

UFRRJ

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

Dissertação

**Tecnologias Digitais no Ensino de Trigonometria:
Explorando o Desmos em uma Pesquisa-Formação com
Licenciandos em Matemática**

Mateus Ágape Guerrão Lourenço

Seropédica, RJ

2025

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA**

**Tecnologias Digitais no Ensino de Trigonometria:
Explorando o Desmos em uma Pesquisa-Formação com
Licenciandos em Matemática**

MATEUS ÁGAPE GUERRÃO LOURENÇO

Sob orientação do professor
Marcelo Almeida Bairral

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Educação em Ciências e Matemática, no Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática. Linha de Pesquisa: Linguagens, tecnologias e inovações nos processos de ensino e de aprendizagem. Projeto de Pesquisa: Ambiências interativas e redes online para aprender matemática diferentemente

Seropédica, RJ
Fevereiro, 2025

Ficha catalográfica

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L425t Lourenço, Mateus Ágape Guerrão, 1999-
Tecnologias Digitais no Ensino de Trigonometria:
Explorando o Desmos em uma Pesquisa-Formação com
Licenciandos em Matemática / Mateus Ágape Guerrão
Lourenço. - RIO DE JANEIRO, 2025.
163 f.

Orientador: Marcelo Almeida Bairral.
Dissertação (Mestrado). -- Universidade Federal Rural
do Rio de Janeiro, PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA, 2025.

1. Ensino de Trigonometria. I. Almeida Bairral,
Marcelo, 1969-, orient. II Universidade Federal Rural
do Rio de Janeiro. PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA III. Título.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance cod 001.

Firefox

https://sipac.ufrj.br/sipac/protocolo/documento/documento_visualizacao...



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA**



ATA Nº 1611 / 2025 - PPGEducIMAT (12.28.01.00.00.00.18)

Nº do Protocolo: 23083.022998/2025-92

Seropédica-RJ, 07 de maio de 2025.

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO**

MATEUS ÁGAPE GUERRÃO LOURENÇO

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação em Ciências e Matemática**, no Curso de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, área de Concentração Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 27/03/2025.

Dr. Marcelo Almeida Bairral UFRJ
(Orientador)

Dra. Andreia Maria Pereira de Oliveira, UFBA

Dra. Dora Soraia Kindel, UFRJ

(Assinado digitalmente em 07/05/2025 11:09)
DORA SORAIA KINDEL
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptES (12.28.01.00.00.86)
Matrícula: 1420931

(Assinado digitalmente em 07/05/2025 09:51)
MARCELO ALMEIDA BAIRRAL
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptTPE (12.28.01.00.00.00.24)
Matrícula: 1098802

(Assinado digitalmente em 07/05/2025 09:46)
ANDREIA MARIA PEREIRA DE OLIVEIRA
ASSINANTE EXTERNO
CPF: 743.906.275-20

Visualize o documento original em <https://sipac.ufrj.br/public/documentos/index.jsp>
informando seu número: **1611**, ano: **2025**, tipo: **ATA**, data de emissão: **07/05/2025** e o código
de verificação: **dd015cbf65**

RESUMO

LOURENÇO, Mateus Ágape Guerrão. Tecnologias Digitais no Ensino de Trigonometria: Explorando o Desmos em uma Pesquisa-Formação com Licenciandos em Matemática. 2025. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de Educação. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2025.

Essa dissertação tem como foco dialogar com professores e futuros professores sobre possibilidades de inovação no ensino de conceitos de trigonometria com tecnologias digitais. A pesquisa mapeia estudos sobre o uso de tecnologias no ensino de Trigonometria, além disso, elabora e implementa ambiência em uma disciplina na Licenciatura em Matemática na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Além do Desmos no trabalho de campo foram utilizados dispositivos como tablets e smartphones, que permitiram outras interações e as construções para realização das atividades. Tem como objetivo geral da pesquisa analisar contribuições e limitações do uso do Desmos em atividades para o Ensino de Trigonometria. Essa dissertação está no formato multipaper, e para contemplar os objetivos específicos da pesquisa apresenta, em seu primeiro artigo, uma metassíntese na qual foi observado o uso de tecnologias digitais no ensino de Trigonometria, foram observadas também lacunas de integração de tecnologias na formação inicial de professores incluindo, o uso do Desmos. O segundo artigo verifica contribuições da ambiência a partir da captura e análise de incidentes críticos. O produto educacional é detalhado no terceiro artigo. Nele é apresentada a proposta de ambiência com o foco na formação inicial de professores. Na primeira parte do produto faz-se uma explanação sobre os recursos da plataforma Desmos Sala de Aula e, na segunda, apresenta-se as tarefas utilizadas na implementação do segundo artigo. Como resultados obtêm-se a partir do primeiro artigo, a necessidade de realizar mais pesquisas no Ensino de Trigonometria voltada para a formação de professores. Com o segundo artigo, pôde-se observar que a plataforma Desmos e seu ambiente Desmos Sala de Aula oferecem recursos inovadores e agregadores para a Aprendizagem dos educandos. A presença de interatividade, visualização e manipulação é de extrema importância para a compreensão e construção de significados referente ao Ensino de Trigonometria. Algumas limitações foram observadas, como a necessidade do acesso à internet e de utilizar dispositivos como tablets ou computadores, uma vez que as atividades em smartphones se mostraram algumas vezes incompatíveis. Com a produção do terceiro artigo, que consta o produto educacional, destacam-se como resultados a contribuição para a formação continuada referente ao exercício docente com o apoio de tecnologias digitais de geometria dinâmica e interativa.

