lineares e para outros termos não lineares que surgem da discretização das equações constitutivas. Utilizou-se o método de Newton para a solução do sistema de equações não lineares, resultante da discretização pelo MVF. O autor aplicou a metodologia em problemas envolvendo escoamentos de fluidos newtonianos e fluidos viscoelásticos.

No tema da modelagem matemática voltada à sedimentação de sólidos adensantes em fluidos de perfuração, o método continua sendo aplicada na resolução das equações governantes em pesquisas recentes.

Motta *et al.* (2024) continuaram o trabalho de Rocha *et al* (2020) considerando os efeitos de temperatura na sedimentação de fluidos de perfuração expostos a gradientes geotérmicos enquanto estão confinados em anulares. O modelo contínuo desenvolvido para fluidos não-Newtonianas é baseado na Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo, resolvido pelo Método dos Volumes Finitos e resultados das simulações foram obtidos para diferentes temperaturas para 5 anos, conforme Figura 2.26, onde é notável que o gradiente de temperatura influencia na velocidade de sedimentação. Neste trabalho, uma correção no índice de consistência da suspensão foi feita para considerar os efeitos de temperatura na velocidade de sedimentação dos sólidos adensantes.

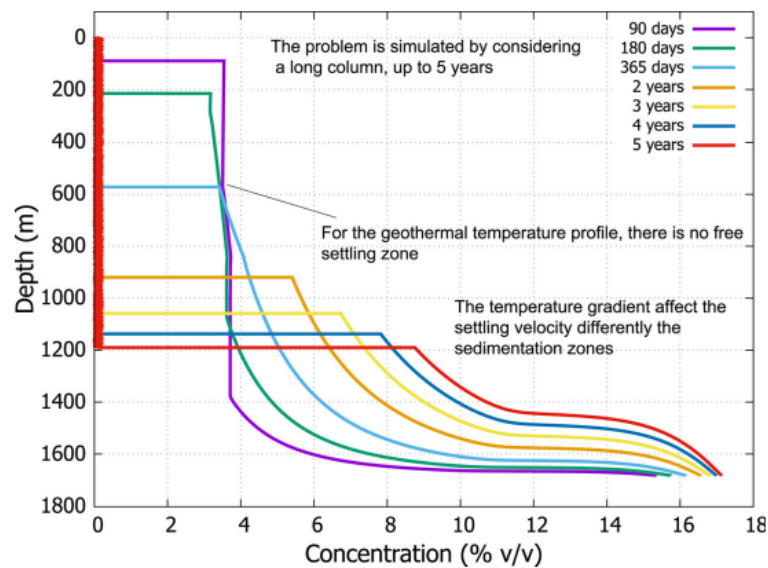


Figura 2.26. Perfis de concentração volumétrica de sólidos para diferentes temperaturas (Adaptado de MOTTA *et al.*, 2024.).

As zonas de sedimentação livre e de compactado são as que mais sofreram influencia dos gradientes geotérmicos, alterando consequentemente a altura do sedimento, o que por sua vez influencia parâmetros de interesse de aplicações em poços de petróleo.

Sharma *et al.* (2024) estudaram a sedimentação de partículas sólidas de diferentes tamanhos em uma polpa não-Newtoniana dentro de um canal aberto semicircular. Os autores apresentam um modelo matemático tridimensional transiente Euleriano-Euleriano (E-E), resolvido numericamente pelo método dos volumes finitos, por meio do software comercial *ANSYS Fluent Solver 2020 R2*. Na modelagem matemática, considerou-se cada fase como meio contínuo, em que a equação da continuidade e do movimento são resolvidas para cada uma delas, e para a considerar a reologia do fluido, utilizou-se modelo reológico de Herschel-Bulkley (HB).

O modelo matemático foi validado por dados experimentais da literatura, conforme Figura 2.27, se mostrando adequado aos dados experimentais.

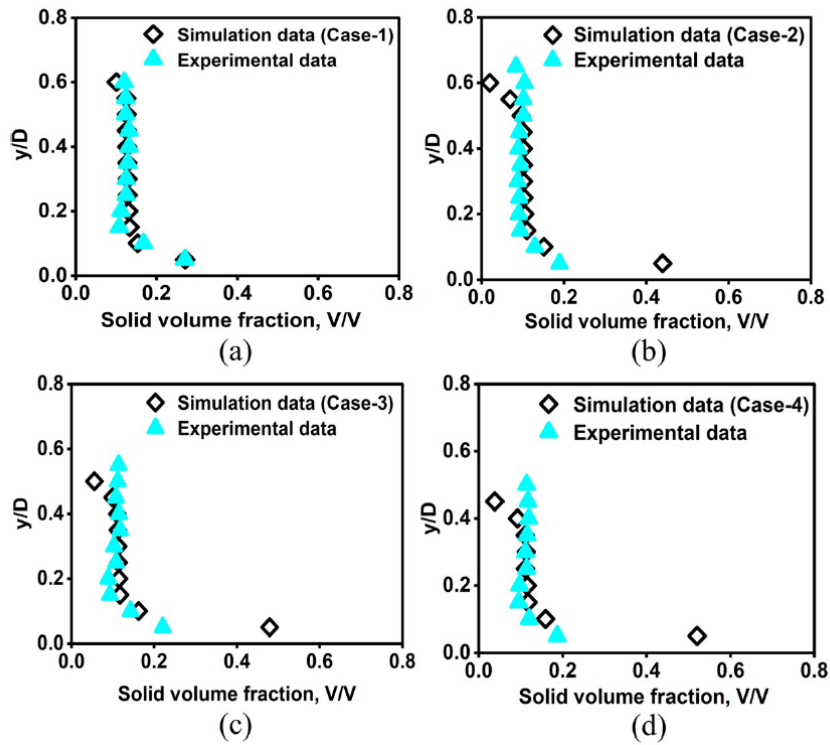


Figura 2.27. Comparação de concentração volumétrica de sólidos prevista e experimental em diferentes casos para um diâmetro médio de μm (Adaptado de SHARMA *et al.*, 2024.).

O modelo validado é então utilizado para simular o comportamento de sedimentação da polpa no canal em diferentes inclinações, conforme Figura 2.28. Os resultados revelaram que a sedimentação dos sólidos é significativamente afetada pelas distribuições de tamanho de partículas em sistemas de canal aberto. O aumento da inclinação do canal favoreceu a sedimentação e a dissipação das partículas finas e grossas.

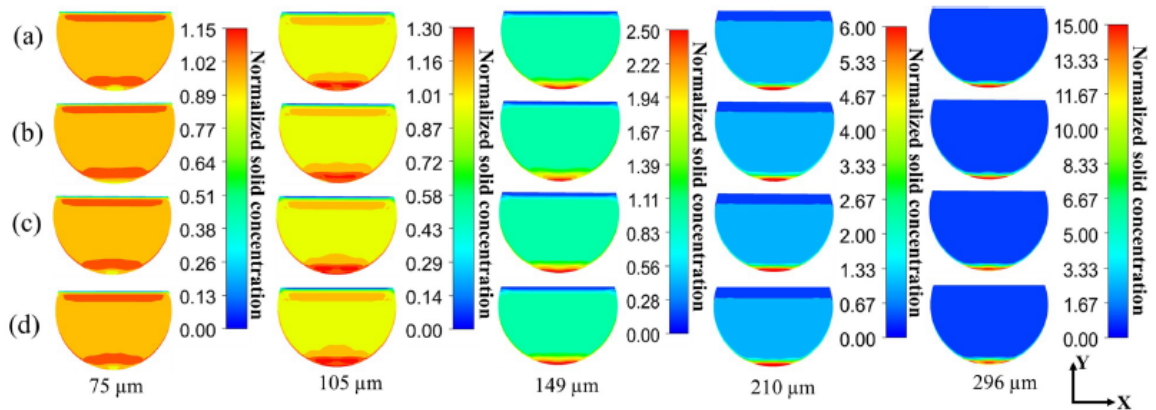


Figura 2.28. Distribuição da concentração de sólidos sobre a seção transversal a $14.5 m$ da entrada para diferentes tamanhos de partícula e inclinações à velocidade de bulk igual a $0,41 m/s$. (Adaptado de SHARMA *et al.*, 2024.).

O estudo apresentado pode ser utilizado como uma diretriz valiosa para a otimização da remoção intermediária de água de polpas adensadas, a fim de garantir a estabilidade de instalações de armazenamento de rejeitos.

Como foi visto, muitos trabalhos da sedimentação foram realizados no contexto na modelagem matemática do fenômeno. A tentativa de representar o comportamento fenomenológico tem sido tratada como unidimensional nos trabalhos mais recentes. Ainda não há registros na literatura recente da modelagem matemática bidimensional da sedimentação de sólidos adensantes em fluidos de perfuração. Nesse contexto, a proposta de um modelo bidimensional para este fenômeno é recente, permitindo considerar os efeitos de deslocamento horizontal dos sólidos sedimentando em anulares com presença de degrau em seu interior.

CAPÍTULO II

METODOLOGIA

3 CAPÍTULO II: Metodologia

RESUMO

Este capítulo aborda a metodologia experimental empregada no desenvolvimento deste trabalho, abordando a padronização da barita, sua caracterização física e granulométrica, bem como a descrição do fluido não-Newtoniano e dos sedimentadores utilizados nos experimentos. São apresentados os procedimentos adotados para obtenção dos dados reológicos do fluido e a realização dos experimentos nos sedimentadores bidimensionais. O modelo matemático bidimensional desenvolvido para a descrição do fenômeno de sedimentação é também apresentado nesta seção, junto com suas hipóteses simplificadoras, equações fenomenológicas que o compõem e sua resolução numérica pelo Método das Linhas, com a discretização espacial realizada via Volumes Finitos (Upwind). Para a integração temporal, utilizou-se o método de Runge-Kutta de 5ª ordem com controle de passo de Dormand-Prince, implementado através da subrotina DOPRI5. Esta seção aborda também como é realizada a estimação dos parâmetros do modelo reológico e das equações constitutivas do modelo bidimensional da sedimentação neste trabalho, abordando os conceitos da análise estatística empregados. Este procedimento, por sua vez, permite avaliar a adequação do modelo aos dados experimentais, além de permitir sua validação, bem como verificar incertezas associadas aos parâmetros estimados, seus intervalos de confiança, a qualidade do ajuste aos dados experimentais e das previsões do modelo.

Palavras-chave: reologia, fluido de perfuração, análise estatística, sedimentadores, volumes finitos.

3.1 Material e métodos

Neste trabalho, uma série de experimentos foram realizados a fim de coletar a altura da interface superior decaindo ao longo do tempo em uma suspensão em sedimentação. Consideraram-se três diferentes casos de contração do anular dentro do sedimentador 2D. A seguir, estão apresentados os materiais, os procedimentos experimentais e o fluido utilizado no experimento.

- Materiais

Três sedimentadores bidimensionais distintos foram utilizados, cujas dimensões do recipiente e do degrau estão apresentadas na Figura 3.1.

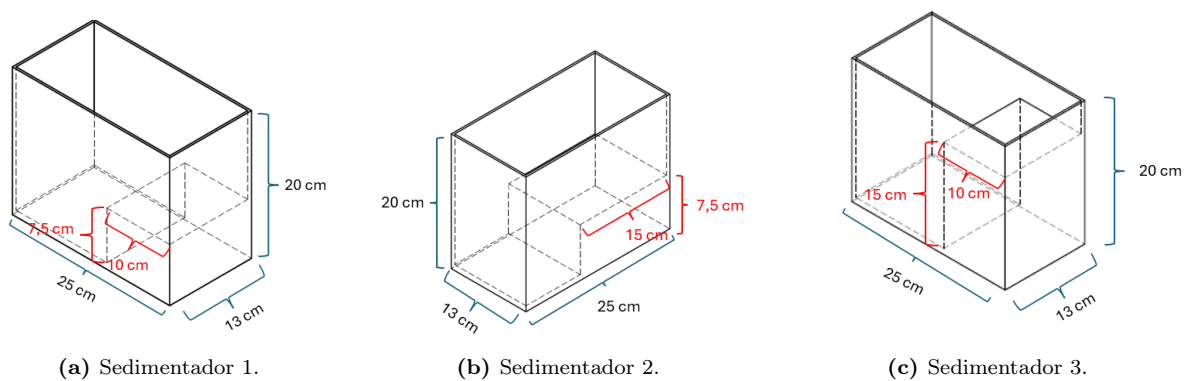


Figura 3.1. Conjunto de sedimentadores utilizados.

Estes sedimentadores representam em escala de bancada a configuração em que há contração do diâmetro do anular para avaliar a dinâmica de sedimentação nestes casos. Vale a pena ressaltar que o modelo bidimensional da sedimentação, que será apresentado, considera um corte da seção longitudinal do anular e, por isso, vasos sedimentadores retangulares como os da Figura 3.1 satisfazem experimentalmente esta situação. Todos os recipientes possuem 25 cm de largura, 13 cm de profundidade e 20 cm de altura. O Sedimentador 1 possui um ressalto com altura igual a 7,5 cm e largura 10 cm, o sedimentador 2, por sua vez, também possui uma altura de 7,5 cm, porém sua largura é de 15 cm, e o sedimentador 3 possui o degrau mais alto entre os três, possuindo 15 cm de altura e 10 cm de largura. Todos os estes recipientes são feitos de vidro comum com espessura de 6 mm.

Para a obtenção dos dados reológicos do fluido, o viscosímetro Fann modelo 35, ilustrado na Figura 3.2 foi empregado. Este equipamento é muito utilizado para análise de fluidos de perfuração de poços de petróleo e em outras aplicações industriais e de pesquisa. Por meio dele, propriedades reológicas de fluidos como tensão de cisalhamento, viscosidade aparente e limites de escoamento podem ser obtidas. Durante seu funcionamento, o fluido se encontra entre dois cilindros concêntricos, em que o externo gira enquanto registra o torque no interno a partir de ângulo de deflexão, que é convertido para tensão de cisalhamento (Fann Instrument Company, 2026).



Figura 3.2. Viscosímetro Fann Model 35A.

Uma balança de lama Fann 140, Figura 3.3, foi utilizada para medir a densidade dos fluidos preparados. Este equipamento permite obter de forma simples e prática a densidade de fluidos de perfuração. É um instrumento de campo, muito sensível e preciso, sendo capaz de determinar a densidade ou peso por unidade de volume (gravidade específica) de fluidos. Sua vantagem principal é que a leitura de suas medidas não é afetada pela temperatura da amostra. Além disso, possui uma caixa feita de material plástico, que protege a balança durante o transporte e promove uma base segura para trabalhar (FANN, 2025). A densidade da suspensão preparada neste trabalho foi obtida em triplicata durante a realização dos experimentos e seu valor médio está avaliado em $1,26 \pm 0,06 \text{ g/cm}^3$.



Figura 3.3. Balança de lama Fann 140.

Um misturador IKA® EuroStar 60 Digital foi utilizado no preparo dos fluidos deste

trabalho, conforme Figura 3.4.



Figura 3.4. Misturador e pá utilizada no preparo dos fluidos.

- Padronização da amostra

Iniciou-se o preparo do material adensante (Barita - BRASILMINAS) com o quarteamo do mineral. O tipo de pilha utilizada no quarteamo foi do tipo cônica, que permite obter boa homogeneização do material. Nesta configuração, a pilha é dividida em quatro setores iguais. Em seguida, o quarteamo é feito formando duas pilhas novas. Como foi necessário dividir ainda mais a amostra, utilizou-se uma destas pilhas para repetir o procedimento (LUZ; SAMPAIO; FRANÇA, 2010).

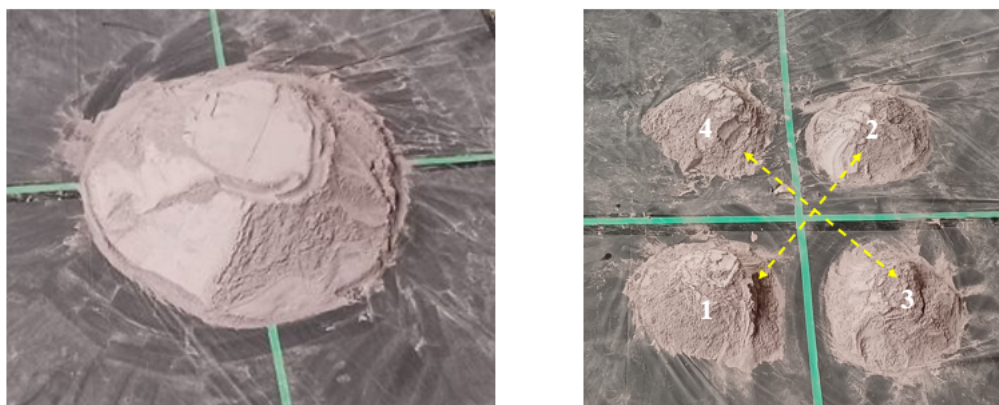


Figura 3.5. Quarteamo da Barita.

Conforme Figura 3.5, a pilha inicial (Pilha maior à esquerda) foi dividida em quatro pilhas menores aproximadamente iguais. As pilhas 3 e 4 foram unidas para dar continuidade ao quarteamo e as pilhas 1 e 2 foram unidas e alocadas em um recipiente para armazenar a barita. Este procedimento continua, de tal forma que a pilha formada pela união das pilhas 3 e 4 é repartida em mais 4 pilhas menores de tamanho aproximado. Este procedimento foi

repetido por mais 3 vezes para que uma amostra representativa do todo fosse obtida e sua completa caracterização quanto à distribuição granulométrica e picnometria ser realizada.

- Caracterização da amostra

A distribuição granulométrica dos sólidos empregados foi obtida com o auxílio do Malvern Panalytical Mastersizer 3000, conforme Figura 3.6. Este equipamento conta com soluções digitais e inteligência artificial que auxiliam na tomada de decisão, além de fornecer dados robustos e consistentes do tamanho e distribuições granulométricas de partículas. Seu funcionamento conta com o uso de difração a laser, permitindo aferir o tamanho das partículas e distribuição de tamanhos de seus materiais (MALVERN PANALYTICAL, 2025).



Figura 3.6. Malvern Panalytical Mastersizer 3000.

cujas distribuição granulométrica da barita usada neste trabalho é apresentada na Figura 3.7,

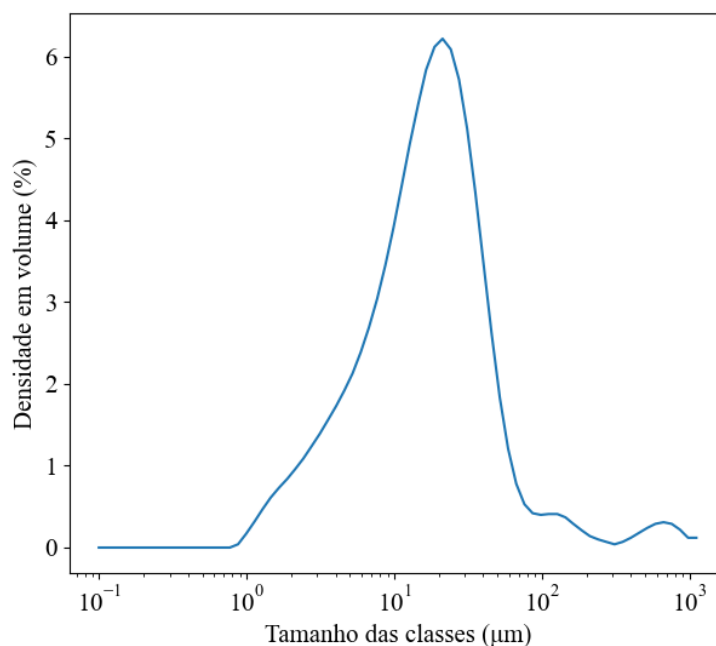


Figura 3.7. Distribuição granulométrica da Barita utilizada obtida com Malvern Panalytical Mastersizer 3000.

que permitiu obter o diâmetro médio volumétrico de partícula (d_{50}), que foi utilizado nas simulações deste trabalho, uma vez que a sedimentação não é governada pela área superficial das partículas, como ocorre em processos de transferência de calor ou de massa. O valor do diâmetro médio foi obtido a 3500 rpm no valor de $18,1 \mu m$, o que significa que metade do volume da sua amostra é feita de partículas menores que $18,1 \mu m$ e a outra metade, de partículas maiores.

Para obter a densidade da Barita, realizou-se a picnometria da amostra com o picnômetro com termômetro da VIDROLABOR, conforme Figura 3.8.

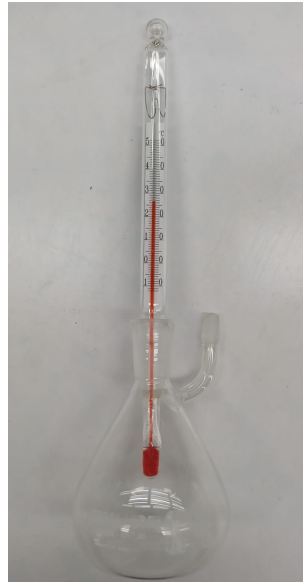


Figura 3.8. Picnômetro com termômetro utilizado para obter a densidade da Barita.

Para calcular a densidade do material, a Equação 3.1 foi empregada, onde m_{ps} , m_p , m_{psl} e m_{pl} são as massas do picnômetro com sólidos, do picnômetro vazio, do picnômetro com sólidos e água, e do picnômetro preenchido somente com água, nesta ordem, e as massas obtidas estão mostradas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1. Dados da picnometria para determinação da densidade dos sólidos.

Descrição	Ensaio 1	Ensaio 2	Ensaio 3
m_p (g)	51,03	51,03	51,04
m_{pl} (g)	151,33	151,25	151,23
m_{ps} (g)	61	61,01	61,1
m_{pls} (g)	158,17	158,23	158,26
ρ (g/cm ³)	3,19	3,33	3,32
Média de ρ (g/cm³)	3,28 $\pm$0,16		
ρ_{H_2O} (g/cm ³)	1		

$$\rho_s = \frac{(m_{ps} - m_p)}{(m_{ps} - m_p) - (m_{psl} - m_{pl})} \rho_{H_2O}. \quad (3.1)$$

A aferição das massas foi realizada três vezes na balança analítica SHIMADZU, conforme ilustrado na Figura 3.9, de tal forma que a picnometria foi feita em triplicata, com a

temperatura média da suspensão em torno de 25,6 °C. A densidade da água foi utilizada como densidade de referência (1 g/cm³). Dessa forma, a média das densidades da Barita foi avaliada em $3,28 \pm 0,16$ g/cm³.



Figura 3.9. Balança analítica Shimadzu.

- Procedimento experimental de sedimentação

Três vasos sedimentadores foram utilizados para a realização dos experimentos. Uma triplicata da suspensão foi preparada, sendo três testes de sedimentação feitos no vaso sedimentador 1, que foi escolhido para obter os erros experimentais. Os dados experimentais foram utilizados para realizar a estimação dos parâmetros da equação da permeabilidade do meio, Equação 3.14, e do gradiente de pressão nos sólidos, Equação 3.7. A mesma formulação de fluido foi empregada em todos os demais sedimentadores. Dessa forma, três amostras deste fluido foram preparadas para a obtenção de dados reológicos usando o viscosímetro para posterior estimação dos parâmetros do modelo Power-Law. Os resultados das estimações dos parâmetros serão mostrados na seção de resultados e discussões.

A formulação da suspensão utilizada se trata de um fluido base água com 10 % v/v de Barita e uma concentração de 1,43 g/L de goma xantana. Água destilada e goma xantana a 1,43 g/L foram agitados no misturador IKA® EuroStar 60 Digital por 30 minutos a 450 rpm e deixados descansar vedados no recipiente por 24 horas. Após isso, a mistura de goma e água foi agitada por 10 minutos a 400 rpm, em seguida a Barita foi adicionada à mistura e deixados agitar a 450 rpm por mais 30 minutos e, após isso, o experimento é iniciado. A quantidade preparada de fluido foi suficiente para a utilizar o restante da suspensão para obtenção de sua densidade com a balança de lama.

A partir dos dados da granulometria, da picnometria e da utilização da balança de lama, a suspensão utilizada nos experimentos possui a formulação conforme a Tabela 3.2, preparada para ter uma concentração volumétrica inicial de sólidos de 10 % (v/v).

Tabela 3.2. Fluido base água utilizado nos experimentos.

Componentes	Quantidade	Unidade
Barita	10	% (v/v)
Goma Xantana	1,43	g/L
Densidade dos sólidos (ρ_s)	$3,28 \pm 0,16$	g/cm ³
Densidade da suspensão (ρ_{susp})	$1,26 \pm 0,06$	g/cm ³
Diâmetro de partículas (dp)	18,1	μm

Os fluidos em sedimentação nas regiões anulares de poços de petróleo são não-Newtonianos e os sólidos que o adensam demoram anos para sedimentar, sendo um tempo longo demais para observação do fenômeno e validação experimental em termos de bancada de laboratório. Dessa forma, a formulação de fluido empregada neste trabalho garante um comportamento não-Newtoniano, porém com tempo de sedimentação suficiente para visualização da formação do compactado em escala de bancada. Assim, no decorrer do experimento, valores de altura da interface superior do fluido em sedimentação são coletados na posição acima e também afastada do degrau. As alturas são coletadas ao longo do tempo na extremidade esquerda (afastada do degrau) e direita (acima do degrau) de cada vaso sedimentador. Em termos de estimação de parâmetros do modelo da sedimentação, os dados de alturas de interface longe do degrau foram escolhidos para realizar a estimação, de tal forma que as alturas acima do degrau deverão ser preditas pelo modelo fazendo uso destes parâmetros estimados.

3.2 Modelo matemático bidimensional

O modelo bidimensional da sedimentação de sólidos adensantes em fluidos de perfuração é apresentado a seguir. Este modelo retrata um corte da seção longitudinal da região anular, que possui simetria axial. Dessa forma, optou-se por coordenadas cartesianas para o domínio do problema sem prejuízo da utilização de coordenadas cilíndricas, o que torna o equacionamento mais simples. Foram utilizadas as mesmas hipóteses de Rocha *et al* (2020) na elaboração do modelo, sendo composto pela equação da continuidade e do movimento para os sólidos presentes no fluido.

Equação da continuidade:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon_s v_s)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon_s v_s)}{\partial y} = 0, \quad (3.2)$$

Equação do movimento:

$$0 = \left[\frac{\partial \tau_{xx,s}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx,s}}{\partial y} \right] + m_x + \varepsilon_s(\rho_s - \rho_l)g_x, \quad (3.3)$$

$$0 = \left[\frac{\partial \tau_{xy,s}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy,s}}{\partial y} \right] + m_y + \varepsilon_s(\rho_s - \rho_l)g_y. \quad (3.4)$$

Nestas expressões, ε_s , v_{sx} , v_{sy} são, respectivamente, a concentração volumétrica de sólidos e as velocidades dos sólidos na direção x e y . A tensão nos sólidos é $\tau_{ij,s}$, que está atuando no plano perpendicular ao eixo i e na direção do eixo j , enquanto que m_k é a força resistiva na direção $k = x$ ou y , ρ_s e ρ_l são as densidades das fases sólida e

líquida, nesta ordem e, por fim, g_x e g_y são as acelerações da gravidade nas direções x e y , respectivamente, em que g_x é nulo.