Palavras-chave: Ambiente virtual; Desmos classroom; Funções trigonométricas; Formação de professores; Incidentes críticos.

ABSTRACT

LOURENÇO, Mateus Ágape Guerrão. Digital Technologies in the Teaching of Trigonometry: Exploring Desmos in a Research-Formation with Prospective Mathematics Teacher. 2024. Dissertation (Master's Degree in Science and Mathematics Education). Institute of Education. Federal Rural University of Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2025.

This dissertation focuses on engaging teachers and future teachers in discussions about the possibilities of innovation in teaching trigonometry concepts using digital technologies. The research captures studies on the use of technologies in teaching trigonometry and also develops and implements an environment in an undergraduate course in Mathematics at the Federal Rural University of Rio de Janeiro. In addition to Desmos, devices such as tablets and smartphones were used in the fieldwork, which allowed other interactions and constructions for carrying out the activities. The main aim of the research is to analyze the contributions and limitations of the use of Desmos in activities for teaching trigonometry. This dissertation is in a multipaper format, and to contemplate the specific objectives of the research, it presents, in its first article, a meta-synthesis in which the use of digital technologies in teaching trigonometry was observed, and gaps in the integration of technologies in initial teacher training, including the use of Desmos, were also observed. The second article verifies the contributions of the environment based on the capture and analysis of critical incidents. The educational product is detailed in the third article. The proposal for an environment focused on initial teacher training is presented. The first part of the product explains the resources of the Desmos Classroom platform, and the second presents the tasks used in the implementation of the second article. The results obtained from the first article indicate the need for further research on the instruction of trigonometry aimed at prospective teacher training. The second article showed that the Desmos platform and its Desmos Classroom environment offer innovative and aggregating resources for subjects learning. The presence of interactivity, visualization, and manipulation is extremely important for understanding and constructing meanings regarding the teaching of trigonometry. Some limitations were observed, such as the need for internet access and the use of devices such as tablets or computers, since activities on smartphones sometimes proved incompatible. The third article, which is part of the educational product, highlights the contribution to continuing education regarding instruction with the support of digital technologies for dynamic and interactive geometry.

Key words: Virtual Environment; Desmos classroom; Trigonometric Functions; Teacher Training; Critical incidents

LISTA DE ABREVIACÕES E SÍMBOLOS

AGD - Ambientes de Geometria Dinâmica
BNCC - Base Nacional Comum Curricular
ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio
TIC - Tecnologias de Informação e Comunicação
TD - Tecnologias Digitais

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Esquema Linguagens	8
Figura 2: Esquema pedagógico com Tecnologias Digitais	9
Figura 3: Tela Inicial da Primeira atividade na plataforma	13
Figura 4: Gráfico resultados trajetória acadêmica	14
Figura 5: Gráfico resultados projetos acadêmicos	15
Figura 6: Atividade na plataforma ordenar conteúdos pelo grau de dificuldade	23
Figura 7: Resultados dos estudantes ordenação dos conteúdos	23
Figura 8: Resultados dos educandos conteúdos importantes	24
Figura 9: Atividade gráfico sobre a experiência acadêmica dos educandos	25
Figura 10: Atividade applet GeoGebra	29
Figura 11: Atividade na plataforma Desmos calcular a expressão	30
Figura 12: Design primeiro applet GeoGebra	31
Figura 13: Resposta do aluno Gladys West	33
Figura 14: Resposta do aluno Karlie Noon	33
Figura 15: Resposta do aluno MC Escher	34
Figura 16: Resposta do aluno Gladys West	34
Figura 17: Resposta do aluno Karlie Noon	34
Figura 18: Resposta do aluno MC Escher	35
Figura 19: Design segunda atividade plataforma Desmos	36
Figura 20: Atividade Desmos determinação dos arcos	37
Figura 21: Atividade Redução do segundo para o primeiro quadrante	37
Figura 22: Atividade expressões trigonométricas	37
Figura 23: Atividade expressões trigonométricas	37
Figura 24: Atividade multiplicação de arcos	39
Figura 25: Atividade imagem da função	39
Figura 26: Atividade rastro da função cosseno	40
Figura 27: Atividade explicação período das funções seno e cosseno	40
Figura 28: Atividade Máximo da função f	41
Figura 29: Atividade mínimo da função f	41

Figura 30: Atividade período da função f	41
Figura 31: Atividade imagem da função f	42
Figura 32: Atividade questão ENEM	42
Figura 33: Atividade Questão ENEM	43
Figura 34: Atividade gamificada	43
Figura 35: Atividade gamificada	44
Figura 36: Atividade gamificada	44
Figura 37: Atividade gamificada	44
Figura 38: Atividade gamificada	45
Figura 39: Atividade Alteração de parâmetros	46
Figura 40: Atividade Alteração de parâmetros	46
Figura 41: Atividade Alteração de parâmetros	47
Figura 42: Atividade Alteração de parâmetros	48
Figura 43: Resolução de Gladys West	48
Figura 44: Resolução do Karlie Noon	49
Figura 45: Atividade encontrar a senóide que intercepta os pontos	49
Figura 46: Exemplo da resolução dos estudantes	50
Figura 47: Atividade ENEM	50
Figura 48: Atividade ENEM	51

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Planejamento dos encontros	11
Quadro 2: Idade dos educandos e período do curso	13
Quadro 3: Depoimentos dos educandos referentes à participação de projetos	15
Quadro 4: Depoimentos dos educandos dificuldades nas disciplinas	16
Quadro 5: Depoimentos educandos experiências na graduação	18
Quadro 6: Depoimentos educandos contribuições das tecnologias digitais	19
Quadro 7: Depoimentos educandos tecnologias digitais minimizam dificuldades	20
Quadro 8: Depoimentos educandos experiências Desmos	21
Quadro 9: Depoimentos dos educandos sobre seu grau de aprendizado sobre funções trigonométricas	25
Quadro 10: Exemplo de tabela feita pelos estudantes	32

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	12
1. Metassíntese: uma análise do ensino de trigonometria com tecnologias digitais	15
2. O uso do Desmos no ensino de trigonometria: um estudo na Licenciatura em Matemática	29
3. Trigonometria no Desmos em aula online e/ou presencial: uma proposta de ambiência	55
CONSIDERAÇÕES FINAIS	99
APÊNDICE	102

INTRODUÇÃO

Com a constante evolução do Ensino de Matemática, sobretudo em relação à utilização de Tecnologias Digitais, torna-se necessário compreender quais são suas aplicações, limitações e concepções metodológicas envolvidas nesse processo. A partir das alterações curriculares e Pandemia da Covid-19 o uso de Tecnologias Digitais vem se tornando cada vez mais necessário para a Educação Matemática. Porém, se por um lado existe o apelo para que essas tecnologias digitais se incorporem à prática docente, por outro é necessário problematizar a partir de quais metodologias devemos implementar tais tecnologias. Além disso, deve-se questionar também se os profissionais docentes estão preparados para essa revolução, a nível de formação Inicial e continuada. Portanto, torna-se emergente a discussão das estratégias de formação de professores com tecnologias digitais.

Essa pesquisa é fruto de reflexões e discussões realizadas no âmbito do Grupo de Pesquisa GEPETICEM e do Programa de Pós-Graduação PPGEduCIMAT ambos lotados na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. A investigação está inserida em um projeto intitulado **Ambiências interativas e redes online para aprender matemática diferentemente¹**. Para contribuir com o escopo desse projeto, a presente pesquisa tem como objetivo geral analisar contribuições e limitações do uso do Desmos em atividades sobre Trigonometria implementadas com licenciandos em matemática. A dissertação está estruturada no formato Multipaper com os seguintes objetivos específicos:

- Produzir, através de uma metassíntese, análise dos movimentos das pesquisas que versam sobre o Ensino de Trigonometria através de Ambientes de Geometria Dinâmica Digitais, descrevendo as estratégias utilizadas e suas contribuições para o campo de pesquisa e apontar possíveis direcionamentos futuros, que será desenvolvido no primeiro artigo.