A parcela dinâmica do tensor tensão nos sólidos é considerada função da porosidade do meio, assim como D'Ávila (1978). Por meio das Equações 2.15 e 2.16, tem-se que $\tau_{yx,s}$ e $\tau_{xy,s}$ do tensor Ts são nulos. Assim, o tensor tensão passa a ser interpretado como uma pressão efetiva, P_s , conforme Equação 2.16, sendo composto somente por componentes que são normais à superfície dos sólidos. Assim, a partir desta equação, as Equações 3.3 e 3.4, ao aplicar a regra da cadeia, se tornam,

$$0 = -\frac{dP_s}{d\varepsilon_s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} + m_x + \varepsilon_s(\rho_s - \rho_l)g_x, \quad (3.5)$$

$$0 = -\frac{dP_s}{d\varepsilon_s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial y} + m_y + \varepsilon_s(\rho_s - \rho_l)g_y. \quad (3.6)$$

A Equação 3.7 se trata do gradiente de pressões nos sólidos, reescrita a seguir para facilitar o entendimento,

$$\frac{dP_s}{d\varepsilon_s} = \frac{P_{sref}\beta}{\varepsilon_s^2} \exp \left[-\beta \left(\frac{1}{\varepsilon_s} - \frac{1}{\varepsilon_{sref}} \right) \right], \quad (3.7)$$

em que P_{sref} é a pressão dos sólidos em uma concentração de referência ε_{sref} e β é um parâmetro que precisa ser estimado. Neste trabalho, considera-se a multiplicação dos parâmetros P_{sref} e β iguais a um único parâmetro A .

O termo da força resistiva (m_k) das Equações 3.5 e 3.6, de acordo com Rocha *et al* (2020), que quantifica a interação sólido-líquido na direção do escoamento,

$$m_k = \frac{1}{K} \left(\frac{\tau(\lambda^*)}{\lambda^*} \right) \left(1 - \frac{\rho_s \varepsilon_{s0}}{\rho_{susp}} \right) \varepsilon U_k. \quad (3.8)$$

Nesta equação, passam a ser consideradas a porosidade do meio, ε , a velocidade relativa entre as fases da mistura, U , a permeabilidade local do meio, K , e a taxa de cisalhamento característica, $\dot{\gamma}$. Como a porosidade está diretamente relacionada à concentração de sólidos por meio da relação $\varepsilon = 1 - \varepsilon_s$, e considerando que a componente da velocidade relativa na direção y é definida conforme a Equação 3.9, conforme apresentado por Rocha *et al.* (2020), as forças resistivas nas direções x e y podem ser descritas por

$$U_y = -\frac{v_s}{(1 - \varepsilon_s)}, \quad (3.9)$$

$$m_x = \frac{1}{K} \left(\frac{\tau(\dot{\gamma})}{\dot{\gamma}} \right) \left(1 - \frac{\rho_s \varepsilon_{s0}}{\rho_{susp}} \right) \varepsilon v_{s,x}, \quad (3.10)$$

$$m_y = \frac{1}{K} \left(\frac{\tau(\dot{\gamma})}{\dot{\gamma}} \right) \left(1 - \frac{\rho_s \varepsilon_{s0}}{\rho_{susp}} \right) \varepsilon v_{s,y}. \quad (3.11)$$

Estas relações, quando substituídas nas Equações 3.5 e 3.6, permitem a obtenção do campo de velocidades dos sólidos conforme

$$v_{s,x} = \frac{K}{\left(\frac{\tau(\dot{\gamma})}{\dot{\gamma}} \right)} \left(\frac{\rho_{susp}}{\rho_{susp} - \rho_s \varepsilon_{s0}} \right) \left[\varepsilon_s(\rho_s - \rho_l)g_x - \frac{dP_s}{d\varepsilon_s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} \right], \quad (3.12)$$

$$v_{s,y} = \frac{K}{\left(\frac{\tau(\dot{\gamma})}{\dot{\gamma}}\right)} \left(\frac{\rho_{susp}}{\rho_{susp} - \rho_s \varepsilon_{s0}} \right) \left[\varepsilon_s (\rho_s - \rho_l) g_y - \frac{dP_s}{d\varepsilon_s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial y} \right]. \quad (3.13)$$

As expressões para a permeabilidade local do meio, para a taxa de cisalhamento característica e para o modelo reológico da suspensão não-Newtoniana, $\left(\frac{\tau(\dot{\gamma})}{\dot{\gamma}}\right)$ são equações constitutivas do problema. Este trabalho fez uso da abordagem clássica de Kozeny-Carman, Equação 3.14, expressão para a obtenção da permeabilidade do meio, sendo dependente do diâmetro médio de partícula, d_P , fração volumétrica de sólidos, ε_s , e esfericidade das partículas, ϕ . A equação também conta com um parâmetro estrutural, B , cuja estimação é abordada neste trabalho.

$$K = \frac{(d_P \phi)^2 (1 - \varepsilon_s)^3}{36 B \varepsilon_s^2}. \quad (3.14)$$

A taxa de cisalhamento característica, por sua vez, foi definida a partir da abordagem de Massarani e Telles (1978), de tal forma que essa grandeza cinemática depende do diâmetro e da forma das partículas, e também do campo de velocidades atuante no sistema, neste caso, nas direções horizontal (x) e vertical (y). O campo de velocidades é representado pela norma da velocidade relativa entre o fluido e os sólidos, conforme Equação 3.16, em que se adota o sistema de coordenadas cartesianas. A partir da restrição cinemática proposta por D'Ávila, apresentada na Equação 3.15, obtém-se a norma da velocidade relativa da mistura ($\|U\|$) para um escoamento bidimensional nas direções x e y , conforme

$$\varepsilon_s v_s + (1 - \varepsilon_s) v_f = 0, \quad (3.15)$$

$$\|U\| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}, \quad (3.16)$$

$$U = \sqrt{U_x^2 + U_y^2} = \sqrt{\frac{1}{(1 - \varepsilon_s)^2} (v_{s,x}^2 + v_{s,y}^2)} = \frac{1}{(1 - \varepsilon_s)} \sqrt{v_{s,x}^2 + v_{s,y}^2}. \quad (3.17)$$

A substituição destas equações na proposta de Massarani e Telles (1978) fornece a expressão para a taxa de cisalhamento característica utilizada neste trabalho sendo

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{(1 - \varepsilon_s)} \sqrt{v_{s,x}^2 + v_{s,y}^2} \frac{\psi(\phi)}{d_p}, \quad (3.18)$$

em que $\psi(\phi)$ é dada pela Equação 2.33, cuja esfericidade, ϕ , adotada neste trabalho é 0,8, contida do intervalo de 0,5 a 1,0, conforme Laruccia (1990).

O comportamento reológico do fluido adotado segue o modelo Power-Law, assim como Rocha *et al* (2020) e descreve o comportamento pseudoplástico destes fluidos. Considerando a taxa de cisalhamento característica adotada na Equação 3.18, a viscosidade aparente da suspensão passa a ser influenciada pela presença da fase dispersa através do campo de velocidade dos sólidos, da fração volumétrica de sólidos, pelo tamanho e a forma das partículas, de acordo com a Equação 3.19, em que M e n são os índices de consistência e de comportamento do fluido, respectivamente.

$$\left(\frac{\tau(\dot{\gamma})}{\dot{\gamma}}\right) = M \left[\frac{1}{(1 - \varepsilon_s)} \sqrt{v_{s,x}^2 + v_{s,y}^2} \frac{\psi(\phi)}{d_p} \right]^{n-1}. \quad (3.19)$$

Com a substituição da Equação 3.19 nas Equações 3.12 e 3.13, as equações resultantes utilizadas no cômputo do campo de velocidades para o modelo bidimensional da sedimentação é representada por

$$v_{s,x}(v_{s,x}^2 + v_{s,y}^2)^{\frac{1}{2}(n-1)} = \frac{K}{M(1-\varepsilon_s)^{1-n}} \left[\frac{d_p}{\Psi(\phi)} \right]^{n-1} \left(\frac{\rho_{\text{susp}}}{\rho_{\text{susp}} - \rho_s \varepsilon_{s0}} \right) \left[\varepsilon_s(\rho_s - \rho_l)g_x - \frac{dP_s}{d\varepsilon_s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} \right], \quad (3.20)$$

$$v_{s,y}(v_{s,x}^2 + v_{s,y}^2)^{\frac{1}{2}(n-1)} = \frac{K}{M(1-\varepsilon_s)^{1-n}} \left[\frac{d_p}{\Psi(\phi)} \right]^{n-1} \left(\frac{\rho_{\text{susp}}}{\rho_{\text{susp}} - \rho_s \varepsilon_{s0}} \right) \left[\varepsilon_s(\rho_s - \rho_l)g_y - \frac{dP_s}{d\varepsilon_s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial y} \right]. \quad (3.21)$$

A partir das Equações 3.20 e 3.21 é possível isolar o campo de velocidades em cada direção, facilitando a solução deste sistema de equações e a implementação computacional, já que não precisará de um método numérico como Newton-Raphson, por exemplo, para a sua solução. Sejam as funções $G_y(\varepsilon_s)$ e $G_x(\varepsilon_s)$ iguais aos termos do lado direito das Equações 3.20 e 3.21, respectivamente. Dividindo-se a Equação 3.20 pela Equação 3.21, as seguintes relações são obtidas,

$$\frac{\frac{K}{M(1-\varepsilon_s)^{1-n}} \left[\frac{d_p}{\Psi(\phi)} \right]^{n-1} \left(\frac{\rho_{\text{susp}}}{\rho_{\text{susp}} - \rho_s \varepsilon_{s0}} \right) \left[\varepsilon_s(\rho_s - \rho_l)g_x - \frac{dP_s}{d\varepsilon_s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} \right]}{\frac{K}{M(1-\varepsilon_s)^{1-n}} \left[\frac{d_p}{\Psi(\phi)} \right]^{n-1} \left(\frac{\rho_{\text{susp}}}{\rho_{\text{susp}} - \rho_s \varepsilon_{s0}} \right) \left[\varepsilon_s(\rho_s - \rho_l)g_y - \frac{dP_s}{d\varepsilon_s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial y} \right]} = \frac{G_x(\varepsilon_s)}{G_y(\varepsilon_s)}, \quad (3.22)$$

$$\frac{v_{s,x}(v_{s,x}^2 + v_{s,y}^2)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{v_{s,y}(v_{s,x}^2 + v_{s,y}^2)^{\frac{1}{2}(n-1)}} = \frac{G_x(\varepsilon_s)}{G_y(\varepsilon_s)}. \quad (3.23)$$

Como do lado esquerdo da Equação 3.23 o termo $(v_{s,x}^2 + v_{s,y}^2)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ se repete no numerador e no denominador da fração, o campo de velocidades na direção x pode ser isolado da seguinte forma,

$$v_{s,x} = v_{s,y} \frac{G_x(\varepsilon_s)}{G_y(\varepsilon_s)}. \quad (3.24)$$

Substituindo a Equação 3.24 na Equação 3.20, obtém-se,

$$v_{s,y} \frac{G_x(\varepsilon_s)}{G_y(\varepsilon_s)} \left\{ (v_{s,y})^2 \left[\frac{G_x(\varepsilon_s)}{G_y(\varepsilon_s)} \right]^2 + v_{s,y}^2 \right\}^{\frac{1}{2}(n-1)} = G_x(\varepsilon_s), \quad (3.25)$$

que ao ser manipulada para isolar $v_{s,x}$ resulta em,

$$v_{s,x} = \left[\frac{G_x(\varepsilon_s)}{G_y(\varepsilon_s)} \right] \left\{ \frac{G_y(\varepsilon_s)}{\left\{ 1 + \left[\frac{G_x(\varepsilon_s)}{G_y(\varepsilon_s)} \right]^2 \right\}^{\frac{n-1}{2}}} \right\}^{\frac{1}{n}}. \quad (3.26)$$

Para obter o campo de velocidades na direção y, a Equação 3.20 pode ser substituída na Equação 3.24, obtendo-se

$$v_{s,y} = \left\{ \frac{G_y(\varepsilon_s)}{\left\{ 1 + \left[\frac{G_x(\varepsilon_s)}{G_y(\varepsilon_s)} \right]^2 \right\}^{\frac{n-1}{2}}} \right\}^{\frac{1}{n}}. \quad (3.27)$$

Dessa forma, a partir da equação do movimento em suas componentes x e y , Equações 3.3 e 3.4, respectivamente, foi possível obter os campos de velocidades nestas direções, Equações 3.29 e 3.30, que serão utilizados para computar os fluxos de sólidos presentes na equação da continuidade para as duas direções. A seguir, está resumido todo o equacionamento e as condições de contorno e inicial que foram implementados neste trabalho:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon_s v_s)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon_s v_s)}{\partial y} = 0, \quad (3.28)$$

$$v_{s,x} = \left[\frac{G_x(\varepsilon_s)}{G_y(\varepsilon_s)} \right] \left\{ \frac{G_y(\varepsilon_s)}{\left\{ 1 + \left[\frac{G_x(\varepsilon_s)}{G_y(\varepsilon_s)} \right]^2 \right\}^{\frac{n-1}{2}}} \right\}^{\frac{1}{n}}, \quad (3.29)$$

$$v_{s,y} = \left\{ \frac{G_y(\varepsilon_s)}{\left\{ 1 + \left[\frac{G_x(\varepsilon_s)}{G_y(\varepsilon_s)} \right]^2 \right\}^{\frac{n-1}{2}}} \right\}^{\frac{1}{n}}, \quad (3.30)$$

Condição Inicial:

$$\varepsilon_s(x, y, t = 0) = \varepsilon_{s0}, \quad (3.31)$$

Condições de contorno:

$$F_{s,y}(x, y = 0, t) = 0, \quad (3.32)$$

$$F_{s,y}(x, y = L, t) = 0, \quad (3.33)$$

$$F_{s,x}(x = R_{int}, y, t) = 0, \quad (3.34)$$

$$F_{s,x}(x = R_{ext}, y, t) = 0. \quad (3.35)$$

A seguir é realizada a discretização da equações utilizando o Método dos Volumes Finitos (MVF) para a implementação computacional utilizando linguagem de programação FORTRAN. A validação e discussão dos resultados será abordada no capítulo 4.

3.2.1 Discretização do modelo bidimensional da sedimentação pelo Método dos Volumes Finitos

Esta seção abordará a aplicação do Método dos Volumes Finitos (MVF) à equação da continuidade, Equação (3.28). A aplicação deste método consiste das etapas de estruturação de malha numérica, a integração da equação diferencial parcial (EDP) e as aproximações para os fluxos da grandeza conservativa em questão, neste caso, a massa, em termos de concentração volumétrica de sólidos. Desse modo, cada uma destas etapas é tratada detalhadamente a seguir.

3.2.1.1 Estruturação da malha

Antes da discretização da equação diferencial parcial que rege o problema em estudo, torna-se indispensável a definição do domínio de integração, ou seja, da malha numérica bidimensional. Esta etapa consiste na subdivisão do sistema, isto é, o fluido com sólidos adensantes, em Volumes de Controle (VC), em que a propriedade a ser conservada (massa) irá variar ao decorrer do fenômeno da sedimentação. A partir dessa representação, é possível estabelecer referenciais adequados que auxiliam na formulação e solução do problema, identificar as direções dos fluxos de sólidos atuantes, relacioná-los às condições de contorno e, adicionalmente, facilitar a implementação computacional do modelo. A região anular de poços de petróleo forma um anel, cujo corte longitudinal é uma fatia, conforme mostrado na Figura 2.1a. Esta seção do anular será considerada o domínio de integração, sendo dividida nos volumes de controle conforme a Figura 3.10.

O método dos volumes finitos conta com a adoção de pontos nodais nos centros geométricos de cada volume, que são organizados em termos das direções *Norte(N)*, *Sul(S)*, *Leste(E)* e *Oeste(W)*, seguindo a notação em inglês dos pontos cardeais. O ponto *P* representa o centro geométrico de um volume central qualquer em relação aos demais. Essa notação pode ser observada na Figuras 3.10. As faces de cada volume também recebem a mesma notação em termos de direções cardeais em relação ao centro do volume, porém, essa notação para as faces ocorre por meio de letras minúsculas em cada face, ou seja, *n*, *s*, *e* e *w* para as faces norte, sul, leste e oeste respectivamente.

De acordo com Rocha (2018), o fenômeno da sedimentação em batelada é caracterizado por condições de contorno de segundo tipo, na qual o fluxo de sólidos é nulo nas fronteiras do sistema. No entanto, é importante ressaltar que devido à malha utilizada somente o fluxo na direção horizontal é nulo nas paredes do sistema, ao passo que o fluxo vertical de sólidos nos volumes que contém as respectivas paredes não são nulos. De forma semelhante, somente os fluxos na direção vertical são nulos no topo do fluido e no fundo da região anular, de forma que o fluxo de sólidos na direção horizontal nestes volumes que contém os contornos do topo e do fundo também não são nulos. A Figura 3.10 retrata visualmente esta situação.

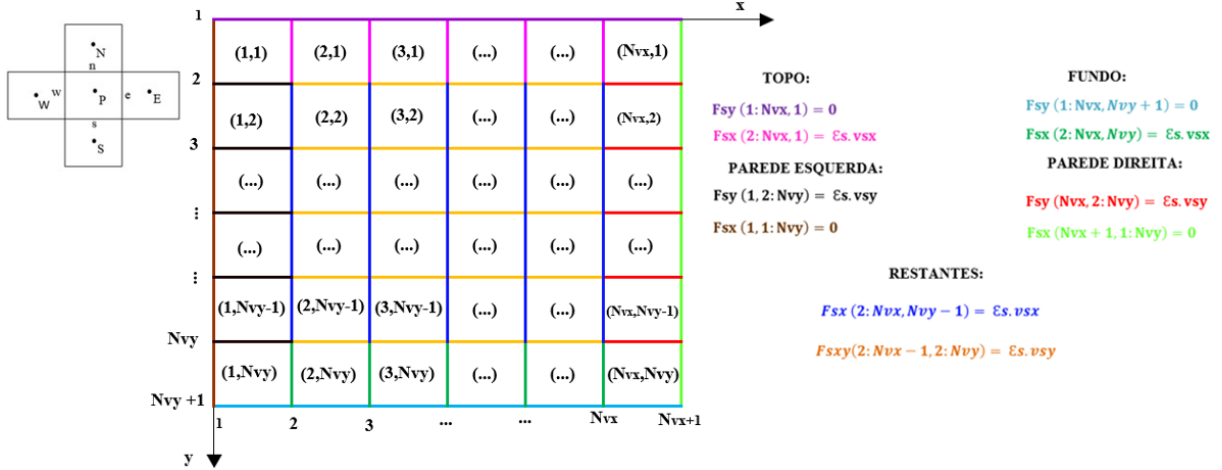


Figura 3.10. Representação da malha numérica com notação do MVF e representação dos fluxos nas direções vertical e horizontal.

A aproximação para os fluxos não nulos será abordada na seção 3.2.1.2.

3.2.1.2 Discretização da Equação Diferencial Parcial

Com a malha numérica computacional e os referenciais bem definidos, a integração da EDP governante do fenômeno, Equação 3.28, pode ser realizada. A integração de um único volume de controle qualquer é válida para todos os demais, que por sua vez resulta em um conjunto de equações algébricas, que será resolvido a cada passo no tempo. Neste trabalho, utilizou-se o Método das Linhas, em que foi realizada a discretização espacial pelo Método dos Volumes Finitos, conforme Equação 3.36. Para ser considerado um método de volumes finitos, a equação a ser resolvida deve ter sido obtida a partir de um balanço de uma grandeza conservativa, possuindo por padrão a característica fundamental deste método: a conservação da propriedade em análise. Para a aplicação do método, é fundamental que a equação diferencial parcial esteja na forma conservativa, em que a equação leva em conta os fluxos da propriedade de interesse, e tais termos são expressos na forma diferencial compacta. Assim, na primeira integração da equação, como é feito na Equação 3.36, os fluxos surgem nas fronteiras dos volumes de controle, correspondendo ao balanço da grandeza conservativa (neste problema, a massa) (MALISKA, 2023).

$$\int_w^e \int_n^s \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} dx dy + \int_w^e \int_n^s \frac{\partial (\varepsilon_s v_{s,x})}{\partial x} dx dy + \int_w^e \int_n^s \frac{\partial (\varepsilon_s v_{s,y})}{\partial y} dx dy = 0. \quad (3.36)$$

Trabalhando desta forma, segundo Leveque (2002), usar propriedades importantes da equação em questão em sua forma conservativa é mais fácil, uma vez que o método numérico seja conservativo e, assim, toda a massa no domínio computacional será conservada. A equação resultante desta integração no espaço se trata de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO), conforme

$$\frac{d\varepsilon_s}{dt} \Delta y \Delta x + [(\varepsilon_s v_{s,x})_e - (\varepsilon_s v_{s,x})_w] \Delta y + [(\varepsilon_s v_{s,y})_s - (\varepsilon_s v_{s,y})_n] \Delta x = 0, \quad (3.37)$$

em que o rearranjo desta expressão conforme Equação 3.38 permite obter a EDO aplicada a cada um dos volumes de controle do sistema.

$$\frac{d\varepsilon_s}{dt} = -\frac{(\varepsilon_s v_{s,x})_e - (\varepsilon_s v_{s,x})_w}{\Delta x} - \frac{(\varepsilon_s v_{s,y})_s - (\varepsilon_s v_{s,y})_n}{\Delta y}. \quad (3.38)$$

Segundo Hamdi, Schiesser e Griffiths (2007), no método das linhas as derivadas espaciais da EDP são substituídas por aproximações algébricas, de tal forma que não são mais representadas explicitamente em termos das variáveis independentes espaciais. Neste trabalho, utilizou-se o método dos volumes finitos para a obtenção das equações algébricas referentes ao espaço, como mostrado na Equação 3.37. Dessa forma, somente a derivada em relação à variável do problema de valor inicial permanece na formulação, originando um sistema de EDO's que funcionam como uma aproximação da EDP original. Neste problema, a variável independente é o tempo, que aparece na derivada primeira (condição necessária ao método das linhas) da concentração volumétrica de sólidos, sendo de primeira ordem em relação a esta variável. Como resultado deste procedimento, obtêm-se um sistema de EDO's, em que cada volume de controle conta com uma expressão conforme a Equação 3.38. Além disso, a vantagem deste método está na possibilidade de utilizar rotinas computacionais já existentes para a integração do sistemas de EDO's e que já foram testadas, validadas, são confiáveis e permitem a integração com controle automático de erro (PINTO, 2001).

Neste trabalho, por exemplo, a subrotina DOPRI5 foi implementada para a resolução do sistema de EDO's obtido, conforme Hairer, Wanner e Norsett (1993). Este código foi acoplado ao simulador bidimensional da sedimentação, sendo composto pelo método de Runge-Kutta explícito de Dormand e Prince de quinta ordem, possuindo um algoritmo de controle de passo e erro local com saída densa (HAIRER; WANNER; NØRSETT, 1993). Na Equação 3.38, os termos $(\varepsilon_s v_{s,x})_e$, $(\varepsilon_s v_{s,x})_w$, $(\varepsilon_s v_{s,y})_s$ e $(\varepsilon_s v_{s,y})_n$ são os fluxos de sólidos que atravessam as faces dos volumes de controle. Estes fluxos podem ser reescritos em termos da notação utilizada por Leveque (2002), sendo reescritos por $F_{s,x}(i + 1/2, j)$, $F_{s,x}(i - 1/2, j)$, $F_{s,y}(i, j + 1/2)$, $F_{s,y}(i, j - 1/2)$ nesta ordem, como mostra a Equação 3.39. Uma malha bidimensional simplificada com esta notação pode ser observada na Figura 3.11.

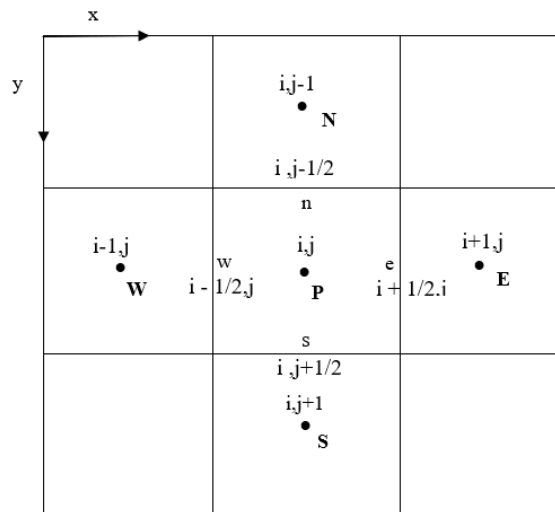


Figura 3.11. Malha bidimensional simplificada.

$$\frac{d\varepsilon_{sij}}{dt} = -\frac{F_{s,x}(i+1/2, j) - F_{s,x}(i-1/2, j)}{\Delta x} - \frac{F_{s,y}(i, j+1/2) - F_{s,y}(i, j-1/2)}{\Delta y}. \quad (3.39)$$

3.2.1.3 Aproximações para os fluxos e demais derivadas

Com a Equação 3.39 aplicada a cada volume de controle a cada tempo para encontrar a concentração volumétrica de sólidos, faz-se necessário decidir quais serão as aproximações para os fluxos e também para os gradientes das concentrações nas Equações 3.20 e 3.21. Como já abordado anteriormente, a sedimentação é um fenômeno com condições de contorno de segundo tipo, em que os fluxos são nulos nas paredes, no topo do fluido e no fundo do anular.

Assim, são necessárias aproximações para todos os demais fluxos não nulos da malha. Para este trabalho, todos os fluxos não nulos, tanto na direção x ou y , foram aproximados levando em conta a concentração volumétrica e o campo de velocidades do volume imediatamente seguinte ao fluxo de sólidos, esquema conhecido como upwind. A aproximação utilizada neste trabalho está representada por

$$F_{sx} = (\varepsilon_s v_{s,x})_{w,e}^o \approx (\varepsilon_s v_{s,x})_{P,E}^o, \quad (3.40)$$

$$F_{sy} = (\varepsilon_s v_{s,y})_{s,n}^o \approx (\varepsilon_s v_{s,y})_{S,P}^o. \quad (3.41)$$

Já a aproximação para os gradientes da concentração nas direções vertical e horizontal das Equações 3.20 e 3.21 foram aproximados por meio de diferenças finitas centrais nos volumes que não são os do contorno do domínio, já que nesses foi realizada a aproximação avançada ou atrasada a depender do contorno, conforme mostrado a seguir:

Volumes que não contêm os contornos:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} = \frac{\varepsilon_{sE} - \varepsilon_{sW}}{2\Delta x}. \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial y} = \frac{\varepsilon_{sS} - \varepsilon_{sN}}{2\Delta y}. \quad (3.43)$$

Volumes da parede esquerda:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} = \frac{\varepsilon_{sE} - \varepsilon_{sP}}{\Delta x}. \quad (3.44)$$

Volumes da parede direita:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} = \frac{\varepsilon_{sP} - \varepsilon_{sE}}{\Delta x}. \quad (3.45)$$

Volumes do topo:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial y} = \frac{\varepsilon_{sS} - \varepsilon_{sP}}{\Delta y}. \quad (3.46)$$

Volumes do fundo:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial y} = \frac{\varepsilon_{sP} - \varepsilon_{sS}}{\Delta y}. \quad (3.47)$$

Em alguns anulares com sapata aberta, existe um ressalto em formato de "degrau", que surge devido à contração do diâmetro do poço, conforme esquematizado na Figura 3.12. Dessa forma, o modelo bidimensional da sedimentação busca descrever o fenômeno de deposição dos sólidos no fundo de anulares com esta configuração.