¹ Financiado pelo CNPq e aprovado no Comitê de Ética na pesquisa com o número: CAAE 78179124.6.0000.0311

- Investigar como o *Desmos Classroom*² contribui para que os licenciandos construam conhecimentos em atividades de Trigonometria, mediante a identificação e a análise de eventos críticos, propósito contemplado no segundo artigo.
- Apresentar, a partir da análise do primeiro e do segundo artigo, uma ambiência na área Desmos Sala de Aula, que possa ser utilizada na formação de professores de matemática, objetivo desenvolvido no terceiro artigo.

Esta pesquisa apresenta-se como uma pesquisa-formação, que trata sobre as complexas relações que vão se formando entre a formação inicial e continuada, entre as experiências vivenciadas na formação e no exercício da profissão, sobretudo, nos conhecimentos que podem emergir nessa troca entre docentes e discentes (SANTOS, 2019). Além disso, a investigação visa contribuir com a compreensão do sujeito com o objeto que lhes é exposto, na presente pesquisa conceitos de Trigonometria (Ciclo Trigonométrico e Funções Seno e Cosseno).

A partir da metassíntese a plataforma escolhida foi o Desmos³, mais especificamente, a área do Desmos sala de aula. Os encontros ocorreram presencialmente em uma turma da disciplina de Ensino de Matemática 2⁴ no primeiro semestre de 2024. O quadro 1 sintetiza o planejamento dos encontros⁵.

Quadro 1: Síntese do planejamento dos encontros

Encontro	Objetivo	Estratégias	Dinâmica interativa	Recursos
1º	Ambientar os estudantes na plataforma.	- Ambientar na plataforma - Acessar a turma virtual. - Responder perguntas sobre perfil do aluno. - Responder questões do ENEM.	Online e assíncrona.	Computador, smartphone, acesso à internet.
2º	Compreender os conceitos de ciclo trigonométrico, realizar manipulações interativas e fazer discussões.	- Comentar sobre as respostas dos Applets. - Explorar construções interativas através do Desmos sala de aula. - Responder questões do ENEM.	Presencial e Síncrona	Tablets, Acesso à internet.
3º	Realizar tarefas gamificadas de forma	- Comentar sobre as atividades do encontro anterior (30min)	Presencial e	Plataforma Desmos, Tablets,

² Desmos classroom (adiante Desmos sala de aula) é um ambiente específico da plataforma Desmos, o ambiente conta com tarefas pré-moldadas e possibilidades de criação de aulas interativas.

³ Disponível em: [Desmos | Matemática bela e gratuita.](#)

⁴ Ensino de Matemática 2 é uma disciplina de Prática de Ensino de Matemática.

⁵ Ver quadro detalhado no segundo artigo.

	colaborativa e resolver tarefas sobre os conteúdos explorados nos encontros anteriores.	- Explorar as Atividades propostas e solucionar os desafios. (1h30) - Discutir sobre todos os encontros e sobre quais aspectos auxiliaram no entendimento do conteúdo e quais dificultaram. (1h)	Síncro no.	Acesso à Internet.
--	---	---	------------	--------------------

Fonte: Elaborado pelo autor

A partir do vivenciado e analisado, ressalta-se a necessidade de realizar mais pesquisas sobre o ensino de Trigonometria voltada para a formação de professores com tecnologias digitais. A importância da interação, da visualização, da manipulação ou da construção de gráficos etc. para a aprendizagem de conceitos de Trigonometria no Desmos. Algumas limitações foram observadas, como a necessidade do acesso à internet e de utilizar dispositivos como tablets ou computadores, uma vez que as atividades em smartphones se mostraram algumas vezes incompatíveis. Com o produto educacional gerado é uma contribuição para formação (inicial ou continuada) de professores.

1. Metassíntese: uma análise do ensino de trigonometria com tecnologias digitais

Mateus Ágape Guerraão Lourenço

Marcelo Almeida Bairral

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – UFRRJ

Resumo: Este artigo faz parte de uma pesquisa que busca contribuir com reflexões acerca do uso de tecnologias digitais em Educação Matemática, ressaltando considerações sobre possibilidades e limitações desse recurso. Focaliza o estudo em uma metassíntese desenvolvida a partir das pesquisas de Muniz e Vergilio, mais especificamente em seus primeiros capítulos, destinados ao mapeamento, no caso de Muniz; e à revisão de literatura, no caso de Vergilio. Primeiramente, foi feita uma descrição de cada estudo bibliográfico, ressaltando seus pontos dialógicos e suas divergências. Em seguida, foi feita a atualização das bibliografias, utilizando as mesmas estratégias de busca dos autores. Por fim, destacam-se nesta pesquisa novas análises e tendências para os estudos e as reflexões no ensino de trigonometria com o uso de tecnologias, lançando vista para uma plataforma pouco usada, a Desmos.

Palavras-chave: metassíntese; tecnologias digitais; ensino de trigonometria.

Introdução

Para ampliar a visão acerca das pesquisas que vêm sendo desenvolvidas na área de Educação Matemática, sobretudo aquelas que trazem consigo o manuseio de tecnologias de geometria dinâmica no ensino de matemática, há necessidade de uma metassíntese sobre o tema. Esta pesquisa, então, terá início na produção da metassíntese, com a finalidade de obter uma investigação inicial dos movimentos das pesquisas que versam sobre o ensino de trigonometria por meio de Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD) digitais, descrevendo as estratégias utilizadas e suas contribuições para o campo de pesquisa. Além disso, pretende apontar possíveis direcionamentos futuros.

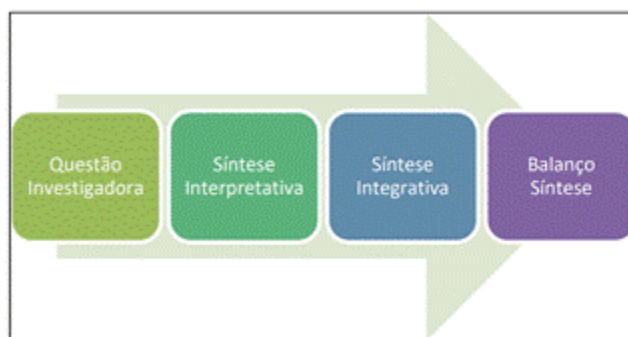
Para tal, é apropriado entender a metassíntese como uma estratégia de revisão de literatura cujo objetivo é descrever e produzir novas análises na área que se pesquisa. Essa estratégia metodológica possibilita ao pesquisador mapear a área de pesquisa e interpretar os dados coletados em pesquisas que possuem objetivos comuns (Oliveira *et al.*, 2015).

Por intermédio dessa interpretação, o pesquisador pode contribuir através de sua análise crítica para a discussão, bem como observar possíveis desdobramentos e direcionamentos do

campo em que está seu objetivo de pesquisa. Já as análises podem ser desenvolvidas por meio das relações entre essas pesquisas, como comparações, semelhanças e diferenças (Silva; Bairral, 2023).

Com isso, será produzida, aqui, uma metassíntese de acordo com a sistematização de Fiorentini e Crecci (2017) feita por Silva e Bairral (2023). A Figura 1 mostra a estratégia metodológica da metassíntese.

Figura 1: Estratégia metodológica da metassíntese



Fonte: Silva e Bairral (2023, p. 247)

Em primeira instância, deve-se levantar uma questão investigadora, que neste texto se fundamenta no ensino de trigonometria em AGD. Em seguida, [IA1] segundo Fiorentini e Crecci (2017, p. 247),

é preciso produzir uma síntese interpretativa, a partir da análise e da interpretação de cada trabalho, isto é, escrever sobre o objetivo ou a questão de pesquisa, as bases teóricas, o modo como a questão foi respondida, o contexto e o processo metodológico utilizado, os resultados obtidos etc.

Nesse momento, será oportuno descrever e interpretar separadamente os resultados das pesquisas selecionadas. Daí então, como definem Silva e Bairral (2023), a síntese integrativa, sistematicamente posta por meio de Fiorentini e Crecci (2017), se dedica a produzir resultados derivados da primeira análise. É nesse momento que o pesquisador irá observar semelhanças e lacunas – no geral, colocará as pesquisas selecionadas em comparação a fim de produzir novos resultados.

Em última análise, o pesquisador fará o que Fiorentini e Crecci (2017) chamaram de balanço de síntese: nada mais que o momento em que deve [IA2] realizar os apontamentos de desdobramentos e tendências do campo de pesquisa e contribuições relevantes sobre a área, tendo em vista as pesquisas analisadas.