A região da sapata aberta com ressalto foi implementada no simulador conforme a Figura 3.13, em que os fluxos de sólidos em sua superfície são nulos, similarmente às mesmas condições de contorno das Equações 3.32, 3.33, 3.34 e 3.35. Além disso, a concentração volumétrica do material particulado também foi considerada nula nos volumes que contemplam o interior do ressalto, uma vez que não há fluxo de sólidos dentro desta região. Todos os demais fluxos foram implementados conforme Equações 3.40 e 3.41, e os gradientes de concentração conforme Equações 3.42 e 3.43, com exceção dos volumes dos contornos próximos à sapata, que foram aproximados por diferenças finitas atrasadas, conforme Equações 3.45 e 3.47.

Com todas as aproximações para os fluxos e derivadas, foi possível implementar um algoritmo computacional na linguagem de programação FORTRAN. O código desenvolvido é capaz de retornar ao usuário os valores de concentração volumétrica de sólidos adensantes utilizados em fluidos de perfuração, bem como altura da interface superior sedimentando ao longo do tempo. No capítulo de resultados e discussões será mostrada a validação deste modelo bidimensional implementado. Esta verificação ocorrerá através de análise estatística dos parâmetros das equações da permeabilidade do meio de Kozeny-Carman e do gradiente de pressão nos sólidos, conforme Equações 3.14 e 2.65, respectivamente, e também da análise dos gráficos de interface superior decaindo com o tempo em termos de dados experimentais versus dados simulados. Esta análise permitirá observar se o modelo matemático consegue representar a contento os dados experimentais de um fluido com a formulação abordada na seção anterior.

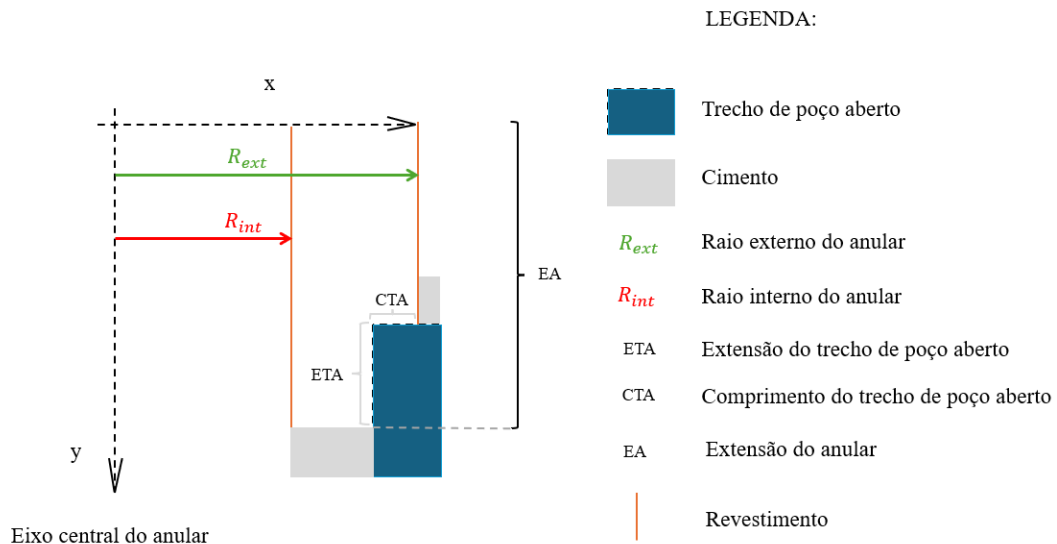


Figura 3.12. Esquematização do anular com contração de diâmetro e presença de degrau.

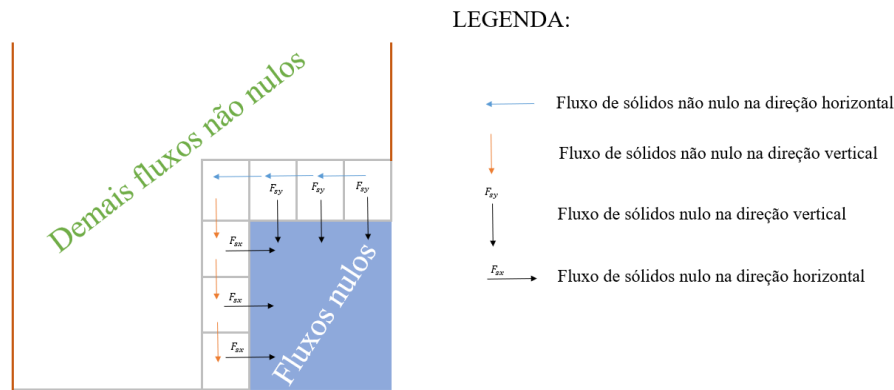


Figura 3.13. Esquemática da implementação dos fluxos de sólidos na região do degrau.

3.3 Estimação de parâmetros e análise estatística

Segundo Schwaab e Pinto (2007), na construção de modelos matemáticos, duas entidades básicas distintas são necessárias: a estrutura do modelo e seus parâmetros. Na primeira, as variáveis do problema se relacionam e, quanto aos parâmetros, estes tornam possível a previsão quantitativa das relações existentes entre as diversas variáveis do problema, por meio da estrutura do modelo. Os autores definem a estimação de parâmetros como a obtenção de dados experimentais e sua comparação com modelos que pretendem explicá-los. Em outras palavras, trata-se de usar um modelo matemático como referência e variar seus parâmetros até que as previsões do modelo fiquem o mais próximo possível dos dados do experimento, conforme uma métrica pré-estabelecida de comparação (denominada função objetivo), respeitando suas devidas incertezas experimentais.

Neste trabalho, o método utilizado para a obtenção dos parâmetros ótimos dos modelos reológico e da sedimentação foi o método do enxame de partículas. Eberhart e Kennedy (1995) desenvolveram esta técnica de otimização cujo princípio do método é buscar o ponto ótimo da solução de um problema, em que o procedimento de otimização é análogo ao comportamento de pássaros buscando o melhor lugar para obter comida. O funcionamento do algoritmo se dá com a inicialização de um conjunto de soluções possíveis: as partículas do algoritmo. Cada partícula do enxame é inicializada com uma velocidade aleatória, e assim, movem-se pelo espaço de procura do problema. Para um número pré-definido de iterações, cada partícula é direcionada a uma nova posição que promove o melhor valor de função objetivo em relação à posição anterior. A partir deste espaço de busca, o algoritmo atrai a partícula para o valor da função objetivo mais adequado, o que, por sua vez, a conduz para a localização do melhor valor da função objetivo alcançada em toda o enxame (JUNEJA; NAGAR, 2016).

De maneira geral, o algoritmo de enxame de partículas é muito utilizado devido a algumas vantagens. Uma delas é não envolver mutação e seleção no processo de procura pelo ponto ótimo. Uma simples variação nas velocidades das partículas pode conduzir a procura. Outro ponto importante é que as partículas aprendem através das experiências do grupo, assim, estas voam somente para as posições em que é possível encontrar o ponto ótimo. Além disso, é um método de fácil implementação por possuir cálculos simples, podendo ser usados na pesquisa científica e aplicações em engenharia (JUNEJA; NAGAR, 2016). Neste trabalho, o método do enxame de partículas empregado foi disponibilizado no repositório de código ESTIMATION (vide referência), desenvolvido por Segtovich *et al.* (2019).

O processo de estimação de parâmetros conta com a minimização de uma função objetivo, que relaciona os dados experimentais com os calculados pelo modelo. Porém, este processo não termina nesta etapa, uma vez que é necessária a análise estatística dos parâmetros estimados pelo analista. Esta análise, por sua vez, visa verificar a qualidade dos resultados obtidos com as ferramentas estatísticas apropriadas. O retorno desta avaliação permite obter informações relevantes sobre a qualidade do modelo e os parâmetros estimados, para que seja possível reavaliar a necessidade de modificar o modelo ou dar continuidade ao processo de experimentação (PINTO; SCHWAAB, 2007).

Dessa forma, entender o conceito de função objetivo antes da análise estatística se faz necessário. A definição desta função, também conhecida como métrica, é apresentada detalhadamente por Schwaab e Pinto (2007), que ilustra através de um exemplo simples e prático, conforme Figura 3.14, o porquê da necessidade de se estabelecer esta métrica.

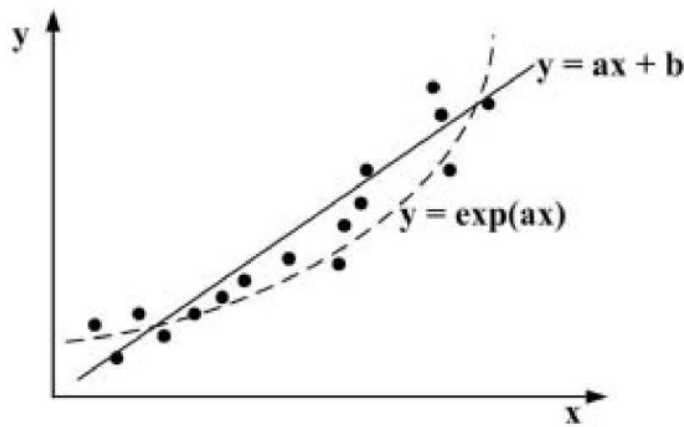


Figura 3.14. Ilustração sobre a necessidade de definir uma métrica (Adaptado de PINTO; SCHWAAB, 2007.).

Observando a Figura 3.14, não é possível identificar com facilidade qual função (modelo matemático) mais se aproxima dos dados experimentais. Dessa forma, faz-se necessário introduzir uma métrica para avaliar o quão próximo os dados do modelo estão dos dados experimentais. Neste trabalho, a função objetivo empregada é a função de mínimos quadrados ponderados, conforme

$$F_{Obj} = \sum_{i=1}^{NE} \sum_{j=1}^{NY} \frac{(y_{ij}^e - y_{ij}^m(x_i, a))^2}{\sigma_{yij}^2}, \quad (3.48)$$

que possui significado estatístico, sendo utilizada como métrica natural se os erros experimentais estiverem distribuídos normalmente, não estarem correlacionados, se as variáveis independentes não estiverem sujeitas a erro e as hipóteses de experimento bem-feito e modelo perfeito forem atendidas. A hipótese do experimento bem-feito, diz que se os erros de medição cometidos durante a condução dos procedimentos experimentais são tão pequenos que é possível admitir que a probabilidade de encontrar os dados experimentais é máxima. Já a hipótese do modelo perfeito diz que se o modelo é perfeito, ele é capaz de descrever exatamente as relações existentes entre as variáveis do problema (PINTO; SCHWAAB, 2007). Com a métrica bem estabelecida, de acordo com Schwaab e Pinto (2007), duas interpretações estatísticas abordadas pelos autores sobre os dados estimados são a qualidade dos parâmetros obtidos e a qualidade das previsões do modelo.

- Qualidade dos parâmetros estimados

De acordo com Schwaab e Pinto (2007), a matriz de covariância dos parâmetros V_α , de acordo com a Equação 3.49, é item fundamental na análise da qualidade dos parâmetros estimados. É a partir dela que é possível obter também a matriz de covariância dos parâmetros, intervalo de confiança dos parâmetros e avaliar seu grau de significância.

$$V_\alpha = [B^T V_y^{-1} B]^{-1} \quad (3.49)$$

Na Equação 3.49, B é a matriz de sensibilidade dos parâmetros (matriz jacobiana), calculada numericamente, uma vez que o modelo da sedimentação é não linear nos parâmetros, e B^T é sua transposta. Sua forma é mostrada na Equação 3.50:

$$B = \left[\frac{\partial y^m}{\partial \theta} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1^m}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y_1^m}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial y_1^m}{\partial \theta_{NP}} \\ \frac{\partial y_2^m}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y_2^m}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial y_2^m}{\partial \theta_{NP}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{NY}^m}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y_{NY}^m}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial y_{NY}^m}{\partial \theta_{NP}} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

A variável V_y se trata da matriz de covariância experimental, conforme Equação 3.51:

$$V_y = \begin{bmatrix} \sigma_{y1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{y2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{yNE}^2 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Com a matriz de covariância dos parâmetros, seus intervalos de confiança podem ser construídos, uma vez que as variâncias de cada parâmetro ($\sigma_{\alpha,i}^2$) são conhecidas. Neste trabalho, optou-se por utilizar a distribuição t de Student para determinar o intervalo de confiança, conforme

$$\hat{\alpha}_i - t\sigma_{\hat{\alpha}_i} < \alpha_i < \hat{\alpha}_i + t\sigma_{\hat{\alpha}_i}, \quad (3.52)$$

em que t é obtido com o número de graus de liberdade da estimação e com o grau de confiança arbitrado pelo usuário. Se o grau de confiança necessário para incluir o zero é inferior ao grau de confiança estabelecido pelo usuário, diz-se que o parâmetro é não significativo. Nesse caso, há argumentos estatísticos suficientes para remover o parâmetro do modelo matemático. Porém, se o contrário é verdadeiro, de acordo com Schwaab e Pinto (2007), o parâmetro é significativo e há razões estatísticas para mantê-lo (e o respectivo efeito) no modelo.

Além disso, outra informação importante pode ser obtida a partir da matriz de covariância dos parâmetros: a matriz de correlação dos parâmetros, cuja forma é mostrada por

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^2}{\sigma_i \sigma_j}, \quad (3.53)$$

em que σ_{ij} é a covariância do parâmetro i com o j e σ_i e σ_j são os desvios padrões dos parâmetros i e j , respectivamente. Mais eficiente será a estimação dos parâmetros, quanto mais próximos estiverem de zero os coeficientes de correlação paramétrica e mais precisa a identificação dos diferentes efeitos no modelo. Se a correlação paramétrica superar em módulo o valor de 0,9, é interessante avaliar a necessidade de introduzir estes parâmetros no modelo, pois pequenas mudanças no valor de um dos parâmetros podem ser compensadas com mudanças de um outro parâmetro que se relaciona com ele.

Assim, a correlação paramétrica indica que flutuações em alguns parâmetros podem ser compensadas por variações em outros, sugerindo a possibilidade de redução do número de parâmetros do modelo.

- Qualidade das previsões do modelo

De acordo com Schwaab e Pinto (2007), é necessário calcular como os erros paramétricos se propagam pelo modelo e viram erros de predição. Para modelos não-lineares nos parâmetros, os erros de predição precisam ser calculados por aproximações, como

$$\hat{\mathbf{V}}_y = \mathbf{B}\mathbf{V}_\alpha\mathbf{B}^T + \mathbf{V}_y. \quad (3.54)$$

Nesta equação, as variâncias dos valores calculados do modelo são armazenadas, permitindo criar seu intervalo de confiança de predição. Neste trabalho, também foi utilizada a distribuição t de Student para determinar estes intervalos, conforme:

$$y_i^m - t\hat{\sigma}_{y_i} < y_i < y_i^m + t\hat{\sigma}_{y_i}. \quad (3.55)$$

Sua utilidade prática permite identificar pontos experimentais suspeitos, que não podem ser explicados pelo modelo. Os erros de predição podem ser utilizados também para determinar a região experimental em que o modelo e o dado do experimento são equivalentes estatisticamente, o que define a região de utilidade do modelo. Graficamente, o desempenho de modelos matemáticos podem ser comparados relacionando os valores previstos pelo modelo e os observados experimentalmente, permitindo informações importantes a respeito da qualidade da estimação realizada.

Na Figura 3.15, percebe-se o comportamento típico de quando os dados calculados pelo modelo e os dados observados experimentalmente são coerentes, o que por sua vez indicam que o modelo é bom e o experimento é bem-feito.

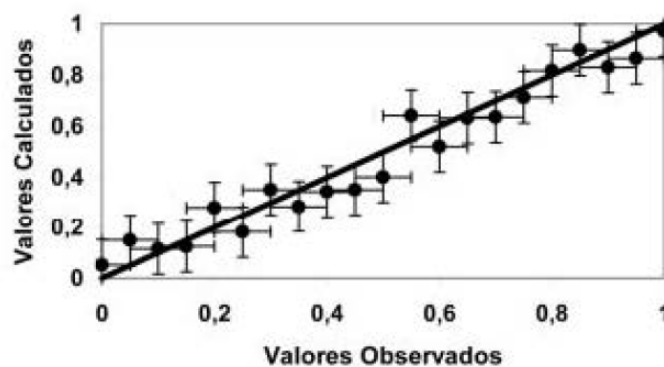


Figura 3.15. Modelo bom e experimentos bem-feitos (Adaptado de PINTO; SCHWAAB, 2007).

Na Figura 3.16, tem-se o padrão típico de comparação entre os dados calculados pelo modelo e os dados do experimento, quando pontos não explicados pelo erro de medida

estão presentes, os chamados *outliers*. De acordo com Schwaab e Pinto (2007), um ponto experimental não deve ser descartado, a menos que a repetição do experimento confirme a existência de um erro significativo ou existam razões muito específicas para condenar a observação experimental, uma vez que um ponto experimental que não se adéqua ao modelo pode ser uma grande oportunidade científica, segundo os autores.

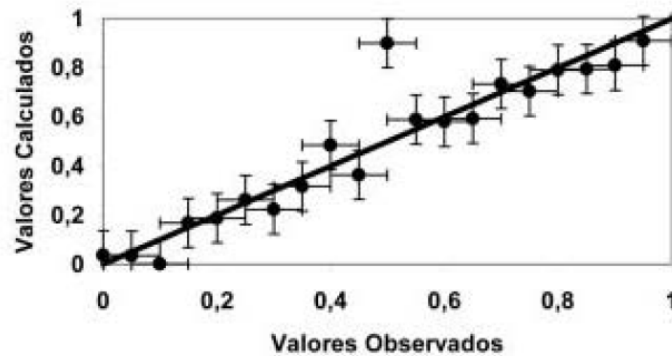


Figura 3.16. Presença de *outliers* (Adaptado de PINTO; SCHWAAB, 2007).

Na Figura 3.17, observa-se um caso em que os dados calculados pelo modelo e os dados observados experimentalmente geram um comportamento não uniforme no gráfico de valores calculados versus observados. Isso se dá quando o modelo é ruim ou quando os desvios experimentais estão subestimados.

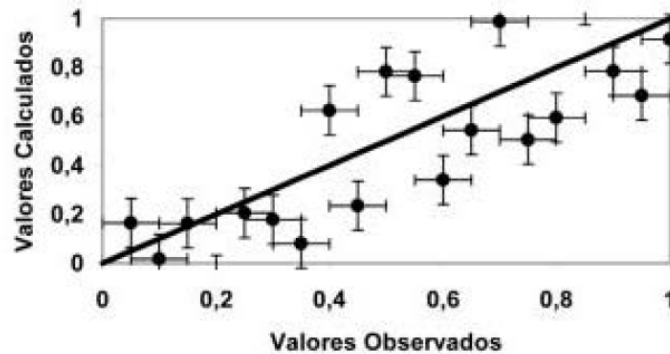


Figura 3.17. Modelo ruim e dados experimentais subestimados (Adaptado de PINTO; SCHWAAB, 2007).

Por fim, a Figura 3.18 ilustra um caso onde a comparação entre os dados calculados pelo modelo e os dados observados experimentalmente retratam um modelo que não apresenta desempenho uniforme na região de experimentação, ou seja, ele erra mais para um lado do que para outro.

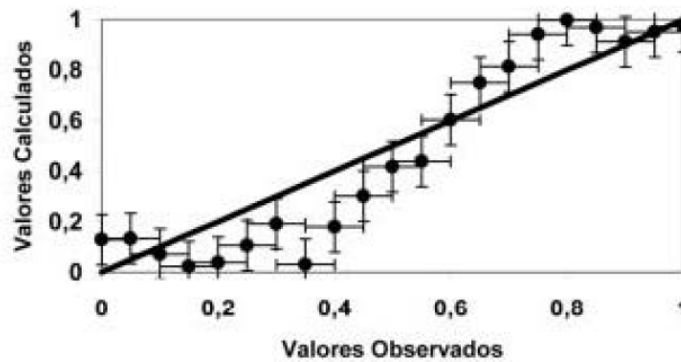


Figura 3.18. Modelo não uniforme da região de experimentação (Adaptado de PINTO; SCHWAAB, 2007).

- Validação com SimSag

A validação do modelo matemático bidimensional da sedimentação de sólidos adensantes ocorreu através de ferramentas de análise estatística e da comparação gráfica entre os dados de altura de interface coletados no experimento e os dados simulados. Um código de autoria própria foi criado a fim de realizar os cálculos estatísticos vistos anteriormente. O simulador unidimensional (SimSag) apresentado no trabalho de Rocha *et al* (2020) foi utilizado na estimação utilizando o enxame de partículas abordado anteriormente, que visa minimizar a função objetivo apresentada na Equação 3.48. Adaptou-se o algoritmo ESTIMATION para utilizar o SimSag na obtenção de valores de altura de interface superior simuladas. Esta escolha pelo simulador 1D na estimação de parâmetros foi baseada no fato de que uma simulação unidimensional considerando os sedimentadores apresentados anteriormente é mais rápida, se comparada à simulação bidimensional, que utiliza mais volumes e, consequentemente, demanda um custo computacional maior. Além disso, os dados obtidos experimentalmente são perfis unidimensionais ao longo da altura do sedimentador próximo a parede oposta ao degrau. Estes valores e suas variâncias foram utilizados para realizar a estimação dos parâmetros das equações constitutivas do modelo. Nesta posição, os efeitos de deslocamento de sólidos por efeito do degrau são mínimos, por isso, usar o SimSag (1D) para simular esta posição é mais vantajoso em termos de tempo computacional e não há influência bidimensional significativa nesta posição. Além disso, resultados de perfis de concentração volumétrica de sólidos para um caso sem presença de degrau, em uma posição horizontal fixa de um domínio e em escala de proveta demonstram que o modelo 2D proposto apresenta baixo desvio em relação aos dados do modelo 1D, validado por Rocha *et al* (2020). A Tabela 3.3 apresenta os dados de entrada desta simulação, que visa comparar perfis de concentração volumétrica de sólidos entre os dois modelos para a sedimentação ocorrendo em um fluido base óleo. Para este domínio bidimensional, 40000 volumes foi a quantidade ótima obtida pela análise de convergência de malha considerando a escala de proveta.

Tabela 3.3. Dados de entrada das simulações.

Dados de entrada		Unidade
Tipo de fluido	Base óleo	-
Massa específica da suspensão	9,60	lb/gal
Massa específica dos sólidos	22,60	lb/gal
Parâmetro A da equação 2.65	26,57	Pa
Parâmetro β da equação 2.65	2,1938	Adimensional
Concentração de referência da equação 2.65	16,70 %	Adimensional
Concentração volumétrica inicial de sólidos	14,00 %	Adimensional
Parâmetro estrutural B da equação 3.14	3,4508	Adimensional
Esfericidade das partículas	0,8	Adimensional
Diâmetro médio das partículas	40,80	μm
Índice de consistência da suspensão	1,25	Pa.s ⁿ
Índice de comportamento da suspensão	0,38	Adimensional
Profundidade do anular	0,21	m
Raio interno do anular	0,055	m
Raio externo do anular	0,11	m
Número de volumes	40000	-
Parâmetro de estabilidade CFL	0,005	-

Os tempos de simulação de 6 meses, 1 ano, 2 anos e 5 anos foram utilizados nas simulações dos dois modelos. A comparação dos resultados é feita por meio de desvios percentuais médios entre os valores de concentração volumétrica do SimSag e do modelo bidimensional em uma posição horizontal fixa qualquer do domínio bidimensional, já que para qualquer plano horizontal as concentrações são constantes, pelo menos quando não há contração do anular. A comparação gráfica é apresentada na Figura 3.19.

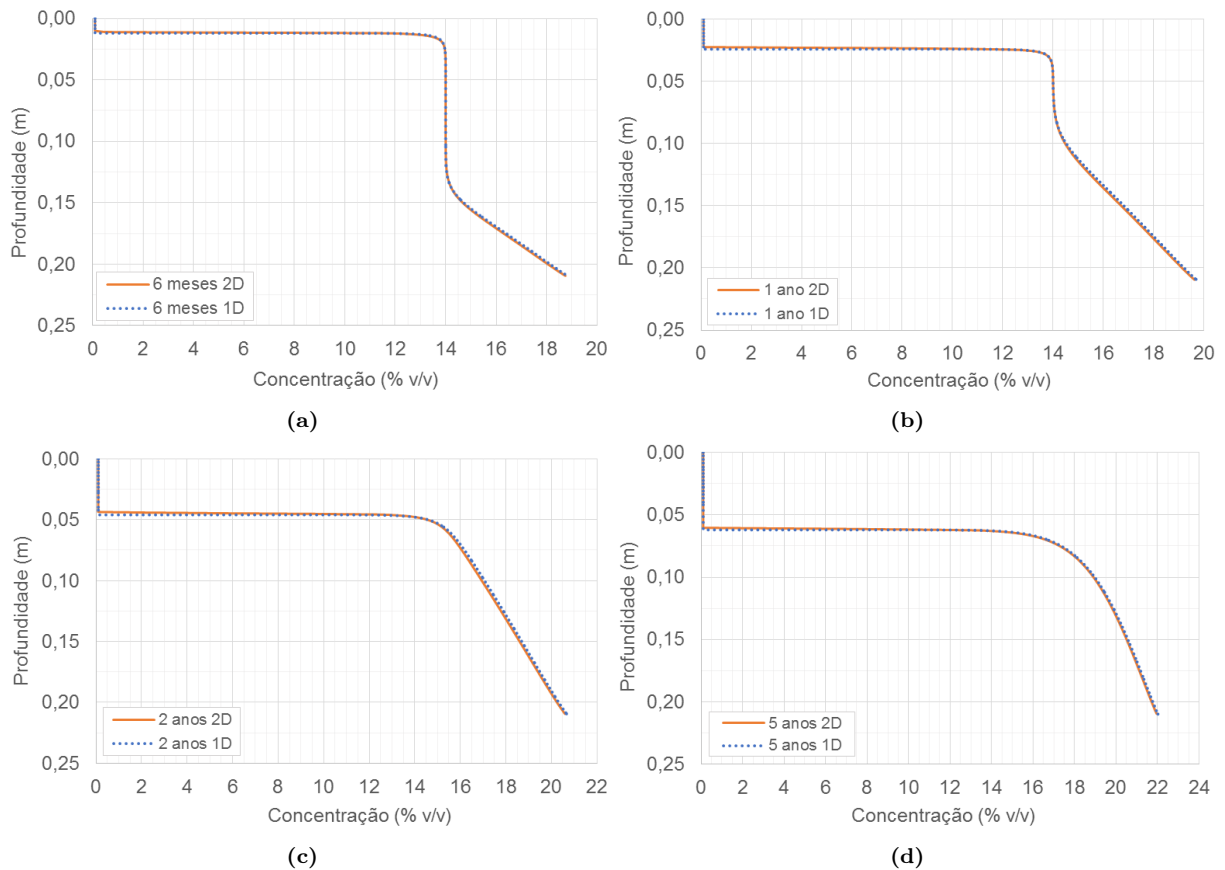


Figura 3.19. Comparação entre as simulações do código bidimensional e unidimensional para (a) 6 meses, (b) 1 ano, (c) 2 anos e (d) 5 anos.