Para a produção da revisão de literatura, norteia-se este levantamento nas dissertações de Vergilio (2023) e Muniz (2023). Tais dissertações foram selecionadas por apresentarem levantamentos que ajudaram os autores na seleção e na busca de pesquisas publicadas com enfoque no ensino de funções trigonométricas com o apoio do GeoGebra. Embora tenham usado fontes distintas, essas duas revisões são correlatas e foram realizadas em um intervalo de tempo aproximado. Esses elementos fazem com que uma metassíntese seja adequada. Em outras palavras, [IA3] a metassíntese de investigações sem objeto de estudo semelhante ou realizadas em tempos muito distantes pode não ser providencial.

Seleção e Descrição de Dissertações

Em Muniz (2023), o título é *Trigonometria e funções trigonométricas com tecnologias digitais: uma pesquisa-formação na Licenciatura em Matemática*. O autor, em seu título, contempla o tipo de pesquisa que será desenvolvida, o público-alvo da pesquisa e o tipo de conteúdo que será abordado. Os objetivos de sua pesquisa são mapear as propostas desenvolvidas para o ensino de trigonometria e funções trigonométricas e que fazem o uso do GeoGebra; e, a partir do mapeamento, selecionar e implementar duas sequências de atividades com o apoio do GeoGebra – e analisar tais resultados e contribuições para a formação inicial de professores de matemática. Muniz busca em seu primeiro capítulo, intitulado “Mapeando o percurso”, realizar um mapeamento de sua área de pesquisa.

No mapeamento, o autor leva em consideração a *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, por ser um potente veículo de divulgação e publicação científica da inovação de pesquisas na área da Educação Matemática com o uso do GeoGebra.

Para a captura das pesquisas, Muniz define o intervalo de tempo das datas de publicação entre 2012 e 2020 – a busca na revista eletrônica foi feita entre 10 de janeiro de 2022 e 24 de março de 2022. Além disso, o autor define que o meio tecnológico em que as pesquisas foram desenvolvidas não interferiram em sua busca, ou seja, não importava se a pesquisa tinha sido realizada utilizando como dispositivos computadores, *tablets* ou *smartphones*, entre outros.

Como estratégia de busca, o autor fez uso das palavras-chave “Trigonometria”, “Funções Trigonométricas”, “Seno”, “Cosseno” e “Tangente”.

Ao utilizar os critérios de busca, Muniz encontrou nove artigos e buscou descrever seus objetivos, ano de publicação e respectivo autor. Em seguida, descreveu cada pesquisa e as organizou de acordo com a palavra-chave utilizada para sua busca, constatando assim que para “Trigonometria” obteve seis resultados, para “Funções Trigonométricas” obteve dois, para “Seno” obteve um e para as restantes – “Cosseno” e “Tangente” – não obteve resultados.

Por meio do mapeamento de Muniz (2023), torna-se possível verificar não somente as pesquisas encontradas, mas também o público-alvo definido e seu tema central. Em relação ao público-alvo, grande parte dos resultados foi inconclusiva por falta de clareza nas pesquisas selecionadas (Cruz; Filho, 2019; Homa *et al.*, 2017; Júnior *et al.*, 2018; Júnior; Silva, 2015), porém foi possível determinar que – entre as pesquisas levantadas – duas foram direcionadas a professores atuantes na educação básica (Baldini; Cyrino 2012; Brito *et al.*, 2018). Assim, pode-se dizer que tais pesquisas possuem o foco de contribuir para a formação de professores, seja ela inicial ou continuada. Já Júnior e Henriques (2014) e Braz *et al.* (2019) possuem como público-alvo de suas pesquisas alunos da educação básica. Sobre o tema central das pesquisas selecionadas, Muniz (2023, p. 20) conclui:

Foi perceptível três focos temáticos nos textos mapeados:

1 – Resolução de problemas com o GeoGebra (CRUZ; FILHO, 2019);

2 – Reflexão acerca do conteúdo matemático a partir de atividades (BALDINI; CYRINO, 2012; JUNIOR; SILVA, 2015; JUNIOR; HENRIQUES, 2014; JUNIOR *et al.*, 2018; BRAZ *et al.* 2019, 2020; BRITO *et al.*, 2018), e

3 - Confecção de atividades que relacionem de trigonometria/funções trigonométricas com outros campos do conhecimento (HOMA *et al.*, 2017).

Por fim, é possível verificar que, para Muniz (2023), foi determinante para a implementação que as atividades selecionadas por meio das pesquisas mapeadas contemplassem o nível superior, gerassem reflexão sobre os conceitos e trouxessem interação entre profissionais e futuros profissionais da educação básica, como é desejável em uma pesquisa-formação.