Os resultados das Figuras 3.19 (a), (b), (c) e (d) apresentaram desvios percentuais médios de 0,25%, 0,39%, 0,58% e 0,39%, respectivamente, o que sugere uma boa concordância entre as abordagens unidimensional e bidimensional, em termos de perfis de concentração em posições horizontais fixas. Dessa forma, a escolha do SimSag para as simulações feitas na estimação dos parâmetros das equações constitutivas do modelo pôde ser feita sem prejuízo aos valores de concentração volumétrica bidimensionais. Para verificar a qualidade do modelo bidimensional da sedimentação proposto, a qualidade dos parâmetros estimados e das previsões do modelo, bem como o ajuste dos dados de altura de interface simulados aos dados experimentais dentro dos erros experimentais serão os critérios avaliados nesta dissertação para validar o modelo. Todas as simulações deste trabalho foram realizadas em um computador Dell G15 equipado com processador Intel Core i7-13650HX de 13^a geração (2,60 GHz) e 16 GB de memória RAM.

CAPÍTULO III

RESULTADOS E DISCUSSÕES

4 CAPÍTULO III: Resultados e discussões

RESUMO

Este capítulo apresenta e discute os resultados obtidos a partir dos experimentos conduzidos neste trabalho, bem como a análise estatística da estimação dos parâmetros do modelo reológico empregado e também dos parâmetros do modelo da sedimentação a partir da triplicata de experimentos realizada. A análise dos perfis bidimensionais de concentração volumétrica de sólidos ao longo do tempo também é discutida nesta seção, sendo comparada com os resultados experimentais em dois dos vasos sedimentadores com diferentes geometrias de degrau. A comparação entre os resultados experimentais e os valores previstos pelo modelo bidimensional permite avaliar a capacidade do simulador 2D em representar adequadamente o fenômeno da sedimentação. Nesse contexto, a representação da interface superior pelo modelo bidimensional é adotada como o principal critério de validação do simulador, uma vez que isto permite obter a altura do leito de sólidos formado. A análise crítica dos resultados obtidos possibilita identificar limitações do modelo e no experimento, permitindo apontar direções para seu aprimoramento em trabalhos futuros.

Palavras-chave: sedimentador 2D, interface superior, perfil de concentração volumétrica, análise estatística, estimação de parâmetros.

4.1 Estimação dos parâmetros reológicos

O modelo reológico adotado para representar as características pseudoplásticas do fluido preparado segue o modelo Power-Law, conforme Equação 3.19, reescrito e simplificado como

$$\tau = M\dot{\gamma}^n. \quad (4.1)$$

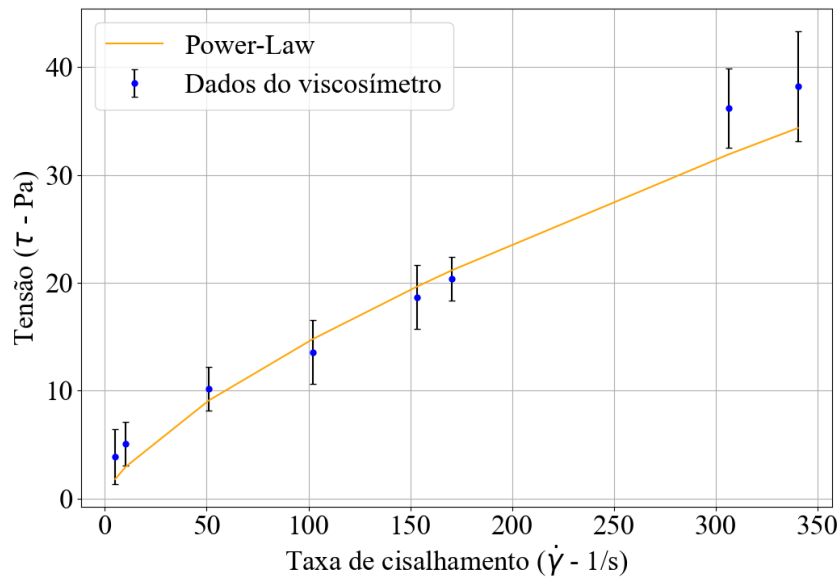
Nesta equação, τ e $\dot{\gamma}$ são, respectivamente, a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação do fluido, sendo M e n os parâmetros reológicos deste modelo, isto é, o índice de consistência e de comportamento do fluido, nesta ordem. A partir da triplicata do fluido preparado, os dados de tensão de cisalhamento e de taxa de deformação do fluido foram obtidos através do viscosímetro Fann, Figura 3.2. O resultado da triplicata e da estimação dos parâmetros reológicos é mostrada na Figura 4.1.

Para estimar os parâmetros M e n , o método do enxame de partículas foi utilizado. Na Tabela 4.1, é apresentado o intervalo de confiança dos parâmetros estimados, cuja distribuição escolhida para o intervalo é a t de Student com 95 % de confiança.

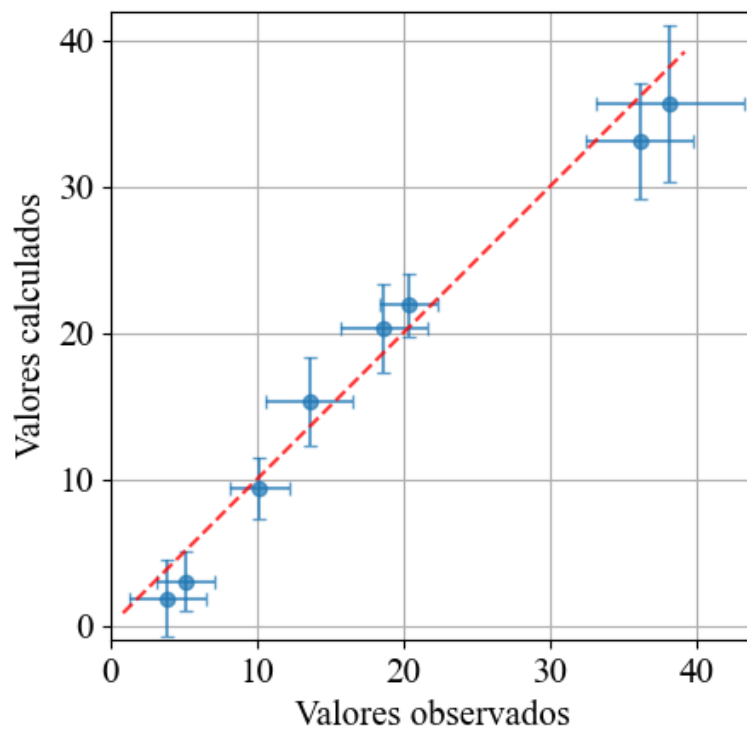
Tabela 4.1. Resultado da estimação dos parâmetros reológicos do modelo Power-Law.

Parâmetro	Intervalo de confiança (95%)	Unidade
M	$0,58 \pm 0,17$	Pa.s ⁿ
n	$0,70 \pm 0,06$	-

A partir da Figura 4.1a, o modelo Power-Law conseguiu representar o comportamento experimental da suspensão formulada para os experimentos de sedimentação nos vasos sedimentadores. Todos os pontos experimentais dentro de seus intervalos de 95 % de confiança foram abrangidos por este modelo. Além disso, de acordo com a Figura 4.1b, a previsão da tensão de cisalhamento por este modelo se mostrou adequada em todos os pontos experimentais, uma vez que se encontram bem próximos da função identidade (linha tracejada vermelha) respeitados seus respectivos erros experimentais e de previsão do modelo.



(a) Curva reológica experimental e modelo Power-Law.



(b) Análise estatística da estimação dos parâmetros reológicos.

Figura 4.1. Curva reológica e análise estatística da estimação dos parâmetros do modelo Power-Law.

Dessa forma, a Tabela 4.1 apresenta os valores estimados do índice de consistência e de comportamento do fluido com seus respectivos desvios. A partir destes dados tabelados é possível confirmar que os parâmetros do modelo Power-Law possuem significância estatística, uma vez que o intervalo de confiança não engloba o valor zero, o que indicaria que o parâmetro em questão poderia ser retirado do modelo. Além disso, o valor obtido para o índice de comportamento do fluido (n) está de acordo com um fluido não-Newtoniano

pseudoplástico, uma vez que possui valor menor que 1.

Em termos da qualidade dos parâmetros estimados, a matriz de covariância, V_α , e correlação, ρ_{ij} , dos parâmetros estimados são mostradas a seguir. A matriz de covariância quantifica como o índice de consistência e de comportamento do fluido variam individualmente e em conjunto. Os termos da diagonal representam as variâncias de cada parâmetro, indicando sua dispersão em torno do valor médio. Já os termos fora da diagonal, iguais e negativos, são as covariâncias de cada parâmetro e, por serem negativas neste caso, indicam que quando um parâmetro aumenta, o outro tende a diminuir.

$$V_\alpha = \begin{pmatrix} 0.006 & -0.002 \\ -0.002 & 0.0007 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

A matriz de correlação apresentada revela uma forte correlação negativa entre os parâmetros, muito próxima de -1 , o que indica que os parâmetros estão altamente dependentes de forma inversa, de modo que o aumento do índice de consistência do fluido está fortemente associado à diminuição do índice de comportamento.

$$\rho_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -0.99 \\ -0.99 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

A partir dos parâmetros reológicos estimados, estes valores foram utilizados nas simulações de sedimentação bidimensional obtidos nos sedimentadores 2D e nas simulações do SimSag para a estimação dos parâmetros do modelo da sedimentação. Estes resultados serão apresentados na próxima seção.

4.2 Testes no sedimentador 1 - Estimação de parâmetros e validação

Nesta seção, as alturas de interface superior coletadas no experimento e os resultados das simulações realizadas pelo SimSag e o modelo bidimensional da sedimentação para o sedimentador 1 são apresentados. Além disso, os perfis de concentração volumétrica bidimensionais em cada tempo de coleta de altura de interface são apresentados juntamente com fotos do experimento para comparação qualitativa. Este experimento foi realizado em triplicata, de tal forma que as alturas de interface na posição mais afastada do degrau foram utilizadas na estimação dos parâmetros das equações de permeabilidade do meio de Kozeny-Carman e do gradiente de pressão nos sólidos. Estas equações estão reescritas nas Equações 4.4 e 4.5 para facilitar a leitura. Escolheu-se este sedimentador bidimensional para realizar a triplicata e, conseqüentemente, utilizar os dados do experimento para a estimação de parâmetros, pois o degrau contido neste sedimentador possui dimensões intermediárias ao sedimentador 2, que possui largura maior, e 3, que possui maior altura. Os experimentos dos sedimentadores 2 e 3 foram feitos para verificar a capacidade do modelo de representar os dados experimentais com os parâmetros estimados com o experimento do sedimentador 1, uma vez que o mesmo fluido foi empregado.

$$K = \frac{(d_P \phi)^2 (1 - \varepsilon_s)^3}{36 B \varepsilon_s^2}, \quad (4.4)$$

$$\frac{dP_s}{d\varepsilon_s} = \frac{A}{\varepsilon_s^2} \exp \left[-\beta \left(\frac{1}{\varepsilon_s} - \frac{1}{\varepsilon_{sref}} \right) \right]. \quad (4.5)$$

Para realizar a estimação dos parâmetros B , da equação da permeabilidade do meio de Kozeny-Carman e A , β e ε_{sref} , o mesmo algoritmo de enxame de partículas usado na

estimação dos parâmetros reológicos foi empregado. Os dados de altura do sedimento, seus erros experimentais e o resultado das simulações uni e bidimensionais são mostrados na Figura 4.4 e os parâmetros estimados com 95 % de confiança considerando a distribuição t de Student estão elencados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2. Resultado da estimação dos parâmetros das equações de Kozeny-Carman e do gradiente de pressão nos sólidos.

Parâmetro	Intervalo de confiança (95%)	Unidade
A	$11,68 \pm 3,47$	Pa
B	$0,06 \pm 0,001$	-
β	$1,60 \pm 0,24$	-
ε_{sref}	$0,137 \pm 0,006$	-

A partir do intervalo de confiança dos parâmetros da sedimentação apresentados na Tabela 4.2, é possível afirmar que todos possuem significância estatística, uma vez que nenhum deles contempla o valor zero em seu intervalo. Estes resultados demonstram que o uso de dados simples, como a altura da interface superior decaindo ao longo o tempo, permite identificar parâmetros relacionados às equações constitutivas da permeabilidade do meio de Kozeny-Carman, Equação 4.4, e do gradiente de pressão nos sólidos, Equação 3.7, permitindo a previsão da interface superior com precisão nas curvas de sedimentação. Do ponto de vista experimental, é uma informação valiosa, pois não requer dados de concentração volumétrica de sólidos, que geralmente só são obtidos por instrumentos de medição elaborados, como condutivímetros.

Uma análise de convergência de malha foi realizada a fim de averiguar uma quantidade ótima de volumes a serem utilizados nas simulações do modelo bidimensional quanto à discretização do domínio espacial representativo do sedimentador utilizado no experimento. O ponto da Figura 4.2 foi escolhido para monitorar a variação da concentração volumétrica de sólidos utilizando 10000, 40000, 90000, 160000 e 250000 volumes no domínio bidimensional. Escolheu-se esta posição devido à possibilidade de observar a convergência da malha frente às perturbações na concentração oriundas da presença do degrau, deslocando os sólidos, e também da sedimentação livre das partículas, que ocorre em posições afastadas da geometria.

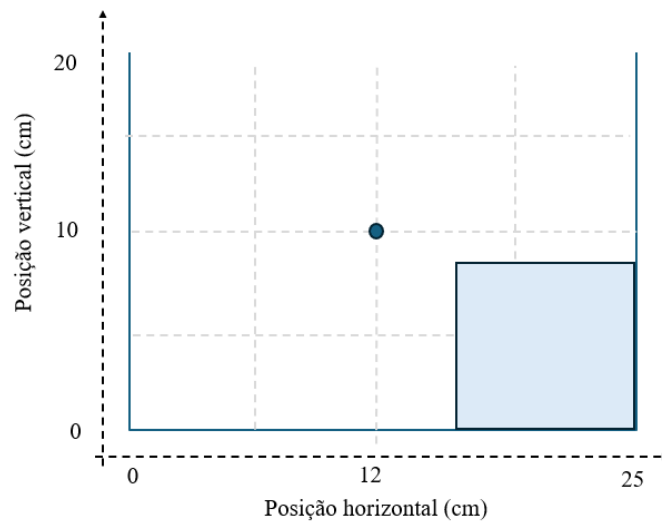
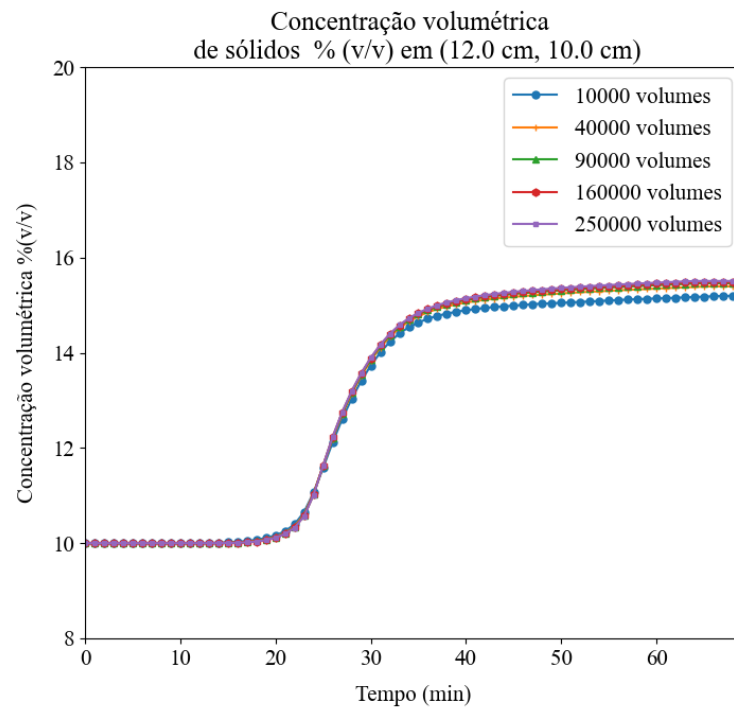


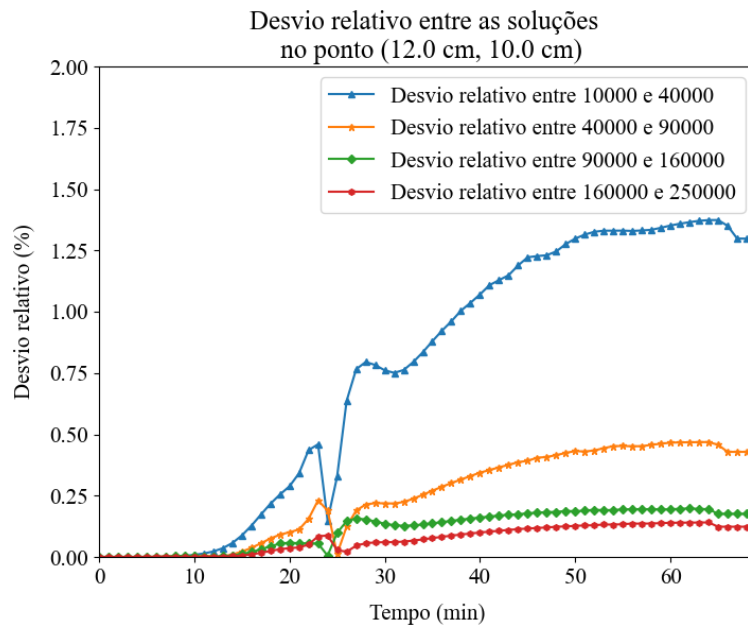
Figura 4.2. Representação do ponto analisado na análise de convergência de malha.

A concentração volumétrica de sólidos foi então comparada em relação à malha mais refinada seguinte. É possível observar no gráfico da Figura 4.3a que os perfis de concentração se sobrepõem para intervalos de tempo pequenos. Contudo, conforme o tempo evolui e a interface tende a estabilizar aos 60 minutos, os valores de concentração volumétrica entre os volumes variam pouco, se aproximando à medida que a malha é refinada.

De maneira geral, os perfis para 90000, 160000 e 250000 volumes apresentam maior proximidade entre seus resultados. Foi calculado, portanto, o desvio relativo entre as malhas menos e mais refinadas, de forma a avaliar um número de volumes a partir do qual as soluções convergem para o mesmo valor. Esta informação é apresentada na Figura 4.3b, que mostra um desvio relativo abaixo de 0,5 % para as simulações com malhas a partir de 40000 volumes para o domínio bidimensional do sedimentador 1.



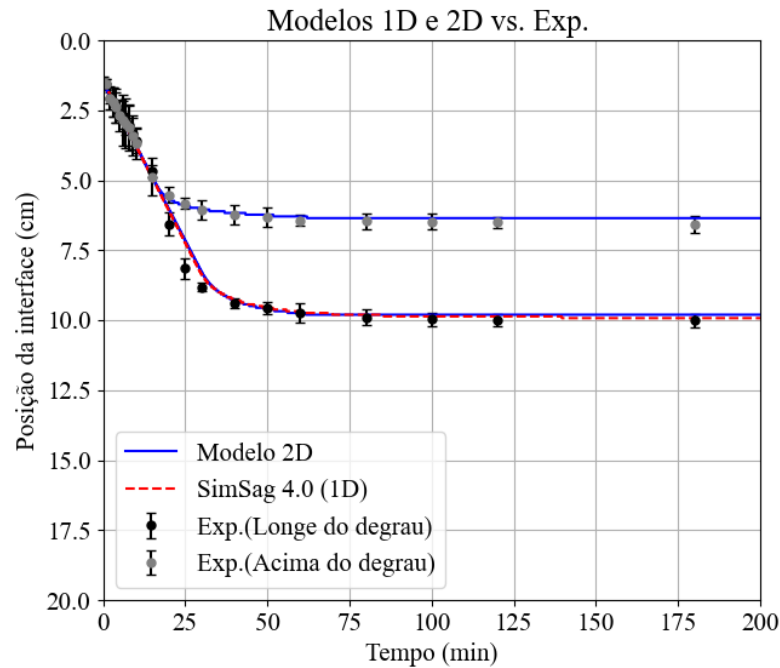
(a) Perfis de concentração volumétrica variando com o refinamento da malha.



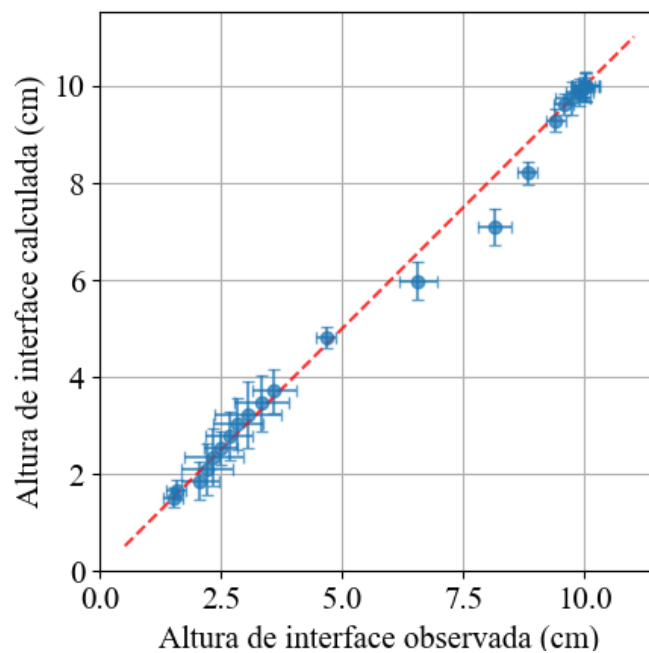
(b) Desvio relativo entre os volumes à medida que a malha é refinada.

Figura 4.3. Análise de convergência de malha para simulações considerando o sedimentador 1.

Desvios relativos abaixo de 0,25 % entre as simulações são obtidos ao comparar a malha de 90000 com a de 160000 e também a de 160000 com a de 250000, demonstrando que a partir de 90000 volumes os valores de concentração volumétrica de sólidos não possuem variação significativa. Dessa forma, as simulações bidimensionais deste trabalho utilizam 90000 volumes, de forma a reduzir o custo computacional e agilizar a obtenção de resultados deste trabalho.



(a) Alturas experimentais e previsões do SimSag e modelo bidimensional.



(b) Análise estatística dos valores preditos vs. observados para a posição afastada do degrau.

Figura 4.4. Resultado da triplicata do experimento realizado no sedimentador 1, simulações e análise de valores preditos pelo modelo.

A Figura 4.4a apresenta os dados experimentais de altura de interface da triplicata realizada com seus erros experimentais com 95 % de confiança, o decaimento da interface superior predito pelos modelos uni e bidimensional e o gráfico da qualidade das previsões do modelo em relação aos dados experimentais. É possível observar que os parâmetros estimados permitiram a ambos simuladores obterem valores de altura de interface superior

decaindo ao longo do tempo coerentes com os observados experimentalmente. A maioria dos pontos experimentais na posição mais afastada do degrau foram abrangidos pelos dois modelos ficando dentro do intervalo de confiança de 95 % para os erros experimentais. Além disso, fica evidente que a estimacão utilizando as alturas afastadas do degrau foi suficiente para obter parâmetros que também permitem obter alturas preditas acima do degrau dentro dos intervalos dos erros experimentais nesta posição.

A Figura 4.4b mostra a relação entre os valores preditos e observados experimentalmente. Observa-se que a melhor correspondência entre dados preditos e observados ocorre no início e ao final do experimento, nas zonas de sedimentação livre e de compactação, respectivamente. Na Figura 4.4a, percebe-se que ao longo da zona de sedimentação livre à medida que a zona de transição se aproxima, é possível notar que os pontos experimentais estão levemente afastados do modelo.

Em termos da qualidade dos parâmetros estimados, a matriz de covariância, V_α , e correlação, ρ_{ij} , são apresentadas conforme

$$V_\alpha = \begin{pmatrix} 1,49 \times 10^{-7} & 2,07 \times 10^{-4} & 2,55 \times 10^{-5} & 5,50 \times 10^{-7} \\ 2,07 \times 10^{-4} & 3,04 & 6,52 \times 10^{-2} & 3,82 \times 10^{-3} \\ 2,55 \times 10^{-5} & 6,52 \times 10^{-2} & 1,41 \times 10^{-2} & 2,47 \times 10^{-4} \\ 5,50 \times 10^{-7} & 3,82 \times 10^{-3} & 2,47 \times 10^{-4} & 7,03 \times 10^{-6} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

$$\rho_{ij} = \begin{pmatrix} 1,0 & 0,30 & 0,55 & 0,53 \\ 0,30 & 1,0 & 0,31 & 0,82 \\ 0,55 & 0,31 & 1,0 & 0,78 \\ 0,53 & 0,82 & 0,78 & 1,0 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

A partir da matriz de covariância, observam-se que as variâncias apresentam ordens de grandeza distintas, o que evidencia diferenças significativas nas incertezas dos parâmetros, além da presença de covariâncias não nulas, sugerindo interdependência entre algumas estimativas. A matriz de correlação mostra que existe uma elevada correlação entre os parâmetros A e ε_{sref} , avaliada em 0,82. Segundo Pinto e Schwaab (2007), quando a correlação paramétrica entre parâmetros supera o valor de 0,9 em módulo, é necessário avaliar a necessidade de introduzir esses parâmetros no modelo, uma vez que pequenas mudanças no valor de um dos parâmetros podem ser compensadas com mudanças de um segundo parâmetro correlacionado a ele. Como este não é o caso, estes parâmetros são mantidos no modelo matemático e, além disso, como os demais coeficientes de correlação são baixos a moderados, isto indica que os procedimentos de estimacão dos parâmetros são eficientes e os diferentes efeitos causados por eles no modelo apresentaram identificação precisa.

A seguir, os perfis de concentração volumétrica bidimensionais e as fotos do experimento em tempos espaçados são apresentados. Os dados de entrada da simulação constam na Tabela 3.2, os dados reológicos constam na Tabela 4.1 e os parâmetros do modelo da sedimentação estão na Tabela 4.2.

As Figuras 4.5–4.7 ilustram a dinâmica de sedimentação, sob as perspectivas experimental e da modelagem matemática, ao longo do tempo. Observa-se que o modelo matemático bidimensional reproduz o decaimento da interface superior ao longo do tempo, bem como a formação da região de líquido clarificado (região azul escuro), em concordância com os resultados experimentais. Até aproximadamente 20 minutos de sedimentação, conforme Figuras 4.5 e 4.6, a zona de clarificado apresenta o formato esperado, semelhante ao observado em experimentos em proveta, que não contam com acúmulo de sólidos sobre uma superfície em nível de altura elevada. Entretanto, devido ao acúmulo de sólidos

acima do degrau a partir de 20 minutos, é evidente que a compactação de sólidos ocorre inicialmente sobre o obstáculo, como era de se esperar, enquanto a suspensão continua em sedimentação livre nas posições afastadas. Esta situação pode ser percebida na Figura 4.6c e também no gráfico do decaimento da interface, Figura 4.4a, em que os pontos cinzas, que representam sua altura acima do degrau, já indicam o topo do sedimento formado sobre o ressalto. Enquanto isso, os pontos pretos, que se tratam das alturas afastadas do obstáculo, mostram que a suspensão ainda se encontra em sedimentação livre. As simulações do modelo bidimensional permitem ainda identificar o aumento da concentração de sólidos acima e fora do degrau, especialmente até 20 minutos, conforme Figura 4.6, informação que não é acessível experimentalmente devido à opacidade da suspensão. Note que esta opacidade coincide exatamente com a zona de concentração homogênea, observada facilmente nos perfis de concentração volumétrica para tempos até 20 minutos. Além disso, a partir dos perfis de concentração volumétrica para tempos iguais ou superiores a 30 minutos, Figuras 4.6 e 4.7, observa-se que o modelo representa adequadamente a formação de um leito de sólidos em formato de rampa, indicando sua capacidade de prever a tendência de escorregamento dos sólidos a partir do degrau. Nestes tempos, identificam-se perfis de concentração volumétrica em formato ondulatório, o que é devido ao deslocamento horizontal de sólidos em virtude do ressalto no fundo do recipiente, indicando o aumento da concentração quanto mais próximo do degrau.

A partir da Figura 4.6, nota-se que de 30 minutos em diante o experimento possui fácil visualização, mostrando ser adequadamente representado pelo modelo 2D no que diz respeito à estrutura do leito de sólidos compactados, que possui altura final simulada igual a 10,1 cm na posição afastada do degrau, quando o experimento mostra uma altura final de 9,8 cm, valores muito próximos, e acima do degrau, uma altura final simulada de 6,1 cm, quando no experimento a altura é de 5,6 cm, relativamente próxima.

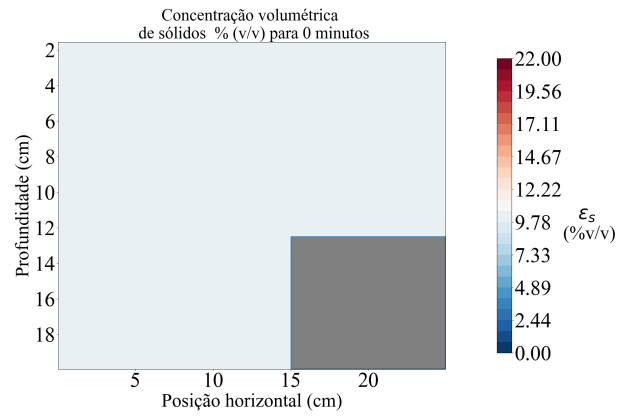
O erro percentual médio (EPM) entre os dados simulados pelo modelo bidimensional e os valores de altura de interface superior ao longo do tempo coletados durante o experimento foi calculado conforme

$$\text{EPM} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{y_i^{\text{exp}} - y_i^{\text{mod}}}{y_i^{\text{exp}}} \right| \times 100. \quad (4.8)$$

O EPM para a posição oposta ao degrau foi avaliado em 4,1 % e acima do mesmo em 2,86 %.



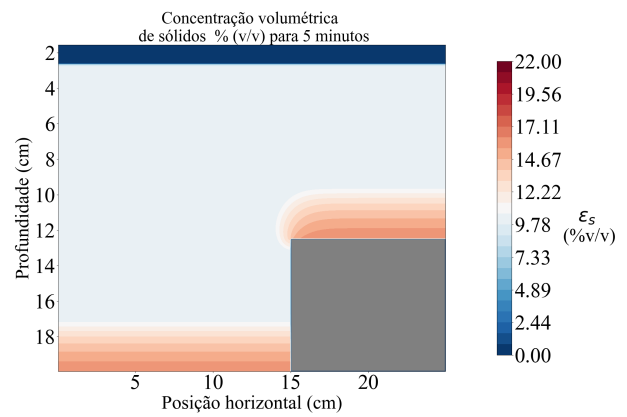
(a) Tempo inicial (Exp.)



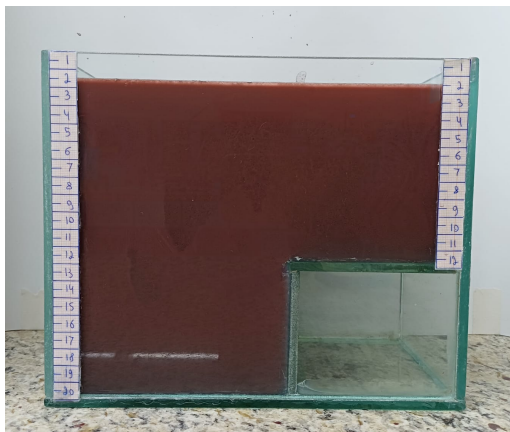
(b) Tempo inicial (Modelo 2D)



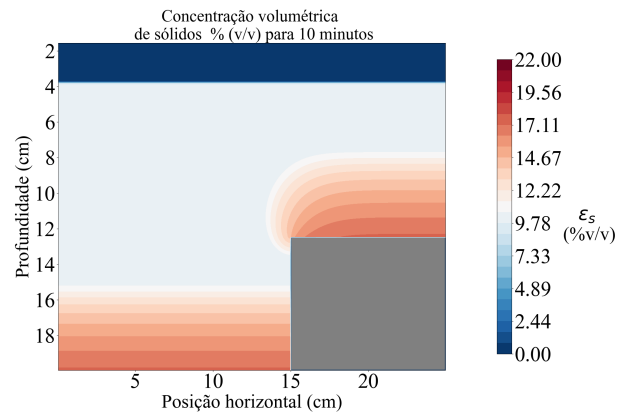
(c) 5 minutos (Exp.)



(d) 5 minutos (Modelo 2D)

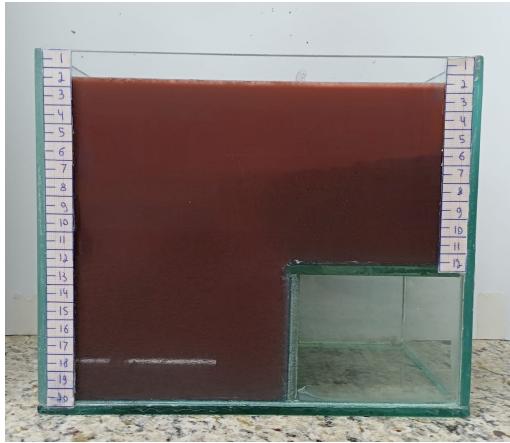


(e) 10 minutos (Exp.)

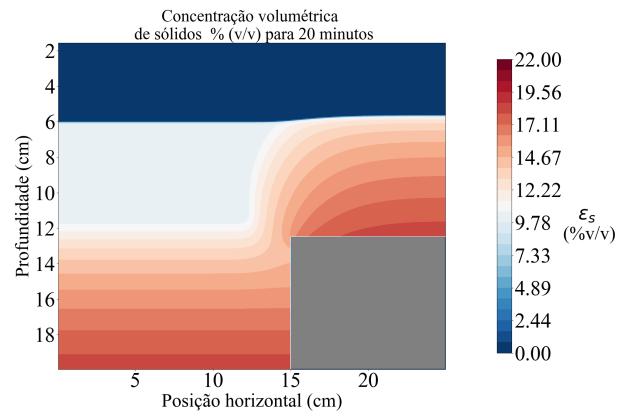


(f) 10 minutos (Modelo 2D)

Figura 4.5. Fotos do experimento no sedimentador 1 e perfis de concentração volumétrica bidimensionais até 10 minutos.



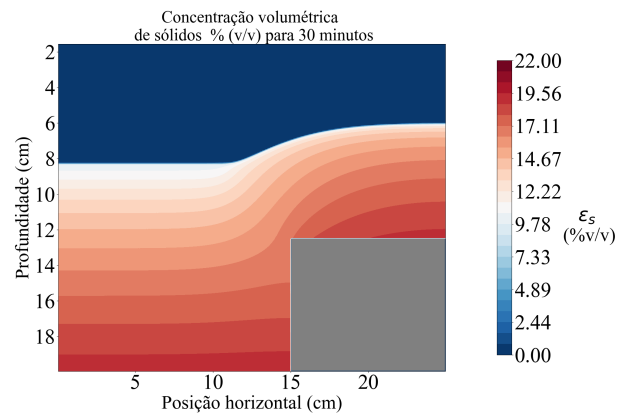
(a) 20 minutos (Exp.)



(b) 20 minutos (Modelo 2D)



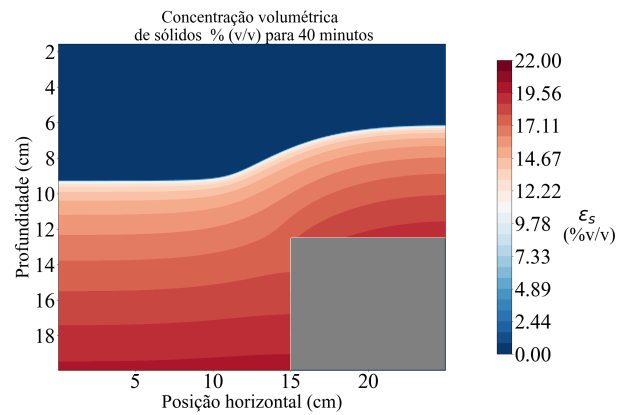
(c) 30 minutos (Exp.)



(d) 30 minutos (Modelo 2D)



(e) 40 minutos (Exp.)

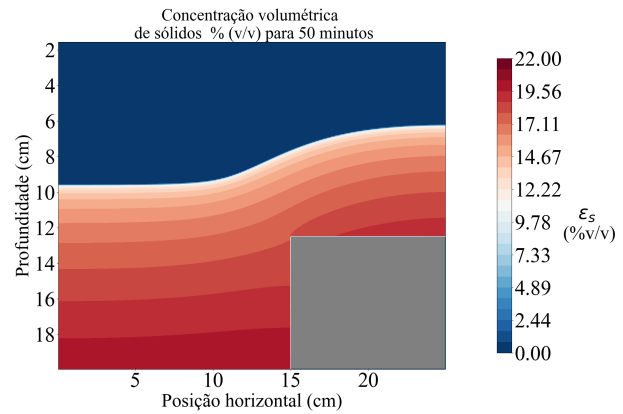


(f) 40 minutos (Modelo 2D)

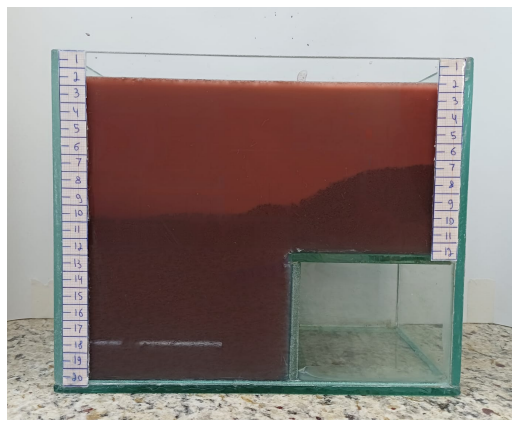
Figura 4.6. Fotos do experimento no sedimentador 1 e perfis de concentração volumétrica bidimensionais de 20 a 40 minutos.



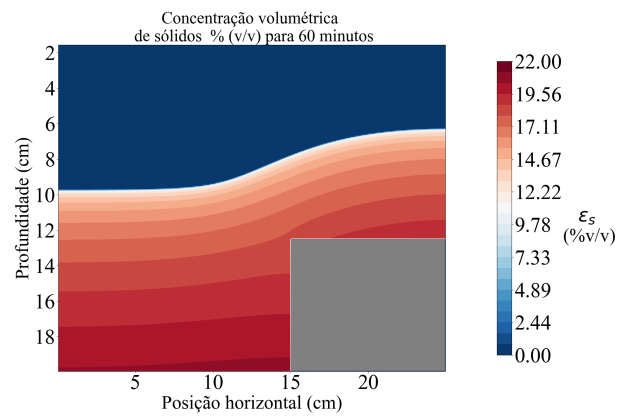
(a) 50 minutos (Exp.)



(b) 50 minutos (Modelo 2D)



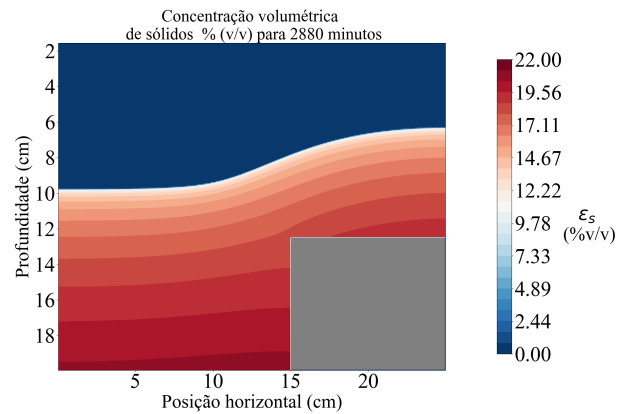
(c) 60 minutos (Exp.)



(d) 60 minutos (Modelo 2D)



(e) Tempo final (Exp.)



(f) Tempo final (Modelo 2D)

Figura 4.7. Fotos do experimento no sedimentador 1 e perfis de concentração volumétrica bidimensionais para 50, 60 minutos e tempo final.

4.3 Sedimentadores 2 e 3 - Experimentos e simulações

Experimentos nos sedimentadores 2 e 3 também foram conduzidos buscando a representação matemática pelo modelo 2D através das simulações. Os parâmetros das Equações 4.4 e 4.5 estimados utilizando as alturas de interface à esquerda no sedimentador 1 foram utilizados nas simulações dos experimentos nos sedimentadores 2 e 3, uma vez que a formulação do fluido é a mesma. Como os erros experimentais obtidos no experimento

realizado no sedimentador 1 são muito baixos, estes erros foram reproduzidos nos pontos coletados para as alturas de interface dos sedimentadores 2 e 3.

- Sedimentador 2

A Figura 4.8 ilustra o decaimento da interface superior no sedimentador 2. Observa-se que seu comportamento acima do degrau foi representado adequadamente pelo modelo bidimensional na zona de compactação, cujos dados experimentais ficaram próximos dos simulados. Quanto aos dados na posição afastada do degrau, estes apresentaram um leve desvio em relação ao modelos matemáticos uni e bidimensional. Isso pode ser devido ao fato de que no sedimentador 1, em que a estimativa ocorreu, o deslocamento de sólidos afeta de forma diferente a altura da interface na posição mais afastada do obstáculo (em virtude da menor largura do degrau), que é onde foram coletadas as alturas. O comportamento experimental observado está mostrado a seguir nas Figuras 4.9 a 4.11, permitindo verificar a diferença na dinâmica de sedimentação devido ao maior comprimento do degrau tanto durante o experimento, como nas simulações.

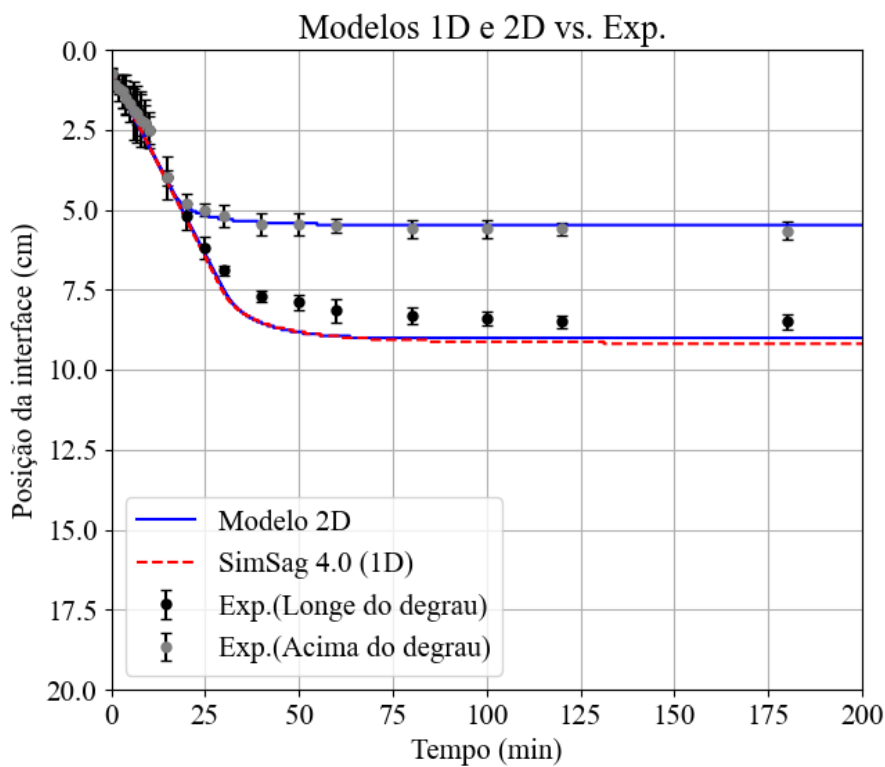


Figura 4.8. Altura de interface superior simulada pelo modelo bidimensional e dados experimentais no sedimentador 2.

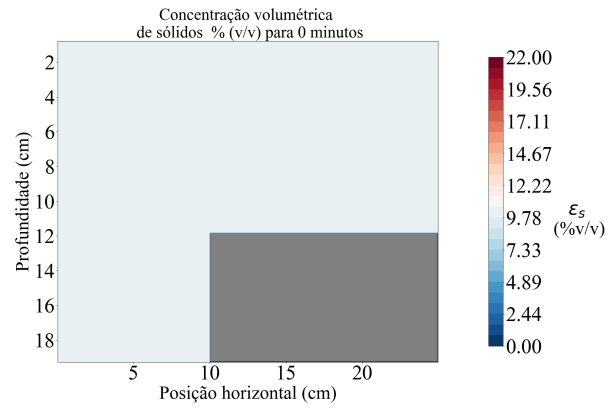
Com relação aos perfis bidimensionais de concentração volumétrica de sólidos, estes resultados estão apresentados a seguir. Observe que o comportamento dos perfis considerando este sedimentador são análogos aos do sedimentador 1, porém representando o acúmulo de sólidos acima do degrau dentro do fluido sobre uma maior área de compactação.

As Figuras 4.9 – 4.11 mostram o comportamento fenomenológico da sedimentação no sedimentador 2. Novamente, até aproximadamente 20 minutos de sedimentação, conforme Figuras 4.9 e 4.10, ainda não é possível visualizar experimentalmente o acúmulo

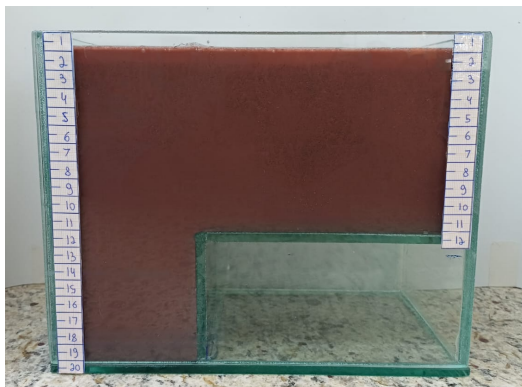
de sólidos sobre o degrau, enquanto que os resultados simulados para estes tempos já demonstram acúmulo significativo de sólidos sobre o obstáculo. Para a posição mais afastada do degrau, os sólidos ainda se encontram em sedimentação livre, comportamento facilmente identificado na Figura 4.8. Apesar dos dados experimentais nestes tempos estarem um pouco afastados do modelo, estes demonstram a sedimentação livre ocorrendo nesta posição. Assim como no sedimentador 1, para tempos superiores a 20 minutos de experimento começa a ser observada a formação do leito de sólidos acima do degrau, tanto no experimento, quanto nos resultados simulados, conforme Figuras 4.10 em diante. Note ainda que a opacidade da suspensão também coincide exatamente com a zona de concentração homogênea para tempos até 20 minutos, sendo na posição mais afastada do degrau a maior opacidade ao passo que já é facilmente observável o topo do sedimento na quina do degrau neste tempo, conforme Figura 4.10c. No sedimentador 2, a formação do leito de sólidos também é evidenciada nos tempos a partir de 30 minutos, com as fotos do experimento, na Figura 4.11, indicando a formação do comportamento ondulatório do leito de sólidos (leve inclinação na zona de compactado) sendo representado matematicamente pelo modelo bidimensional da sedimentação. Este comportamento é ainda mais evidenciado neste sedimentador, uma vez que o degrau é maior em comprimento. Dessa forma, devido a uma maior área de compactação, maior é o leito de sólidos formado neste caso, com uma altura observada experimentalmente de 5,9 cm acima do degrau, para a altura simulada com valor 6,33 cm, um leve desvio entre o valor predito e observado experimentalmente. Quanto à altura do leito longe do degrau, esta apresentou alturas de 10,2 cm e 10,8 cm simuladas e experimental, respectivamente, também valores muito próximos. O EPM, conforme Equação 4.8 para a posição oposta ao degrau foi avaliado em 10,98 % e acima do mesmo em 5,96 %.



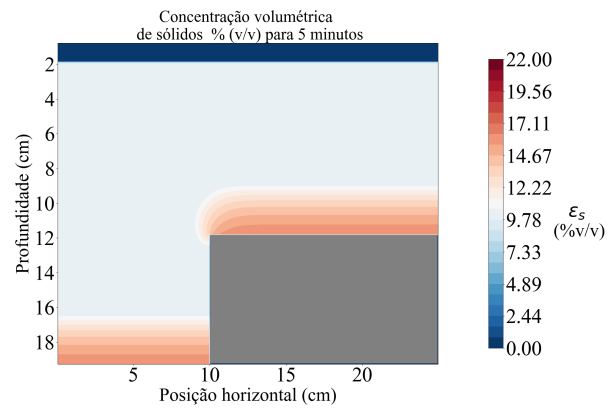
(a) Tempo inicial (Exp.)



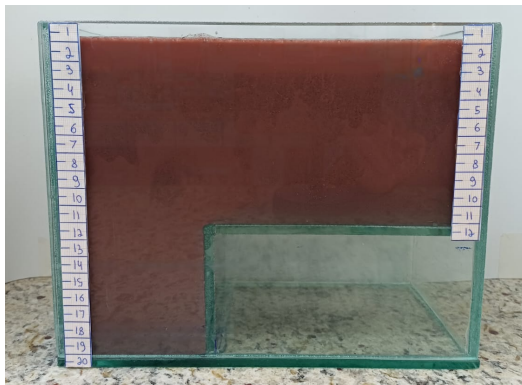
(b) Tempo inicial (Modelo 2D)



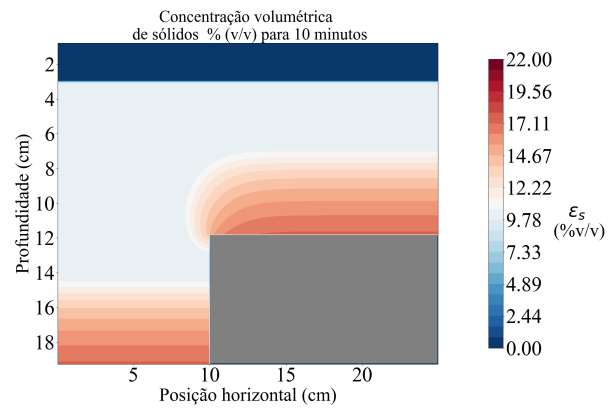
(c) 5 minutos (Exp.)



(d) 5 minutos (Modelo 2D)

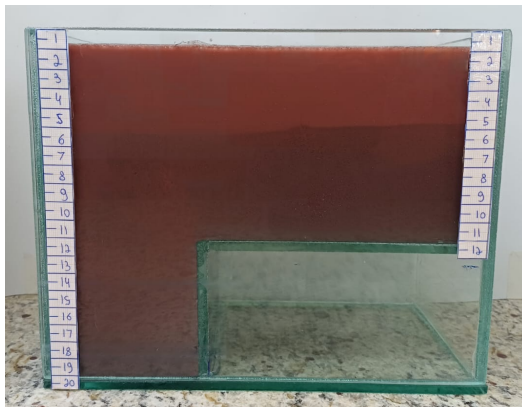


(e) 10 minutos (Exp.)

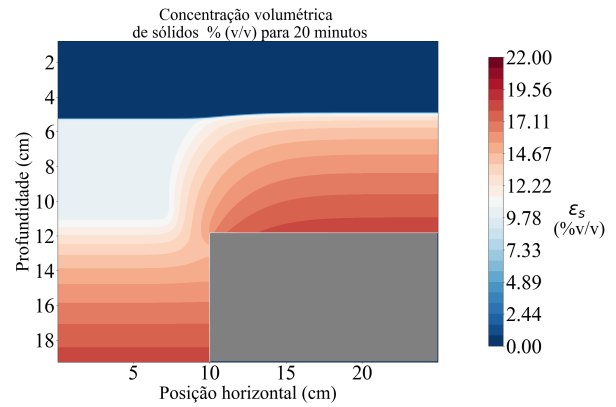


(f) 10 minutos (Modelo 2D)

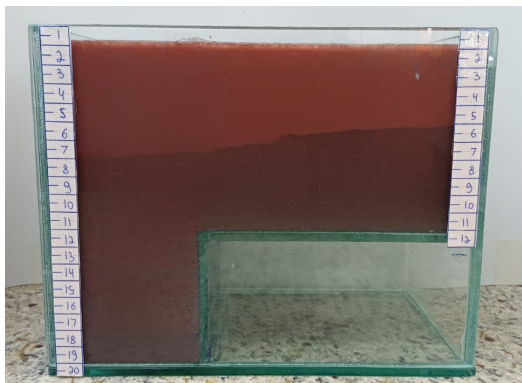
Figura 4.9. Fotos do experimento no sedimentador 2 e perfis de concentração volumétrica bidimensionais até 10 minutos.



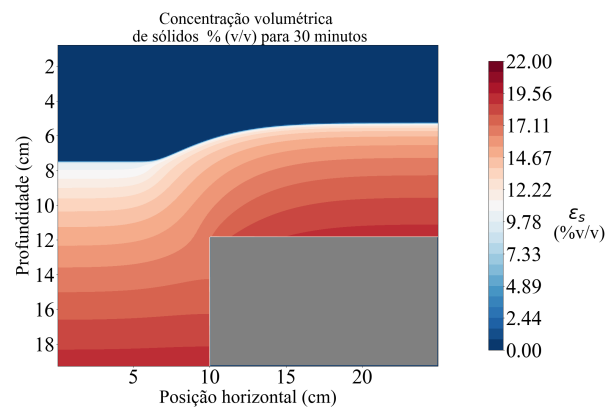
(a) 20 minutos (Exp.)



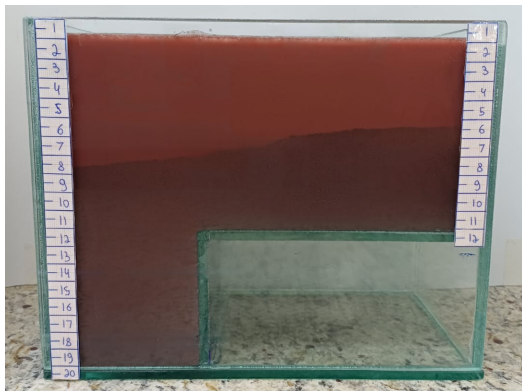
(b) 20 minutos (Modelo 2D)



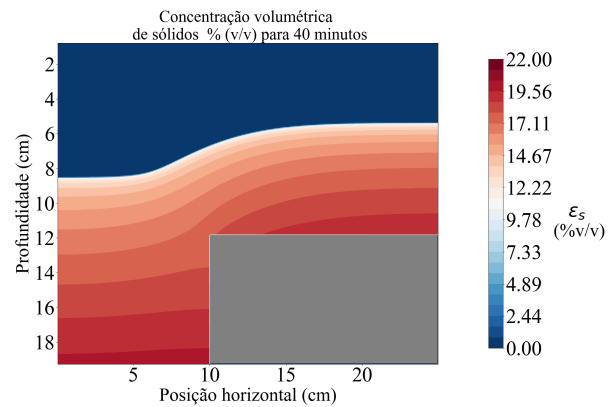
(c) 30 minutos (Exp.)



(d) 30 minutos (Modelo 2D)



(e) 40 minutos (Exp.)