A dissertação de Vergilio (2023), com o título *Funções Trigonométricas pelo olhar de licenciandos de Matemática com o uso do GeoGebra*, traz também informações pertinentes como público-alvo da pesquisa e a tecnologia de geometria dinâmica – no caso o GeoGebra. Também apresenta o tipo de conteúdo que será desenvolvido ao longo da dissertação. Por outro lado, não é possível concluir sobre o tipo de pesquisa que será desenvolvida ao se deparar somente com o título.

Vergilio apresenta como objetivo de seu estudo analisar as interações entre os participantes e a interatividade com os ambientes virtuais ao vivenciarem tarefas sobre funções trigonométricas com tecnologias digitais. Para tal, primeiramente, utilizou-se da revisão de literatura, mais especificamente de um levantamento bibliográfico, com a finalidade de compreender quais pesquisas estavam sendo desenvolvidas e quais similaridades poderiam ser observadas com a pesquisa de sua autoria. Por conseguinte, desenvolveu em seu segundo capítulo um estudo sobre as funções seno, cossecante e arco-seno com o GeoGebra. Já o terceiro capítulo se dedica à implementação de sua pesquisa, à metodologia adotada e a uma análise preliminar do seu público. No quarto capítulo a autora compromete-se a apresentar suas análises e os resultados de sua implementação. Por fim, no quinto capítulo, Vergilio apresenta, como fruto de sua pesquisa e de seus resultados, seu produto pedagógico: um caderno de atividades para professores de matemática.

Contudo, em seu levantamento Vergilio optou por utilizar o Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes). Em uma primeira busca, a autora encontrou dificuldade de delimitação por utilizar palavras-chave como “Funções Trigonométricas”, “Seno”, “Cosseno” e “Arco-Seno”. A grande abrangência de resultados, segundo ela, é devida à ferramenta de busca da Capes, que identifica as palavras separadamente e devolve todas as opções que possuem as palavras anteriormente citadas. Após a primeira busca, a palavra-chave escolhida pela autora foi “Funções Trigonométricas”. Utilizando a palavra-chave, Vergilio permaneceu com um grande volume de resultados, e a maioria deles não contemplava seu objetivo de pesquisa – o ensino de funções trigonométricas. Para restringir seus resultados, a autora fez uso do operador booleano AND. Assim, sua busca restringiu-se aos resultados que possuem as duas palavras – “Funções” e “Trigonométricas” – simultaneamente. Dessa forma, Vergilio, no que se refere às dissertações, restringiu seus resultados de 27 572, sem o operador booleano, para 190 com o operador booleano AND. Da mesma maneira, ao pesquisar

sobre as teses, sua busca se reduziu de 10 893 resultados, sem o uso do operador booleano AND, para 16 com o uso do operador.

Ainda que seus resultados tenham sido significativamente refinados, para Vergílio, foi observada uma quantidade de trabalhos a serem considerados que não fazia parte do seu objetivo de pesquisa. Com isso, a autora adotou critérios e estratégias de busca e coleta de resultados: aplicou os filtros em trabalhos publicados entre os anos de 2015 e 2021; filtrou também os trabalhos que contemplassem as áreas de conhecimento Matemática e Ensino de Ciências e de Matemática; e, por último, analisou se a pesquisa fazia o uso do GeoGebra.

Das 190 dissertações, utilizando os critérios de inclusão e exclusão, Vergílio encontrou 30 trabalhos, que passaram pelos critérios de ano e área de conhecimento, e acrescentou “AND GeoGebra” na busca. Em relação às teses, a autora encontrou apenas 1 resultado que atendesse aos mesmos critérios. A partir desses resultados, ela relata que, dessas 31 pesquisas, apenas 19 estavam cadastradas na plataforma – e que teve acesso a 18 delas.

Após a análise das 18 dissertações, Vergílio organizou-as por similaridades com seus objetivos de pesquisa, selecionando assim as pesquisas que possuem como público-alvo licenciandos de matemática e que de fato obtiveram validação por aplicação ou implementação.

Atualização das Revisões de Literatura

Ao refazer as buscas dos autores utilizando as mesmas estratégias, é possível constatar novas pesquisas que podem vir a contribuir para a metassíntese. Ao visitar a revista eletrônica utilizada por Muniz (2023), fazendo o uso dos mesmos mecanismos de buscas, observa-se uma nova pesquisa publicada em 2022. No levantamento bibliográfico de Vergílio (2023), é possível acrescentar um total de seis pesquisas – quatro dissertações, uma tese e um artigo. Uma dessas quatro dissertações encaixava-se nas estratégias de busca de Vergílio, porém é provável que não estivesse disponível na plataforma quando a autora fez sua busca. Da mesma forma, também foi encontrada uma tese que se encaixava nos critérios de inclusão. A atualização do levantamento bibliográfico está organizada no Quadro 1, a seguir.