(f) 40 minutos (Modelo 2D)

Figura 4.10. Fotos do experimento no sedimentador 2 e perfis de concentração volumétrica bidimensionais de 20 a 40 minutos.

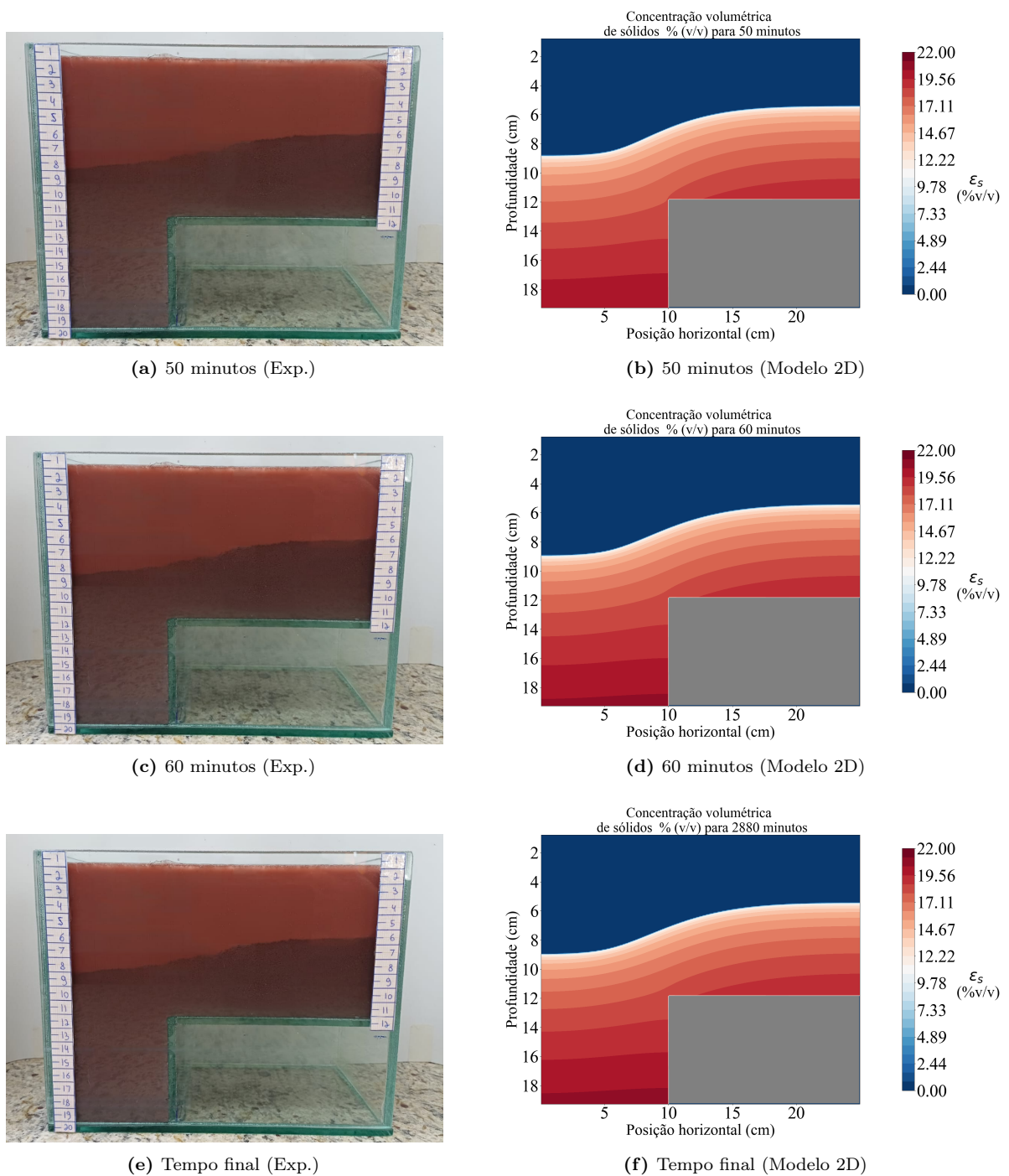


Figura 4.11. Fotos do experimento no sedimentador 2 e perfis de concentração volumétrica bidimensionais para 50, 60 minutos e tempo final.

• Sedimentador 3

O sedimentador 3 é o recipiente com o degrau mais alto entre os três e a Figura 4.12 ilustra a dinâmica da sedimentação neste cenário. Observando-se os dados de altura de interface afastada do degrau (pontos pretos) frente aos resultados simulados utilizando os parâmetros estimados da Tabela 4.2, verifica-se um grande desvio dos modelos para as alturas experimentais na zona de sedimentação livre. O distanciamento destes dados pode estar atribuído à difícil identificação da interface devido à opacidade do fluido na

zona de concentração homogênea, como já visto nos demais experimentos. No entanto, a zona de compactação foi fielmente representada pelos modelos matemáticos, pois os dados experimentais ficaram muito próximos dos simulados por ambos modelos. Com relação aos dados de altura acima do degrau (pontos cinza), os dados experimentais ficaram muito bem ajustados ao modelo 2D, ou seja, utilizar os dados de interface longe do degrau para estimar os parâmetros das equações da permeabilidade do meio e do gradiente de pressão foi suficiente para promover um ajuste coerente com o comportamento da interface superior acima do degrau, bem como representar de forma adequada as zonas típicas de sedimentação.

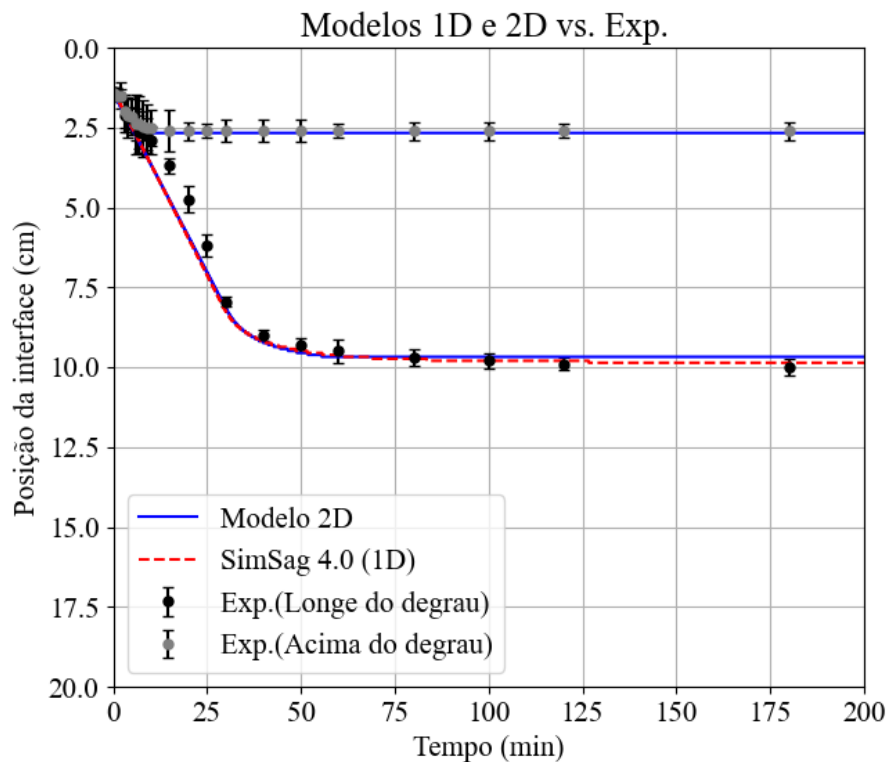


Figura 4.12. Altura de interface superior simulada pelo modelo bidimensional e dados experientais no sedimentador 3.

Os perfis de concentração volumétrica bidimensionais obtidos utilizando no modelo matemático os parâmetros estimados da Tabela 4.2 estão mostrados a seguir nas Figuras 4.13 e 4.14. Observe nas Figuras 4.13 e 4.14 que o modelo matemático bidimensional representou adequadamente as zonas de clarificado (região azul escuro), de concentração homogênea (região cinza), de transição (gradiente de cores) e de compactação (laranja escuro). Neste sedimentador, esperava-se que a concentração de sólidos acima do degrau no tempo final do experimento fosse menor, em virtude da menor quantidade de sólidos sedimentando nesta região, pois a interface superior ultrapassa o degrau. Portanto, quando isso ocorre, acima do degrau o fenômeno é de compactação e não mais de sedimentação, como na zona fora do degrau. De fato, o modelo 2D representou adequadamente este menor acúmulo de sólidos acima do ressalto, que pelo gráfico de gradiente de cores indica uma menor concentração no tempo final, enquanto que o leito formado fora do ressalto apresenta maior concentração, conforme Figuras 4.14f. Note ainda que a partir da Figura 4.13d, quando a interface ultrapassa o degrau, o modelo tende a formar um leve filamento de

fluido que acompanha o degrau verticalmente. Este fenômeno não acontece no experimento, sendo de natureza puramente numérica, possivelmente atribuída à natureza contínua do modelo. Na Figura 4.12 é possível perceber também o mesmo distanciamento do modelo para os dados experimentais observado na zona de sedimentação livre e de concentração homogênea, em que assim como nos outros experimentos, também apresentou difícil visualização da interface superior para tempos até 25 minutos, e por isso, nota-se este comportamento atípico para os dados experimentais. Note que o modelo bidimensional descreve a existência das zonas de sedimentação livre e de concentração homogênea também até 25 minutos, conforme Figura 4.13f. Percebe-se também a tendência para a estabilização da interface superior aproximadamente em 40 minutos, como pode ser notado para os experimentos anteriores.

Em resumo, todos os experimentos foram simulados utilizando os parâmetros obtidos com o experimento em triplicata do sedimentador 1, com resultados que respeitaram a dinâmica esperada para o fenômeno da sedimentação em batelada. As zonas de clarificado, sedimentação livre, concentração homogênea, transição e de compactado foram devidamente representadas através dos perfis de concentração volumétrica bidimensionais. A característica ondulatória dos perfis de concentração mostrou a tendência do sólidos serem deslocados frente à presença do degrau, que é oriundo da contração do diâmetro da região anular. Dessa forma, quanto mais perto do degrau, maior é a concentração de sólidos, pois existe um leito consolidado de material sedimentado acima do mesmo.

Os sedimentadores 1 e 2 diferem apenas em largura e a dinâmica do fenômeno nesses vasos foi muito similar, no sentido de que a diferença visível foi o maior leito de sólidos formado no sedimentador 2, pois sua área é maior. Já no sedimentador 3, a interface ultrapassou o degrau, formando duas zonas de sedimentação independentes, acima e fora do degrau. Neste caso, a concentração do leito de sólidos acima do degrau e sua altura foram menores, devido à menor quantidade de material sedimentando nesta posição, uma vez em que a interface o ultrapassa rapidamente e, conseqüentemente, os sólidos também. O EPM, conforme Equação 4.8 para a posição oposta ao degrau foi avaliado em 10,14 % e acima do mesmo em 15,63 %. As alturas preditas pelo modelo 2D acima e afastada do degrau foram, respectivamente, de 10,3 cm e 2,3 cm, enquanto o experimento conta com as alturas nestas posições avaliadas em 10 cm e 2,4 cm.

De maneira geral, a modelagem bidimensional permitiu a observação do aumento da concentração volumétrica de sólidos acima e fora do degrau em todos os experimentos. Essa informação não é obtida facilmente nos anulares e por isso sua previsão nestas regiões é vantajosa. A consideração unidimensional não leva em conta a redução do espaço disponível para a sedimentação em virtude do degrau, dessa forma o acúmulo de sólidos no fundo do anular predito pelos modelos pode ser diferente uma vez que material particulado é retido sobre o ressalto, conseqüentemente, leitos de alturas diferentes são formados acima do degrau e no fundo do anular.

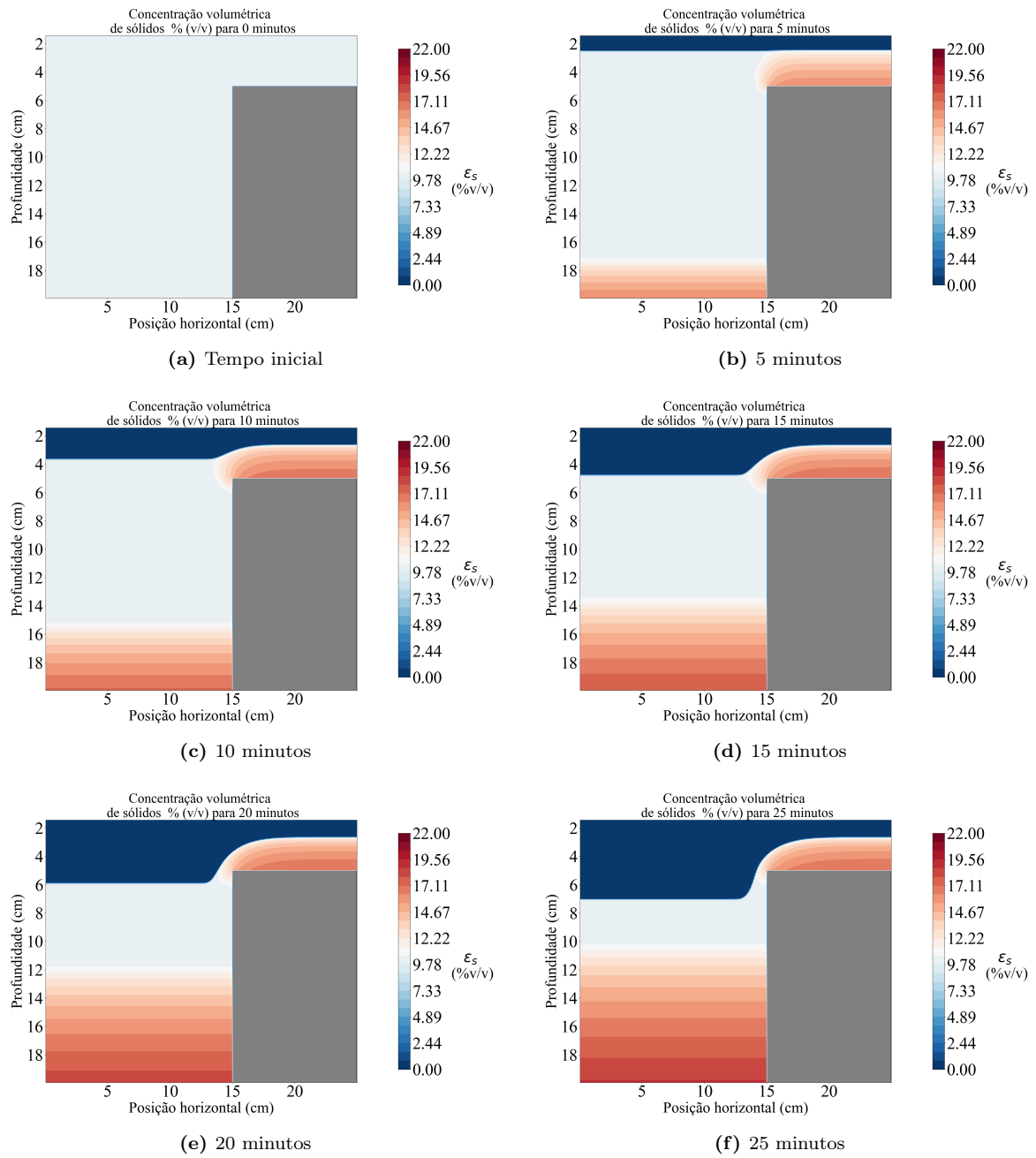


Figura 4.13. Perfis de concentração volumétrica bidimensionais no sedimentador 3 até 25 minutos.

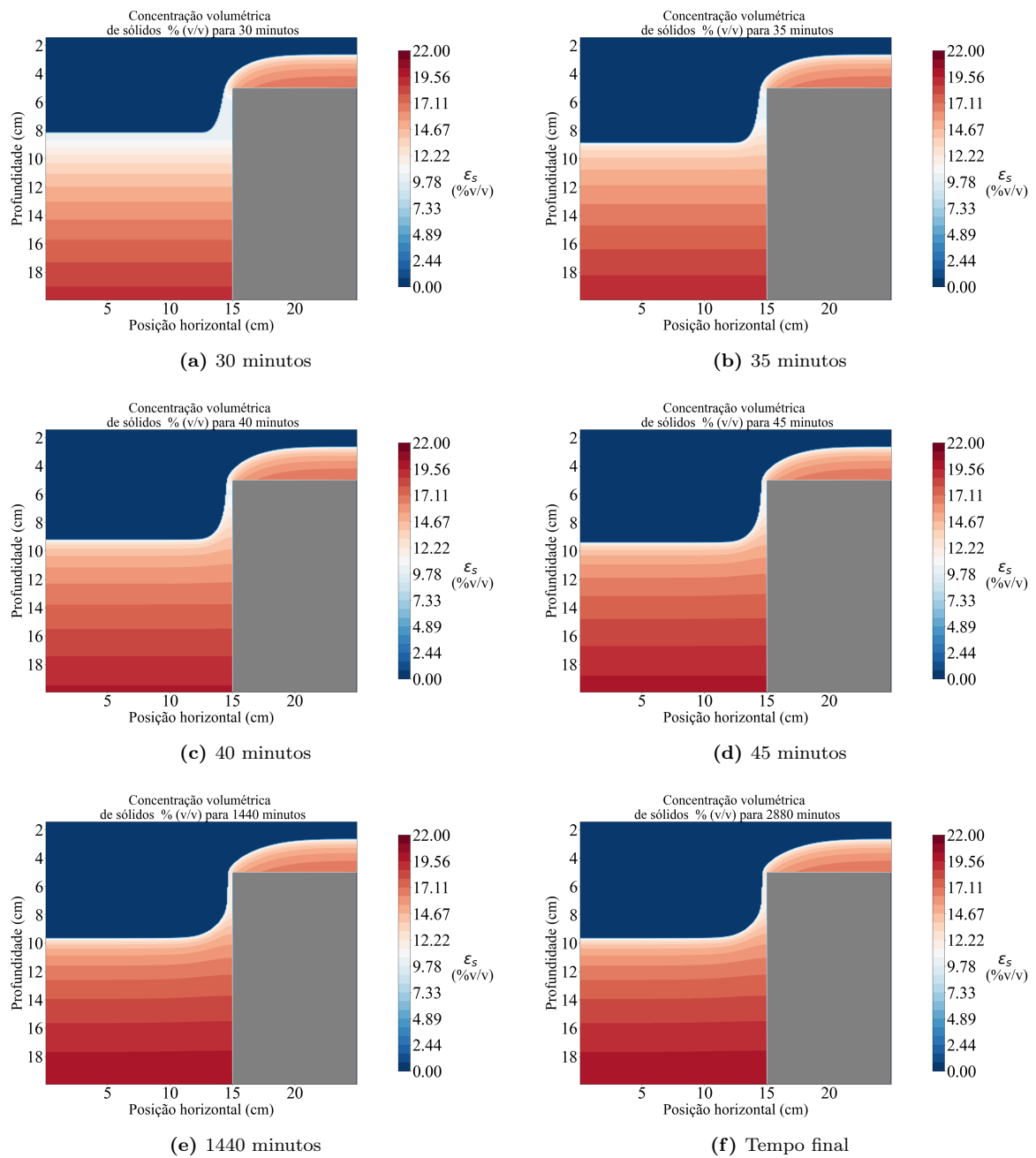


Figura 4.14. Perfis de concentração volumétrica bidimensionais no sedimentador 3 de 30 minutos até o tempo final.

5 CONCLUSÕES

Desenvolveu-se um modelo matemático bidimensional da sedimentação de sólidos adensantes de fluidos de perfuração para descrever o comportamento do fenômeno em anulares com presença de um degrau dentro dessa região. A validação deste modelo foi possível através de dados experimentais de altura de interface superior decaindo ao longo do tempo para uma suspensão formulada com fluido base água contendo barita como material adensante. Para recriar cenários em que há redução no diâmetro do anular em escala de bancada, três vasos sedimentadores bidimensionais contendo diferentes dimensões de degrau foram confeccionados para serem utilizados para a realização dos experimentos.

A validação deste modelo 2D deu-se por meio da análise dos resultados simulados, comparando-os com os dados experimentais obtidos em cada experimento e da análise estatística de parâmetros estimados. De forma a realizar o ajuste do modelo aos dados experimentais, foi feita a estimação de parâmetros reológicos do modelo Power-Law e das equações constitutivas que o compõem, isto é, da permeabilidade do meio (Kozeny-Carman) e gradiente de pressão. Esta estimação ocorreu por meio de algoritmo de enxame de partículas, cujos parâmetros obtidos foram empregados nas simulações bidimensionais. Além disso, foi possível utilizar o consolidado simulador unidimensional de adensantes, Simsag, para a estimação dos parâmetros que foram utilizados no código bidimensional.

A partir dos dados de altura de interface superior ao longo do tempo em triplicata, realizou-se a estimação dos parâmetros inerentes às equações mencionadas anteriormente. Estes parâmetros foram utilizados nas simulações que visaram recriar o cenário nos demais sedimentadores e seus resultados se mostraram coerentes fenomenologicamente, em que os desvios entre experimento e modelo encontrados puderam ser explicados pela dificuldade em visualização da interface superior.

Os experimentos realizados foram reproduzidos pelo simulador 2D e SimSag (1D) respeitando o intervalo de confiança dos parâmetros e o dos erros experimentais, para o caso do sedimentador em que a triplicata foi realizada. Nos demais sedimentadores, a zona de sedimentação livre foi a região que apresentou decaimento da interface superior com maior desvio do modelo matemático. Contudo, a zona de compactação de sólidos na posição afastada do degrau foi representada adequadamente nos sedimentadores 1 e 3, com os resultados simulados no sedimentador 2 apresentando leve desvio em relação aos dados experimentais. Em contrapartida, as simulações de todos os experimentos apresentaram resultados coerentes para a interface superior decaindo na posição acima do degrau. Nesta posição, os valores simulados ficaram dentro do intervalo dos erros experimentais a 95 % de confiança. As alturas de leito compactado obtidas ao final do experimento foram comparadas com as simuladas e a diferença entre elas foi baixa, o que mostra que apesar da zona de sedimentação livre experimental não seguir a risca os dados experimentais, a zona de compactado ainda assim foi representada, o que é muito importante para simular alturas finais de compactado em cenários em anulares reais. Além disso, os erros médios percentuais entre valores experimentais e preditos foi considerado baixo em todos os casos.

Em termos de perfis de concentração volumétrica bidimensionais, os resultados permitiram observar que o modelo 2D foi capaz de representar as zonas típicas da sedimentação em todos os três experimentos. Além disso, foi possível verificar o aumento da concentração de sólidos quanto mais próximo do degrau, uma vez que os sólidos compactam primeiro acima de sua superfície. Este comportamento faz com que o leito de sólidos final apresente formato curvo, o que também foi bem representado pelo modelo matemático 2D.

Em resumo, os resultados obtidos com o simulador 2D foram coerentes com o fenômeno observado experimentalmente em todos os três sedimentadores. Todas as zonas típicas da sedimentação foram representadas adequadamente, de tal forma que perfis de concentração volumétrica bidimensionais foram analisados e comparados com fotos do experimento, permitindo a correta identificação de cada uma das zonas. Além disso, o deslocamento de sólidos causado pelo degrau pôde ser representado corretamente pelo modelo, de forma que os dados experimentais de altura da interface superior da suspensão foram devidamente representados no sedimentador 1, tanto acima quanto longe do degrau. Nos experimentos realizados nos demais sedimentadores, os parâmetros estimados a partir do sedimentador 1 permitiram que o modelo representasse adequadamente o decaimento da interface na posição acima do degrau. Em contrapartida, a região afastada do obstáculo teve pequeno desvio dos dados experimentais, ainda que sem prejuízo ao balanço de massa, que em todas as simulações foi conservado.

6 TRABALHOS FUTUROS

A sedimentação em regiões anulares de poços de petróleo tem sido objeto de inúmeras investigações científicas. Uma configuração comumente encontrada em operações reais, tanto na perfuração quanto na produção de poços, é a de poços inclinados. No entanto, a modelagem matemática dessa configuração requer uma formulação capaz de representar o sistema de coordenadas não ortogonais associado à geometria inclinada do escoamento. Essa abordagem permite incorporar, de forma mais precisa, os efeitos da gravidade e da orientação do poço na dinâmica de deposição de partículas no leito. Nesse contexto, as equações governantes do problema bidimensional podem ser adaptadas por meio de uma transformação de coordenadas, possibilitando a representação da sedimentação em geometrias inclinadas e com malhas não uniformes. Adicionalmente, o aumento da escala das simulações, aliado à construção de um banco de dados abrangente das propriedades dos fluidos, possibilita a análise de diferentes configurações de sedimentação em múltiplas escalas. No que diz respeito à aproximação dos fluxos nas fronteiras de cada volume de controle pelo método dos volumes finitos, esta pode ser feita também por upwind de segunda ordem, e sua solução comparada com os resultados deste trabalho. Por fim, a simulação de intervalos de tempo mais longos também se mostra relevante, especialmente para fluidos altamente viscosos, que apresentam lenta compactação, permitindo avaliar com maior precisão a capacidade preditiva do modelo nessas condições.

REFERÊNCIAS

- AROUCA, F. d. O. et al. Uma contribuição ao estudo da sedimentação gravitacional em batelada. Universidade Federal de Uberlândia, 2007.
- AWAD, A. M. et al. Cfd modeling of particle settling in drilling fluids: Impact of fluid rheology and particle characteristics. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, Elsevier, v. 199, p. 108326, 2021.
- BARNES, H. A.; HUTTON, J. F.; WALTERS, K. **An introduction to rheology**. [S.l.]: Elsevier, 1989. v. 3.
- BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. **Fenômenos de Transporte**. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: Editora LTC, 2004. 856 p.
- BÜRGER, R.; CONCHA, F. Mathematical model and numerical simulation of the settling of flocculated suspensions. **International Journal of Multiphase Flow**, Elsevier, v. 24, n. 6, p. 1005–1023, 1998.
- CAENN, R.; CHILLINGAR, G. V. Drilling fluids: State of the art. **Journal of petroleum science and engineering**, Elsevier, v. 14, n. 3-4, p. 221–230, 1996.
- CALÇADA, L. et al. Barite sag and its impact on annular pressure build up mitigation in producing offshore wells. In: SPE. **SPE Annual Technical Conference and Exhibition?** [S.l.], 2016. p. D021S023R008.
- CARMAN, P. C. Fluid flow through granular beds. **Trans. Inst. Chem. Eng. London**, v. 15, p. 150–156, 1937.
- CHHABRA, R. P.; RICHARDSON, J. O. **Non-Newtonian Flow and Applied Rheology**. 2. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2008. 536 p.
- COE, K.; CLEVENGER, G. Method of determining the capacity of slime settling tanks. **Trans. AIME**, v. 55, p. 203–210, 1916.
- COMINGS, E. Thickening calcium carbonate slurries. **Industrial & Engineering Chemistry**, ACS Publications, v. 32, n. 5, p. 663–667, 1940.
- CONCHA, F.; BUSTOS, M. A modification of the kynch theory. **AIChE journal**, 1987.
- D'ÁVILA, J. S. **Um modelo matemático para a sedimentação**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro., 1978.
- DIXON, D. Momentum-balance aspects of free-settling theory. i. batch thickening. **Separation Science**, Taylor & Francis, v. 12, n. 2, p. 171–191, 1977.
- EYMARD, R.; GALLOUËT, T.; HERBIN, R. Finite volume methods. **Handbook of numerical analysis**, Elsevier, v. 7, p. 713–1018, 2000.

FAKOYA, M. F.; AHMED, R. Experimental and modeling studies on dynamic barite sag and effects of particle size, shear rate, and fluid rheology. **Geoenergy Science and Engineering**, Elsevier, v. 226, p. 211780, 2023.

FANN. **Mud Balance 140**. 2025. Disponível em: <<https://www.fann.com/en/products/mudbalance-140>>. Acesso em: 27 out. 2025. Disponível em: <<https://www.fann.com/en/products/mudbalance-140>>.

Fann Instrument Company. **Model 35 Viscometer**. 2026. Página do produto Model 35 Viscometer, viscometro rotacional padrão da indústria para medir viscosidade de fluidos. Disponível em: <<https://www.fann.com/en/products/model-35>>.

Filson Filters. **An introduction to oil casings: basics, working principles, types and grades**. 2024. Filson Filters. Acesso em: 12 out. 2025. Disponível em: <<https://www.filsonfilters.com/an-introduction-to-oil-casings-basics-working-principles-types-and-grades/>>.

FINK, J. **Petroleum engineer's guide to oil field chemicals and fluids**. [S.l.]: Gulf Professional Publishing, 2021.

FOX, R. W.; PRITCHARD, P. J.; MCDONALD, A. T. **Introdução À Mecânica Dos Fluidos**. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000.

FRANÇA, S.; MASSARANI, G.; JR, E. B. Study on batch sedimentation simulation—establishment of constitutive equations. **Powder technology**, Elsevier, v. 101, n. 2, p. 157–164, 1999.

FUDIHARA, T. J. **Metodo dos volumes finitos aplicado a modelagem matematica e simulação computacional de um forno aquecido por jato de chama com escoamento em vortice**. Tese (Doutorado) — [sn], 2000.

GAO, D.; QIAN, F.; ZHENG, H. On a method of prediction of the annular pressure buildup in deepwater wells for oil & gas. **Computer Modeling in Engineering & Sciences**, Tech Science Press, v. 89, n. 1, p. 1, 2012.

HAIRER, E.; WANNER, G.; NØRSETT, S. P. **Solving ordinary differential equations I: Nonstiff problems**. [S.l.]: Springer, 1993.

HAMDI, S.; SCHIESSER, W. E.; GRIFFITHS, G. W. Method of lines. **Scholarpedia**, v. 2, n. 7, p. 2859, 2007.

JUNEJA, M.; NAGAR, S. Particle swarm optimization algorithm and its parameters: A review. In: IEEE. **2016 International conference on control, computing, communication and materials (ICCCCM)**. [S.l.], 2016. p. 1–5.

KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle swarm optimization. In: IEEE. **Proceedings of ICNN'95-international conference on neural networks**. [S.l.], 1995. v. 4, p. 1942–1948.

KOZENY, J. Ueber kapillare leitung des wassers im boden. **Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien**, v. 136, p. 271, 1927.

KYNCH, G. J. A theory of sedimentation. **Transactions of the Faraday society**, Royal Society of Chemistry, v. 48, p. 166–176, 1952.

LARUCCIA, M. B. **Velocidade de sedimentação em fluidos não-newtonianos: efeito da forma e da concentração de partículas**. Tese (Doutorado) — [sn], 1990.

LEVEQUE, R. J. **Finite volume methods for hyperbolic problems**. [S.l.]: Cambridge university press, 2002. v. 31.

LUZ, A. B. da; SAMPAIO, J. A.; FRANÇA, S. C. A. (Ed.). **Tratamento de Minérios**. 5. ed. Ministério da Ciência e Tecnologia - MCT: Centro de Tecnologia Mineral, 2010. CETEM.

MACHADO, J. C. V. **Reologia e escoamento dos fluidos: ênfase na indústria do petróleo**. [S.l.]: Interciência, 2002.

MALISKA, C. R. **Fundamentals of Computational Fluid Dynamics : The Finite Volume Method**. [S.l.]: Springer, 2023.

MALVERN PANALYTICAL. **Mastersizer Range**. 2025. Disponível em: <<https://www.malvernpanalytical.com/br/products/product-range/mastersizer-range>>. Acesso em: 27 out. 2025. Disponível em: <<https://www.malvernpanalytical.com/br/products/product-range/mastersizer-range>>.

MASSARANI, G. et al. Escoamento de fluidos não-newtonianos na vizinhança de partículas sólidas. 1978.

MOTTA, A. B. G. et al. Modeling the impact of the temperature profile on the sedimentation process for shear thinning suspensions in the annulus of oil well. **Powder Technology**, Elsevier, v. 441, p. 119842, 2024.

MUNIZ, A. R. Desenvolvimento de um método de volumes finitos de alta ordem para a simulação de escoamentos de fluidos viscoelásticos. 2003.

NGUYEN, T. et al. Predicting dynamic barite sag in oil based drilling fluids. National Energy Technology Laboratory, 2006.

OKESANYA, T.; ABDUKARIMOV, A.; KURU, E. Generalized models for predicting the drag coefficient and settling velocity of rigid spheres in viscoelastic and viscoinelastic power-law fluids. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, Elsevier, v. 191, p. 107077, 2020.

PINTO, A. A. R. et al. Modelagem e simulação do fenômeno de sedimentação de sólidos adensantes em suspensões não newtonianas confinadas em regiões anulares sob condições não isotérmicas. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2020.

PINTO, J. C. **Métodos numéricos em problemas de engenharia química**. [S.l.]: Editora E-papers, 2001.

PINTO, J. C.; SCHWAAB, M. **Análise de Dados Experimentais: I. Fundamentos de Estatística e Estimação de Parâmetros**. [S.l.]: Editora E-papers, 2007.

RAHMAN, S. S.; CHILINGARIAN, G. V. **Casing Design: Theory and Practice**. Amsterdam: Elsevier, 1995. 372 p.

- RICHARDSON, J. F.; ZAKI, W. N. Sedimentation and fluidisation: Part i. **Trans. Instn Chem. Engrs**, v. 32, p. 82–100, 1954.
- ROCHA, R. R. et al. Settling of weighting agents in non-newtonian fluids to off-shore drilling wells: Modeling, parameter estimation and analysis of constitutive equations. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, Elsevier, v. 184, p. 106535, 2020.
- ROCHA, R. R. et al. Estudo teórico-experimental da sedimentação em batelada: monitoramento e modelagem de perfis de concentração de sólidos e análise de equações constitutivas. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2018.
- SANTANA, V. et al. Effect of the fluid rheology on low-density particle settling. **Physics of Fluids**, AIP Publishing, v. 38, n. 2, 2026.
- SCHWALBERT, M. **Simulação de escoamentos não newtonianos não isotérmicos e sua aplicação à engenharia de poços de petróleo**. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro. COPPE/UFRJ ..., 2013.
- SCOTT, K. J. Experimental study of continuous thickening of a flocculated silica slurry. **Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals**, ACS Publications, v. 7, n. 4, p. 582–595, 1968.
- SEGTOVICH, I. S. V. et al. **Parameter Estimation for Nonlinear Models**. Zenodo, 2019. GitHub repository. Computational code repository. Disponível em: <<https://doi.org/10.5281/zenodo.2653205>>.
- SHARMA, S. et al. Numerical investigation on solids settling in a non-newtonian slurry inside a horizontal flume. **Physics of Fluids**, AIP Publishing, v. 36, n. 7, 2024.
- SILVA, V. d. C. **Efeito da Temperatura e da Taxa de Cisalhamento na Reologia de Fluidos de Perfuração em Problemas de Sedimentação de Adensantes**. 371 p. Dissertação (Dissertação), Seropédica, RJ, 2023. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química, Tecnologia Química). Departamento de Engenharia Química, Instituto de Tecnologia, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2023.
- SOUZA, J. M. d. et al. Estudo da sedimentação de sólidos adensantes baseado na técnica de monitoramento da pressão hidrostática. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2024.
- THOMAS, J. E. **Fundamentos da Engenharia de Petróleo**. [S.l.]: PETROBRAS, 2001.
- TILLER, F. Basic data fitting in filtration. **J. Chin. I. Chem. Engrs.**, v. 11, p. 61–67, 1980.
- TILLER, F. M. Revision of kynch sedimentation theory. **AIChE Journal**, Wiley Online Library, v. 27, n. 5, p. 823–829, 1981.
- WAKEMAN, R.; HOLDICH, R. Theoretical and experimental modelling of solids and liquid pressures in batch sedimentation. **Filtration & separation**, v. 21, n. 6, p. 420–422, 1984.

WANG, G. et al. Determination method for maximum allowable value. **All Earth**, Taylor & Francis, v. 36, n. 1, p. 1–11, 2024.

ANEXO

A - DADOS EXPERIMENTAIS DE ALTURA DE INTERFACE SUPERIOR AO LONGO DO TEMPO EM CADA SEDIMENTADOR BIDIMENSIONAL

Tabela A.1. Altura da interface superior afastada do degrau decaindo ao longo do tempo no experimento do sedimentador bidimensional 1 (Triplicata).

Tempo (min)	Altura (cm)	Variância (cm ²)	Desvio padrão (cm)
0	1,52	0,006	0,076
1	1,58	0,011	0,104
2	2,07	0,043	0,208
3	2,20	0,070	0,265
4	2,35	0,093	0,304
5	2,50	0,030	0,173
6	2,67	0,061	0,247
7	2,85	0,067	0,260
8	3,05	0,123	0,350
9	3,33	0,076	0,275
10	3,60	0,048	0,218
15	4,67	0,013	0,115
20	6,57	0,043	0,208
25	8,15	0,032	0,180
30	8,82	0,006	0,076
40	9,40	0,008	0,087
50	9,57	0,013	0,115
60	9,75	0,032	0,180
80	9,90	0,018	0,132
100	9,97	0,013	0,115
120	10,00	0,010	0,100
180	10,02	0,016	0,126
240	10,02	0,016	0,126
1440	10,02	0,016	0,126
2880	10,02	0,016	0,126

Tabela A.2. Altura da interface superior acima do degrau decaindo ao longo do tempo no experimento do sedimentador bidimensional 1 (Triplicata).

Tempo (min)	Altura (cm)	Variância (cm ²)	Desvio padrão (cm)
0	1,50	0,010	0,100
1	1,58	0,011	0,104
2	2,07	0,013	0,115
3	2,20	0,070	0,265
4	2,40	0,070	0,265
5	2,67	0,083	0,289
6	2,87	0,213	0,462
7	2,98	0,201	0,448
8	3,13	0,173	0,416
9	3,40	0,130	0,361
10	3,67	0,083	0,289
15	4,88	0,111	0,333
20	5,53	0,023	0,153
25	5,83	0,013	0,115
30	6,05	0,033	0,180
40	6,22	0,031	0,176
50	6,33	0,031	0,176
60	6,43	0,006	0,076
80	6,47	0,016	0,126
100	6,48	0,016	0,126
120	6,50	0,010	0,100
180	6,58	0,016	0,126
240	6,60	0,010	0,100
1440	6,80	0,070	0,265
2880	6,90	0,130	0,361

Tabela A.3. Altura da interface superior afastada do degrau decaindo ao longo do tempo no experimento do sedimentador bidimensional 2.

Tempo (min)	Altura (cm)	Variância (cm ²)	Desvio padrão (cm)
0	0,75	0,006	0,076
1	1,10	0,011	0,104
2	1,20	0,043	0,208
3	1,30	0,070	0,265
4	1,40	0,093	0,304
5	1,50	0,030	0,173
6	1,70	0,061	0,247
7	1,80	0,067	0,260
8	2,00	0,123	0,350
9	2,30	0,076	0,275
10	2,50	0,048	0,218
15	4,00	0,013	0,115
20	5,20	0,043	0,208
25	6,20	0,032	0,180
30	6,90	0,006	0,076
40	7,70	0,008	0,087
50	7,90	0,013	0,115
60	8,15	0,032	0,180
80	8,30	0,018	0,132
100	8,40	0,013	0,115
120	8,50	0,010	0,100
180	8,50	0,016	0,126
240	8,50	0,016	0,126
1440	8,50	0,016	0,126
2880	8,50	0,016	0,126

Tabela A.4. Altura da interface superior acima do degrau decaindo ao longo do tempo no experimento do sedimentador bidimensional 2.

Tempo (min)	Altura (cm)	Variância (cm ²)	Desvio padrão (cm)
0	0,75	0,010	0,100
1	1,10	0,011	0,104
2	1,20	0,013	0,115
3	1,30	0,070	0,265
4	1,50	0,070	0,265
5	1,70	0,083	0,289
6	1,90	0,213	0,462
7	2,00	0,201	0,448
8	2,20	0,173	0,416
9	2,30	0,130	0,361
10	2,50	0,083	0,289
15	4,00	0,111	0,333
20	4,80	0,023	0,153
25	5,00	0,013	0,115
30	5,20	0,033	0,180
40	5,45	0,031	0,176
50	5,45	0,031	0,176
60	5,50	0,006	0,076
80	5,60	0,016	0,126
100	5,60	0,016	0,126
120	5,60	0,010	0,100
180	5,65	0,016	0,126
240	5,65	0,010	0,100
1440	5,90	0,070	0,265
2880	5,90	0,130	0,361

Tabela A.5. Altura da interface superior afastada do degrau decaindo ao longo do tempo no experimento do sedimentador bidimensional 3.

Tempo (min)	Altura (cm)	Variância (cm ²)	Desvio padrão (cm)
0	1,40	0,006	0,076
1	1,45	0,011	0,104
2	1,50	0,043	0,208
3	2,10	0,070	0,265
4	2,20	0,093	0,304
5	2,20	0,030	0,173
6	2,40	0,061	0,247
7	2,65	0,067	0,260
8	2,70	0,123	0,350
9	2,75	0,076	0,275
10	2,90	0,048	0,218
15	3,70	0,013	0,115
20	4,75	0,043	0,208
25	6,20	0,032	0,180
30	7,95	0,006	0,076
40	9,00	0,008	0,087
50	9,30	0,013	0,115
60	9,50	0,032	0,180
80	9,70	0,018	0,132
100	9,80	0,013	0,115
120	9,90	0,010	0,100
180	10,00	0,016	0,126
240	10,00	0,016	0,126
300	10,00	0,016	0,126
360	10,00	0,016	0,126
420	10,00	0,016	0,126
1440	10,00	0,016	0,126
2880	10,00	0,016	0,126

Tabela A.6. Altura da interface superior acima do degrau decaindo ao longo do tempo no experimento do sedimentador bidimensional 3.

Tempo (min)	Altura (cm)	Variância (cm ²)	Desvio padrão (cm)
0	1,45	0,010	0,100
1	1,50	0,011	0,104
2	1,50	0,013	0,115
3	2,00	0,070	0,265
4	2,10	0,070	0,265
5	2,15	0,083	0,289
6	2,40	0,213	0,462
7	2,40	0,201	0,448
8	2,45	0,173	0,416
9	2,50	0,130	0,361
10	2,50	0,083	0,289
15	2,60	0,111	0,333
20	2,60	0,023	0,153
25	2,60	0,013	0,115
30	2,60	0,033	0,180
40	2,60	0,031	0,176
50	2,60	0,031	0,176
60	3,60	0,006	0,076
80	3,60	0,016	0,126
100	3,60	0,016	0,126
120	3,60	0,010	0,100
180	3,60	0,016	0,126
240	3,60	0,010	0,100
300	3,60	0,010	0,100
360	3,60	0,010	0,100
420	3,60	0,010	0,100
1440	3,60	0,070	0,265
2880	3,60	0,130	0,361

B - DADOS REOLÓGICOS DO FLUIDO PREPARADO

Tabela B.1. Dados reológicos: tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação.

Taxa de deformação (s^{-1})	Tensão de cisalhamento (Pa)	Variância (Pa^2)	Desvio padrão (Pa)
340,46	38,214	6,490	2,548
306,41	36,176	3,375	1,837
170,23	20,381	1,000	1,000
153,21	18,682	2,163	1,471
102,14	13,587	2,163	1,471
51,07	10,190	1,000	1,000
10,21	5,095	1,000	1,000
5,11	3,906	1,644	1,282

C - MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS

Maliska (2023) ressalta que para ser considerado um método de volumes finitos, a equação a ser resolvida deve ter sido obtida a partir de um balanço de uma das grandezas conservativas, possuindo por padrão a característica fundamental deste método: a conservação da propriedade em análise. Para a aplicação do método, é fundamental que a equação diferencial parcial esteja na forma conservativa, em que a equação leva em conta os fluxos da propriedade de interesse, devendo estes estarem dentro das derivadas da equação diferencial. Assim, na primeira integração da equação, os fluxos surgem nas fronteiras dos volumes de controle, correspondendo aos balanços das grandezas conservativas (MALISKA, 2023). Trabalhando desta forma, segundo Leveque (2002), usar propriedades importantes da equação em questão em sua forma conservativa é mais fácil, uma vez que o método numérico seja conservativo e, assim, toda a massa no domínio computacional será conservada.

A notação típica do método dos volumes finitos considera a nomenclatura inglesa dos pontos cardeais: em que as letras minúsculas representam as fronteiras dos volumes de controle, *west* (*w*) e *east* (*e*), que significam oeste e leste respectivamente, no caso de uma malha 1D conforme Figura C.1, e *north* (*n*) e *south* (*s*) para as posições norte e sul, nesta ordem, em casos onde uma malha bidimensional é utilizada, como na Figura C.2.

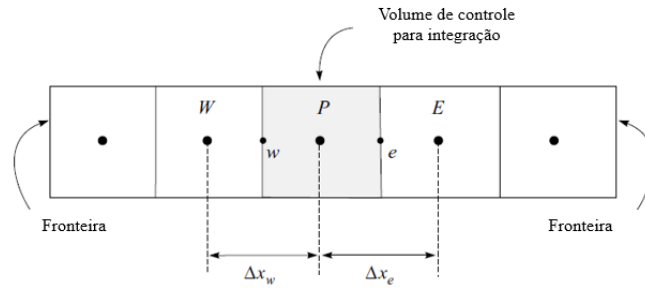


Figura C.1. Volumes de controle unidimensionais (Adaptado de MALISKA., 2023).

Ao resolver uma Equação Diferencial Parcial (EDP) por este método, é comum associá-lo a uma aproximação do método das diferenças finitas a depender de como será discretizado o termo transiente da equação. Contudo, o MVF não é igual ao método das diferenças finitas e utiliza a forma integral dessas equações de conservação, o que traz diversas vantagens (LEVEQUE, 2002). De acordo com Eymard *et al* (2000), o método das diferenças finitas tem como princípio atribuir uma variável desconhecida em cada ponto de discretização na malha numérica, consequentemente uma equação por ponto de discretização. Expansões em série de Taylor são usadas para representar as derivadas da propriedade desconhecida, porém uma desvantagem deste método é que quando os coeficientes envolvidos na equação são descontínuos, utilizar diferenças finitas se torna complicado. Em contrapartida, o MVF se sai bem com descontinuidades dos coeficientes se a malha escolhida contém a descontinuidade nos limites dos volumes de controle (EYMARD; GALLOUËT; HERBIN, 2000).

A descrição do MVF de acordo com Maliska (2023) apresenta os seguintes conceitos sobre o método dos volumes finitos. Sejam duas equações diferenciais parciais equivalentes e que representam a equação de conservação de massa, Equações (C.1) e (C.2). O fluxo de massa é dado por ρu , ρv e ρw , nas direções x , y e z , respectivamente.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \quad (\text{C.1})$$

A partir da regra do produto das derivadas em (C.1), tem-se que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x}(u) + \rho \frac{\partial}{\partial y}(v) + \rho \frac{\partial}{\partial z}(w) + u \frac{\partial}{\partial x}(\rho) + v \frac{\partial}{\partial y}(\rho) + w \frac{\partial}{\partial z}(\rho) = 0, \quad (\text{C.2})$$

em que ρ é a densidade e u , v e w são as velocidades nas direções x , y e z , respectivamente. Das equações anteriores, somente a Equação (C.1) está em na forma conservativa, uma vez que os fluxos da grandeza conservativa estão dentro das derivadas. Essas duas equações teriam a mesma solução analítica, porém a integração das duas equações ao aplicar o método dos volumes finitos não geraria equações iguais, em que a integração da Equação (C.2) não resultaria em uma equação com os fluxos avaliados nas fronteiras do sistema, ao contrário da Equação (C.1). A ligação da equação diferencial em sua forma conservativa com o método dos volumes finitos é a sua obtenção a partir do balanço da grandeza em um volume de controle genérico. Como exemplo, o balanço de massa em um volume de controle bidimensional, conforme Figura C.2 é abordado.

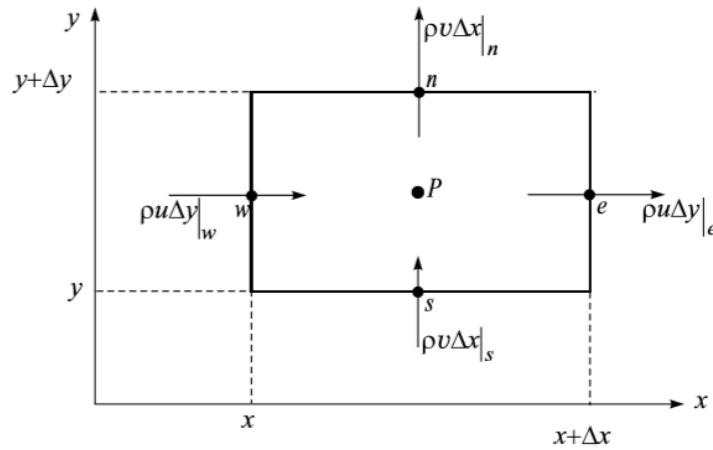


Figura C.2. Representação de um volume de controle bidimensional para um problema de conservação de massa (Adaptado de MALISKA., 2023).

A partir do Teorema do Transporte de Reynolds, o volume de controle da Figura C.2 tem por balanço de massa

$$\dot{m}_w - \dot{m}_e + \dot{m}_s - \dot{m}_n = \frac{\Delta m}{\Delta t}|_{VC}. \quad (\text{C.3})$$

Considera-se este o primeiro passo para obter a equação diferencial que governa o problema, isto é, a equação de conservação da massa. Substituindo o campo de velocidades e as variações espaciais

$$\rho u \Delta y|_w - \rho u \Delta y|_e + \rho v \Delta x|_s - \rho v \Delta x|_n = \frac{\Delta}{\Delta t}(\rho \Delta x \Delta y)|_{VC}. \quad (\text{C.4})$$

Dividindo os dois lados da Equação (C.4) por $\Delta x \Delta y$, o seguinte procedimento matemático é verdadeiro.

$$\frac{\rho u|_w - \rho u|_e}{\Delta x} + \frac{\rho v|_s - \rho v|_n}{\Delta y} = \frac{\Delta \rho}{\Delta t}, \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{-(\rho u|_e - \rho u|_w)}{\Delta x} + \frac{-(\rho v|_n - \rho v|_s)}{\Delta y} = \frac{\Delta \rho}{\Delta t}, \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta t} + \frac{(\rho u|_e - \rho u|_w)}{\Delta x} + \frac{(\rho v|_n - \rho v|_s)}{\Delta y} = 0. \quad (\text{C.7})$$

Aplicando o limite para as coordenadas espaciais e temporal quando elas tendem a zero, utilizando a definição de derivada na Equação (C.7), tem-se a equação diferencial parcial para a conservação da massa, Equação C.8, mostrando, portanto, que o método dos volumes finitos pode ser utilizado.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0. \quad (\text{C.8})$$

Para resolver a Equação C.8 pelo Método dos Volumes Finitos, integra-se esta equação no tempo e ao longo do domínio espacial, respeitando o sentido de crescimento dos eixos horizontal (x) e vertical (y) da Figura C.2, isto é, da face w para a face e e da face s para a face n , conforme Equação C.9, ou seja, o caminho inverso do que foi feito anteriormente com o balanço de massa,

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right] dx dy dt = 0. \quad (\text{C.9})$$

que resulta em:

$$\left(\frac{\rho^{t+\Delta t} - \rho^t}{\Delta t} \right) \Delta x \Delta y + [\rho u|_e - \rho u|_w] \Delta y + [\rho v|_n - \rho v|_s] \Delta x = 0, \quad (\text{C.10})$$

$$-[\rho u|_w - \rho u|_e] \Delta y - [\rho v|_s - \rho v|_n] \Delta x = - \left(\frac{\rho^{t+\Delta t} - \rho^t}{\Delta t} \right) \Delta x \Delta y, \quad (\text{C.11})$$

$$[\rho u|_w - \rho u|_e] \Delta y + [\rho v|_s - \rho v|_n] \Delta x = \left(\frac{\rho^{t+\Delta t} - \rho^t}{\Delta t} \right) \Delta x \Delta y. \quad (\text{C.12})$$

A Equação C.12 é equivalente à Equação C.4, obtida pelo balanço de massa em um volume finito a nível discreto. Integrando-se a equação diferencial parcial C.9 para todos os volumes da malha, tem-se como resultado um conjunto de equações algébricas para serem resolvidas. Como nem todos os balanços de grandezas conservativas são fáceis de se obter, integrar a equação diferencial ao longo de cada volume de controle para obter equações aproximadas é um caminho preferencial. Um balanço de momento, por exemplo, requer o somatório de todas as tensões agindo no volume de controle. Além disso, podem existir volumes de controle com formatos diversos, portanto, é mais adequado começar com a equação diferencial na sua forma conservativa. A Figura C.3 retrata a ligação entre o refinamento da malha e o limite quando as equações são mantidas na sua forma conservativa.

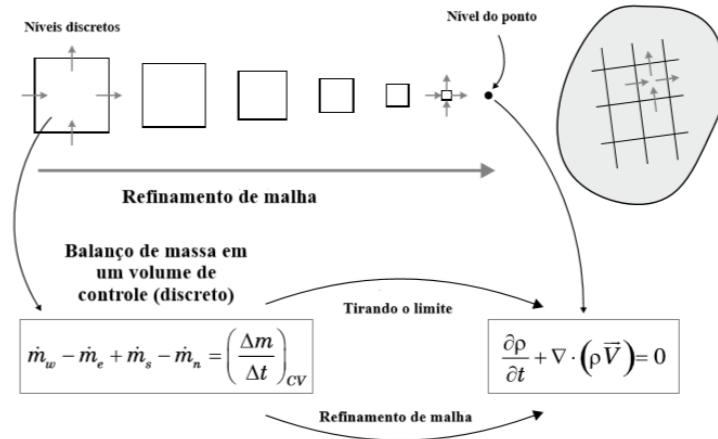


Figura C.3. Esquema resumindo o método dos volumes finitos. (Adaptado de MALISKA., 2023).

Uma observação importante precisa ser feita sobre a Equação C.12: os fluxos ρv e ρu nas faces dos volumes de controle são desconhecidos, uma vez que o valor das velocidades é desconhecido nas faces dos volumes de controle. Dessa forma, uma etapa importante no método dos volumes finitos é a aproximação dos fluxos nas faces dos volumes. Leveque 2002 apresenta um foco especial no estudo dos fluxos para métodos de volumes finitos em problemas de caráter hiperbólico. Fazendo uso da mesma notação do autor e utilizando como exemplo mais simples a equação da advecção unidimensional,

$$q_t(x, t) + \bar{u}q_x = 0. \quad (\text{C.13})$$

onde $q_t(x, t) = \frac{\partial q}{\partial t}$, $q_x(x, t) = \frac{\partial q}{\partial x}$ e $\bar{u}$ é a velocidade com que certa substância de concentração q é carregada em um fluido, a aplicação do método dos volumes finitos, ou seja, a integração da equação de conservação C.13 utilizando uma discretização explícita para a derivada temporal resulta na Equação C.14, sujeita a uma malha unidimensional, conforme Figura C.4.

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n). \quad (\text{C.14})$$

Na Equação C.14, Q_i é o valor médio da propriedade q representativa do volume i no próximo passo de tempo, $n + 1$, ou no anterior, n , enquanto que Δt e Δx são, respectivamente, o intervalo de tempo e de espaço. Os fluxos nas faces esquerda e direita do volume de controle são dados por $F_{i-1/2}^n$ e $F_{i+1/2}^n$, respectivamente.

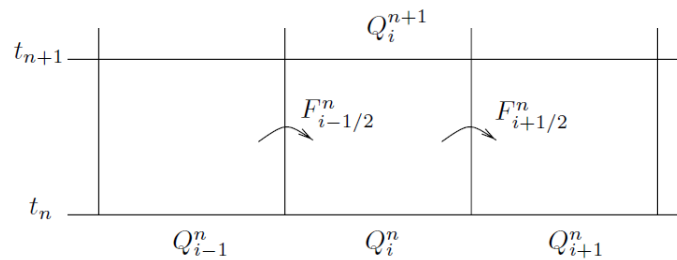


Figura C.4. Ilustração do método dos volumes finitos a partir da modificação do valor de Q no volume pelos fluxos através de suas faces ao longo do tempo e do espaço (Adaptado de LEVEQUE., 2002).

O MVF se aplica às leis de conservação de qualquer propriedade. Sendo assim, sua utilização é adequada para leis de conservação de caráter hiperbólico, parabólico ou elíptico (EYMARD; GALLOUËT; HERBIN, 2000). Segundo Maliska (2023), a classificação de EDP's em elíptica, parabólica e hiperbólica é normalmente realizada usando relações entre os coeficientes da equação. Como a técnica do MVF é um procedimento numérico, o conhecimento dos tipos de problemas que as equações descrevem é importante para que o tempo computacional seja levado em consideração, assim como tempo de CPU e armazenamento. A seguir, está resumida uma breve explicação sobre estes tipos de problemas de acordo com Maliska (2023). Uma importância notável desta classificação destes equacionamentos é que cada um destes tipos está diretamente ligado à física do problema em termos de condição de contorno que deverá ser empregada.

- Problemas parabólicos e hiperbólicos

Problemas parabólicos e hiperbólicos permitem o processo de marcha, enquanto que os elípticos não o fazem. No campo de escoamento de fluidos, pode-se dizer que os problemas hiperbólicos e parabólicos permitem o processo de marcha (ou avanço no tempo), enquanto os elípticos não. Tais problemas, por sua vez, não necessitam de condições de contorno a jusante, ou seja, eles dependem exclusivamente de informações a montante. Como exemplo, os termos advectivos das equações de Navier-Stokes mostram esse comportamento e são parabólicas, mostrando que caso não exista outra forma de transporte nesta direção, é impossível que informações a jusante sejam transmitidas para montante. Conforme Figura C.5, o problema parabólico clássico de um escoamento bidimensional sobre um plano é mostrado.

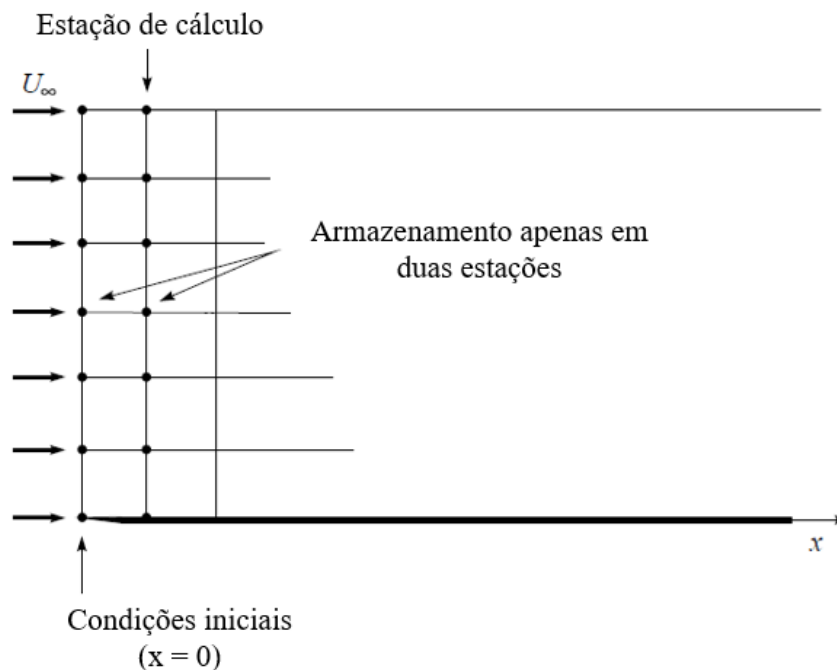


Figura C.5. Camada limite em um plano (Adaptado de MALISKA., 2023).

Neste problema, os efeitos de difusão são desconsiderados na direção horizontal e, como não há efeito de pressão já que não há obstáculos para o escoamento, assim, a direção

horizontal é considerada parabólica. Nesta direção, os termos advectivos são os únicos a influenciarem o fenômeno e não são necessárias condições de contorno a jusante. Nestas condições, o problema é resolvido marchando da condição inicial espacial resolvendo um problema elíptico 1D em cada estação em x .

Neste problema, a equação do movimento na direção x é dada pela Equação C.15, em que o gradiente de pressão é conhecido,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) = -\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (\text{C.15})$$

Somente a derivada primeira existe nesta direção, por isso somente uma condição de contorno é necessária. Na direção y , por sua vez, o problema é difusivo exclusivamente, o que é demonstrado pela presença de derivadas de segunda ordem e, portanto, duas condições de contorno em y . Segundo Maliska (2023), é vantajoso abordar o problema com este tratamento, pois o armazenamento necessário condiz somente às estações de cálculo e a que está a montante. Para um tratamento elíptico, por exemplo, armazenamento global seria necessário. Dessa forma, a partir da ordem das derivadas a identificação do problema quanto à classificação em hiperbólico ou parabólico se torna possível. Quanto ao comportamento, a marcha parabólica ocorre em uma direção coordenada, enquanto que a hiperbólica ocorre nas características. Uma observação importante é inerente a problemas tridimensionais complexos: a marcha hiperbólica desconhece as condições de contorno do problema elíptico nas outras direções.

- Problemas elípticos

Para problemas elípticos, todas as direções do sistema de coordenadas conta com a propagação da informação. Efeitos de pressão e difusivos são por natureza elípticos, de tal forma que se estiverem presentes no problema, necessitarão da especificação das condições de contorno em ambos os extremos dos eixos de coordenadas. Em escoamento de fluidos, estes efeitos viajam também em direções opostas da velocidade, o que confere características elípticas do escoamento (MALISKA, 2023). Além disso, segundo Maliska (2023), a depender do quão significativa a advecção é se comparada à difusão, esta última pode ser desprezada, o que muda a natureza da equação nesta direção em questão.

Exemplos de fenômenos elípticos são a difusão do calor, massa e momento. Baseado na física destes fenômenos, quando a temperatura, por exemplo, aumenta em determinado ponto do domínio, calor é difundido em todas as direções de acordo com a condutividade térmica. Dessa forma, condições de contorno são necessárias em todos os extremos do domínio. A Figura C.6, mostra exemplos unidimensionais dos comportamentos hiperbólico, parabólico e elíptico para uma perturbação em um dado ponto P em um escoamento de fluido.

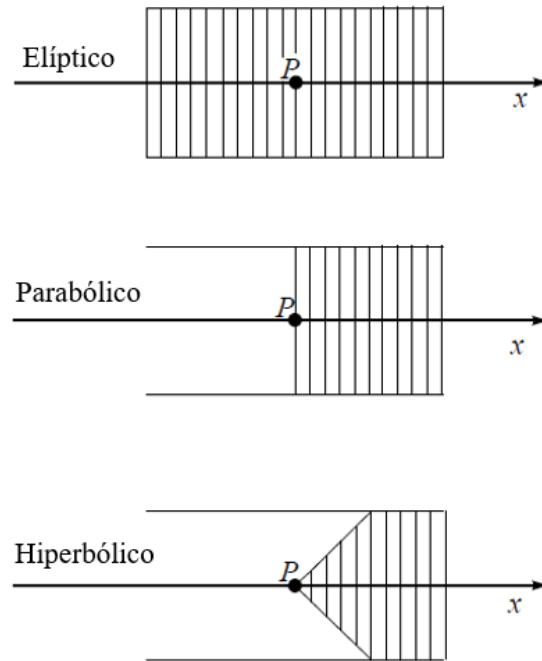


Figura C.6. Problemas parabólicos, elípticos e hiperbólicos (Adaptado de MALISKA., 2023).

Note que no eixo mostrado, para uma perturbação no ponto P no caso elíptico, ambas as direções além do ponto P são afetadas, isto é, a jusante e a montante do ponto. Já para o caso parabólico, somente a jusante de P , enquanto que no caso hiperbólico também a jusante de P , mas sobre uma região não conhecida.

D - MODELAGEM MATEMÁTICA E ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

D.1 Modelos matemáticos

Schwaab e Pinto (2007) apresentam uma análise da modelagem e da estimação de parâmetros. Para os autores, modelo matemático é uma estrutura que busca descrever de forma aproximada a realidade, baseando-se em um conjunto de observações experimentais. Trata-se de uma estrutura que estabelece vínculo entre variáveis distintas e permite explicar os eventos passados e prever de alguma forma o comportamento do sistema em condições experimentais que ainda não foram realizadas. Como o trabalho principal da ciência é correlacionar dados e fatos, é possível afirmar que um modelo resulta sempre de um trabalho de investigação em qualquer área do conhecimento. A modelagem matemática é, portanto, a tarefa de construir modelos para um sistema resultando em um conjunto consistente de relações matemáticas que descrevem quantitativamente um sistema (PINTO; SCHWAAB, 2007). Segundo Schwaab e Pinto (2007), os seguintes tipos de modelos são exemplificados:

- **Modelos teóricos e empíricos**

Um modelo é considerado teórico quando as equações que o compõem são derivadas a partir de pressupostos teóricos fundamentais, como as leis de conservação de massa, energia e quantidade de movimento. Estes podem ser propostos a priori antes de ocorrer observação experimental, o que não quer dizer que modelos teóricos sejam oriundos das observações experimentais, uma vez que certos pressupostos teóricos podem não ser verdadeiros para o problema em questão. Por outro lado, um modelo empírico tem suas equações postuladas para descrever as relações observadas entre as diversas variáveis do problema e não há pressuposto teórico que justifique a relação utilizada. Em outras palavras, o modelo empírico depende totalmente da obtenção de dados experimentais consistentes e da criatividade do analista. Este não permite extrapolações muito confiáveis se comparado com modelos teóricos. Isso é verdade uma vez que é mais coerente admitir que os pressupostos teóricos permaneçam válidos em uma faixa de experimentação ampla do que admitir que a estrutura matemática proposta se mantenha constante ao longo de todas as condições experimentais possíveis. Os modelos empíricos costumam ser mais simples e fáceis de propor, permitindo construção mais rápida e barata se comparado aos modelos teóricos mais detalhados do processo. São costumeiramente preferidos para realizar interpolações e desenvolver aplicações em linha, como em algoritmos de controle de processos.

- **Modelos lineares e não-lineares**

Segundo Schwaab e Pinto (2007), um modelo é considerado linear se para um conjunto de variáveis de saída, y_1, y_2, y_3 até y_{NY} (variáveis dependentes) e outro de variáveis de entrada, x_1, x_2, x_3 até x_{NX} (variáveis independentes), para um modelo matemático explícito conforme Equação D.1,

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{NY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1 & x_2 & \cdots & x_{NX}) \\ f_2(x_1 & x_2 & \cdots & x_{NX}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{NY}(x_1 & x_2 & \cdots & x_{NX}) \end{bmatrix} = f(x), \quad (\text{D.1})$$

a relação da Equação D.2 for verdadeira, em que α e β são escalares.

$$y = f(\alpha x + \beta w) = \alpha f(x) + \beta f(w) \quad (\text{D.2})$$

O modelo da Equação D.1 é considerado explícito, uma vez que as variáveis dependentes são obtidas diretamente a partir das independentes. Além disso, vale ressaltar que modelos lineares são passíveis de serem resolvidos analiticamente em problemas de simulação, otimização e estimação de parâmetros. Além disso, para o caso de um modelo implícito como na Equação D.3,

$$y = \begin{bmatrix} g_1(x_1 & x_2 & \cdots & x_{NX}; y_1 & y_2 & \cdots & y_{NY}) \\ g_2(x_1 & x_2 & \cdots & x_{NX}; y_1 & y_2 & \cdots & y_{NY}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{NY}(x_1 & x_2 & \cdots & x_{NX}; y_1 & y_2 & \cdots & y_{NY}) \end{bmatrix} = g(z) \quad (\text{D.3})$$

o modelo é considerado linear se a relação da Equação D.4 a seguir for verdadeira.

$$g(\alpha z + \beta w) = \alpha g(z) + \beta g(w) \quad (\text{D.4})$$

Como as variáveis dependentes não são obtidas diretamente a partir das variáveis independentes, o modelo é considerado implícito. Neste caso, a resolução do modelo gera a forma da Equação D.1, seja ele resolvido por uma técnica numérica ou analiticamente.

• Modelos determinísticos e estocásticos

Os modelos determinísticos são aqueles para os quais existe um resultado experimental bem definido para cada experimento, já os estocásticos, associam a cada condição experimental um conjunto de resultados possíveis, com suas respectivas probabilidades de ocorrer. Existe uma mesma resposta associada a cada pergunta em um modelo determinístico, enquanto para modelos estocásticos, existe um conjunto de respostas possíveis para cada pergunta, com diferentes probabilidades. Assim, em um modelo estocástico, suas respostas são diferentes para um mesmo experimento, algumas muito prováveis e outras nem tanto.

• Modelos a parâmetros concentrados e distribuídos

Esta classificação se relaciona às variações espaciais das variáveis de interesse. Um modelo a parâmetros concentrados ocorre quando as variações espaciais são negligenciáveis e as propriedades não variam com a posição. O modelo do tanque de mistura é um exemplo clássico, em que, admitindo-se a validade de hipótese de mistura perfeita, as propriedades são as mesmas em qualquer ponto do sistema. Se tratando de um modelo a parâmetros distribuídos, este se dá quando ocorrem variações espaciais importantes e que não podem ser desprezadas. Trata-se, nesse caso, portanto de um caso de heterogeneidade espacial, em que o exemplo clássico é o modelo do reator tubular.

Nota-se que modelos matemáticos que descrevem sistemas a parâmetros distribuídos apresentam em geral a forma de equações diferenciais parciais, cuja resolução requer o uso de procedimentos numéricos bastante específicos. Os modelos a parâmetros concentrados, por si só, são constituídos em geral por equações algébricas ou equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, cuja resolução por método numérico é facilitada. Veja os exemplos na Figura D.1.

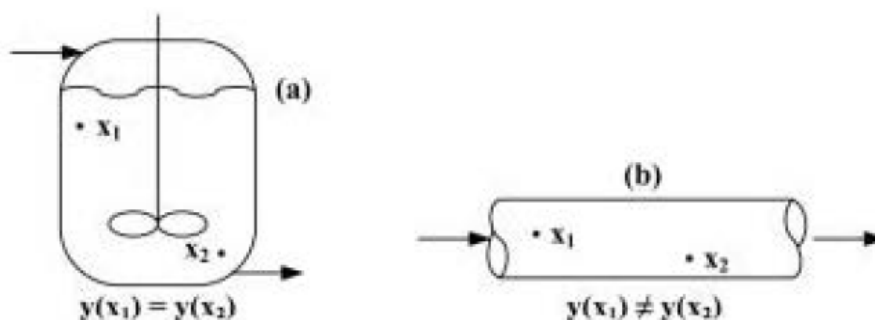


Figura D.1. Exemplo de sistemas a parâmetros concentrados (a) e distribuídos (b) (Adaptado de PINTO; SCHWAAB, 2007.).

• Modelos estacionários e dinâmicos

Se uma ou mais variáveis do modelo mudam com o tempo, este modelo é dito dinâmico, caso contrário, ele é estacionário. Muito utilizados em controle de processos, modelos dinâmicos são usados para análise, pois o objetivo nesses casos é detectar e corrigir problemas que possam ocorrer com o processo ao longo do tempo. Já para modelos estacionários, o desenvolvimento de máquinas e equipamentos tem como premissa básica o comportamento estacionário, uma vez que as dimensões ótimas do equipamento e da condição de operação precisam ser determinadas.

Como característica intrínseca, sistemas dinâmicos são normalmente descritos por equações que requerem a implementação de rotinas numéricas de integração, como por exemplo, Euler e Runge-Kutta. Os modelos estacionários, sejam do tipo parâmetros concentrados ou distribuídos, quase sempre resultam em sistemas de equações algébricas, resolvidos por métodos clássicos, como Newton-Raphson, para solucionar estes sistemas de equações.

D.2 Introdução à estimação de parâmetros

De acordo com Schwaab e Pinto (2007), um trabalho científico conta com a correlação de dados, que se dá através da construção de modelos. Para isso, duas entidades básicas distintas são necessárias: a estrutura do modelo e seus parâmetros. Na primeira, as variáveis do problema se relacionam e, quanto aos parâmetros, estes tornam possível a previsão quantitativa das relações existentes entre as diversas variáveis do problema, por meio da estrutura do modelo.

Existem parâmetros que não podem ser medidos nem avaliados de antemão pelo analista e sem os quais não é possível usar o modelo e nem relacioná-lo às variáveis. Nesse sentido, técnicas de estimação de parâmetros são utilizadas para estimar estes valores que não podem ser medidos e nem avaliados a priori. Assim, a estimação de parâmetros é, portanto, a obtenção de dados experimentais e compará-los com dados e estruturas que pretendem explicá-los. Em outras palavras, trata-se de usar um modelo matemático como referência e variar seus parâmetros até que as predições do modelo fiquem o mais próximo possível dos dados do experimento, respeitando suas devidas incertezas experimentais.

Sabendo-se que o modelo é um dado conhecido a priori, durante o procedimento da estimação de parâmetros, estes são variados (são as verdadeiras variáveis consideradas). O modelo é simulado admitindo valores de parâmetros conhecidos e em seguida é estudada como as variáveis independentes influenciam as de saída do modelo. Se trata de um problema inverso, em que o objetivo é observar o quão perto ou longe o modelo passa em

relação aos dados experimentais, para cada modificação nos valores dos parâmetros, ou seja, para cada simulação das condições experimentais utilizando diferentes conjuntos de parâmetros.

Toda estimação de parâmetros deve possuir uma métrica, uma função que mede a distância existente entre os dados experimentais e os preditos pelo modelo. Esta função diz se as previsões do modelo do modelo são boas ou ruins. Além disso, o procedimento de estimação de parâmetros pressupõe a implementação de alguma rotina de otimização, dado que as previsões dadas pelo modelo precisam estar o mais próximas possíveis dos dados experimentais, devendo haver similaridade máxima entre experimento e previsão.

Outro ponto importante são as incertezas características da medição. Toda medida experimental contém erros que influenciam a obtenção dos parâmetros. Schwaab e Pinto (2007) ilustra o exemplo característico de uma reta, conforme Figura D.2, em que dois pares de dados experimentais são utilizados para estimar os parâmetros de uma reta. Uma vez que os dados contêm erros experimentais, seus valores corretos são desconhecidos, contudo uma região de confiança pode ser inferida, com base em um grau de precisão escolhido pelo analista, onde os valores verdadeiros podem ser encontrados.

A partir da Figura D.2, é possível observar que a incerteza no dado experimental provoca uma incerteza na reta que une os dois pares de dados do experimento. Dessa forma, a região hachurada indica onde estão as possíveis retas que descrevem os dados experimentais, enquanto que as regiões ovais são as incertezas experimentais.

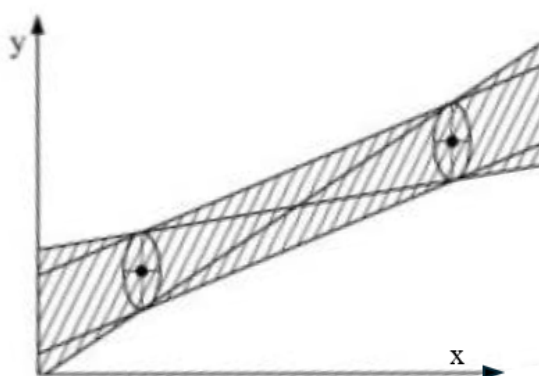


Figura D.2. Medidas experimentais, suas incertezas experimentais e possíveis retas que descrevem os dados experimentais (Adaptado de PINTO; SCHWAAB, 2007.).

D.3 Algoritmo de enxame de partículas

Eberhart e Kennedy (1995) desenvolveram uma técnica de otimização conhecida como Otimização por Enxame de Partículas. O princípio do método é buscar o ponto ótimo da solução de um problema, cujo procedimento de otimização é análogo ao comportamento de pássaros buscando o melhor lugar para obter comida. O funcionamento do algoritmo se dá com a inicialização de um conjunto de soluções possíveis: as partículas do algoritmo. Cada partícula do enxame é inicializada com uma velocidade aleatória, e assim, movem-se pelo espaço de procura do problema. Para um número pré-definido de iterações, cada partícula é direcionada a uma nova posição que promove o melhor valor *fitness* em relação à posição anterior. A partir deste espaço de busca, o algoritmo atrai a partícula para o valor *fitness* mais adequado, o que, por sua vez, a conduz para a localização da melhor

fitness alcançada em toda o enxame (JUNEJA; NAGAR, 2016).

Segundo Juneja (2016), o algoritmo consiste de " n_p " partículas e a posição de cada partícula representa a solução possível da função *fitness* no espaço de procura. Assim, três fatores influenciam a condição da partícula: sua própria inércia, sua melhor posição pessoal e sua melhor posição em relação ao enxame. As equações que descrevem a velocidade e a posição das partículas estão representadas , respectivamente, por

$$v_{id}^{k+1} = Wv_{id}^k + c_1r_1^k (pbest_{id}^k - x_{id}^k) + c_2r_2^k (gbest_{id}^k - x_{id}^k) , \quad (D.5)$$

$$x_{id}^{k+1} = x_{id}^k + v_{id}^{k+1} . \quad (D.6)$$

em que v_{id}^k e x_{id}^k representam a velocidade e posição da i^{sima} partícula (de n partículas) na d -ésima dimensão (de D dimensões) na iteração k , respectivamente. Os termos $pbest_{id}^k$ e $gbest_{id}^k$ são a melhor posição pessoal e a melhor posição global (ou seja, a melhor do grupo) da i^{sima} partícula (de n partículas) na d -ésima dimensão (de D dimensões) na iteração k , nesta ordem. A variável W se trata do peso inercial associado à velocidade anteriormente atingida pela partícula, C_1 e C_2 representam constantes de aceleração e, por fim, r_1^k , r_2^k são números aleatórios no intervalo $[0, 1]$.

Para a atualização da velocidade, Juneja (2016) três partes são consideradas:

- **Momento:** Representa a tendência da partícula de se mover na mesma direção que estava se movendo na ietração anterior. O efeito da velocidade anterior é incorporado na velocidade atual através do momento.
- **Parte cognitiva:** Trata da atração da velocidade da partícula para seu próprio melhor valor pessoal ($pbest$). Conhecida como "memória", "conhecimento pessoal" ou "recordação".
- **Parte social:** Representa a atração da velocidade da partícula para o melhor valor do enxame ($gbest$). Conhecida como "cooperação", "conhecimento social" ou "informação compartilhada".

A Figura D.3 mostra um fluxograma do passo a passo do funcionamento do algoritmo do enxame de partículas.



Figura D.3. Fluxograma do algoritmo de enxame de partícula (Adaptado de JUNEJA; NAGAR, 2016.).

A partir do fluxograma apresentado na Figura D.3 e das equações que regem o algoritmo, faz-se necessário conhecer a atuação de cada uma das variáveis dentro do método de enxame de partículas. De acordo com Juneja (2016), a descrição de cada variável é dada a seguir.

- **Peso de inércia (w):** é dito como a fluidez do meio que as partículas se movem. Controla o efeito que a velocidade da iteração anterior tem sobre a da velocidade da iteração atual. Quanto maior for seu valor, melhor será a capacidade de procura global, enquanto que valores pequenos melhoram a capacidade de procura parcial do *PSO*. Normalmente em trabalhos experimentais possui valores entre 0,4 a 0,9, diminuindo linearmente para que o algoritmo permita às partículas uma exploração mais ampla no início e áreas próximas em estágios posteriores de velocidade reduzida. Essa configuração é apropriada para encontrar a posição ótima das partículas rapidamente. Com valores altos de w o comportamento corresponde a um sistema cujas partículas se movimentam em meio de baixa viscosidade performando uma exploração extensiva. Se tratando de valores menores de w , o sistema se torna mais dissipativo e explorativo sendo melhor em abrigar um ponto ótimo local.
- **Constantes de aceleração c_1 e c_2 :** Estão relacionadas à velocidade de voo das partículas em direção à melhor posição do enxame e também à sua melhor posição pessoal. Se possuírem valores muito altos, as partículas poderiam "voar" além da posição correta, enquanto que para valores muito pequenos, a partícula pode não ser capaz de atingir

a posição almejada. Normalmente são estabelecidas com valor 2, fazendo os tempos para mover as partículas em direção à sua melhor posição pessoal e global iguais e equivalentes à metade do tempo total.

- Números aleatórios r_1 e r_2 : A atração das partículas em direção às posições p_{best} e g_{best} são reguladas por estes números aleatórios nas regras de atualização. Estabelecem a magnitude da força em direção às duas melhores posições. Impedem que o algoritmo fique preso em um mínimo ou máximo local não ótimo.
- Tamanho da população: Normalmente determinado empiricamente com base na dimensionalidade e dificuldade do problema. Valores entre 20 a 50 indivíduos são muito comuns, uma vez que o tamanho do enxame depende de uma aplicação para outra, sendo dependente do problema em questão.

De maneira geral, o algoritmo de enxame de partículas é muito utilizado devido a algumas vantagens. Uma de suas vantagens é não envolver mutação e seleção no processo de procura pelo ponto ótimo. Uma simples variação nas velocidades das partículas pode conduzir a procura. Outro ponto importante é que as partículas aprendem através das experiências do grupo, assim, estas voam somente para as posições em que é possível encontrar o ponto ótimo. Além disso, é um método de fácil implementação por possuir cálculos simples, podendo ser usados na pesquisa científica e aplicações em engenharia (JUNEJA; NAGAR, 2016).

Por outro lado, segundo Juneja (2016), a dificuldade em usar o algoritmo cresce à medida que aumenta a dimensão do espaço de procura. Uma dificuldade recorrente do método está no fato de ele ser vulnerável à parcialidade do ponto ótimo, o que leva à uma regulação bem menos precisa de sua direção e velocidade. Contudo, em termos de estimação de parâmetros, este algoritmo é muito utilizado para estimação em modelos não lineares, possuindo flexibilidade e versatilidade em diferentes problemas da engenharia cuja a obtenção dos parâmetros por técnicas convencionais não é usual, como é o caso desta dissertação.