Quadro 1: Atualização do levantamento bibliográfico

Ano	Título	Autor	Mecanismo de Busca
-----	--------	-------	--------------------

2020	Estudo das Funções Seno e Cosseno por meio de um modelo didático alternativo integrado ao GeoGebra	Eliane Santana de Souza Oliveira	Catálogo CAPES
2021	Funções trigonométricas no ENEM com auxílio do GeoGebra	Carolina de Paula Ribeiro Novaes	
2022	Ensino de funções trigonométricas com o auxílio da modelagem matemática e do software GeoGebra	Diego Rodolfo Munhoz	
2023	O Ensino de Trigonometria e Funções Trigonômétricas com ênfase em metodologias ativas utilizando o GeoGebra	Andrea Guimarães Leite	
	Explorando o Movimento Harmônico Simples para o Ensino das Funções Trigonômétricas: Um olhar sobre o uso do GeoGebra no estudo das Funções Seno e Cosseno	Rinaldo Rufino Lopes	
2022	O GeoGebra no Estudo de Funções Trigonômétricas a partir da Análise Gráfica	Ângela Fernandes Pereira; Helder Valdomiro Correia Vaz	Revista Internacional GeoGebra

Fonte: Elaborado pelo autor

Por conseguinte, cabe a este texto analisar e descrever as pesquisas que foram publicadas após e durante os levantamentos de Muniz (2023) e de Vergilio (2023), bem como ressaltar suas respectivas contribuições para a área de pesquisa em questão. É o que se passa a apresentar a seguir.

Oliveira (2020) apresenta em sua tese os resultados da aplicação de um modelo alternativo denominado modelo praxeológico de referência, com o uso de GeoGebra para o ensino de funções trigonométricas, mais especificamente as funções seno e cosseno. Além disso, a autora adota como quadro teórico a antropologia do didático, com o fim de analisar os resultados das investigações sobre as funções seno e cosseno submetidas em seis sessões de implementação, em uma turma do primeiro semestre da Licenciatura em Matemática.

Novaes (2021) busca destacar a importância do estudo das funções trigonométricas para o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Com isso, traz em seu embasamento teórico o estudo das funções trigonométricas e suas aplicações na área das ciências. Em seguida, propõe o uso do GeoGebra para a aplicação de uma sequência didática, que consistia em estudar e resolver as questões do Enem que envolvem funções trigonométricas, a partir de construções no GeoGebra. Um diferencial no trabalho da autora é a distinção dos dispositivos móveis utilizados em suas aplicações em cada uma das cinco questões do Enem exploradas em sala.

Munhoz (2022) analisa as contribuições do *software* GeoGebra e da modelagem matemática para o ensino e aprendizagem das funções trigonométricas. Por meio do GeoGebra, o autor explora algumas aplicações e resoluções de questões contextualizadas do Enem com o objetivo de gerar para professores da educação básica um material de apoio relacionado ao estudo de funções trigonométricas.

Pereira e Vaz (2022) pretendem potencializar a capacidade de autoavaliação e de descobertas por parte dos alunos com o uso do GeoGebra como ferramenta. Por meio de tarefas e da divisão em grupos, os alunos têm a possibilidade de se familiarizar com o GeoGebra e visualizar e manipular as funções trigonométricas por intermédio da alteração dos parâmetros delas.

Leite (2023) almeja implementar metodologias ativas e o *software* GeoGebra no ensino de funções trigonométricas. Para tal, a autora desenvolve um quadro teórico focado nas contribuições das metodologias ativas. Por fim, como produto de sua pesquisa, ela apresenta um *book* que traz atividades prontas nos moldes de *applets*, com o objetivo de serem manuseados por professores e alunos da educação básica. As atividades não possuem foco único no conteúdo de trigonometria e funções trigonométricas, abrangem também outras áreas da matemática. Ao desenvolver as atividades, o objetivo da autora, por meio desses *applets*, é proporcionar uma participação mais ativa dos alunos.

Por fim, Lopes (2023) dedica-se a explorar, com o uso do GeoGebra, as funções trigonométricas presentes no movimento harmônico simples. A pesquisa foi aplicada para alunos do terceiro ano do Ensino Médio técnico. O autor utiliza o GeoGebra como ferramenta didática para que os alunos explorem o movimento harmônico simples. Para alcançar o objetivo de fornecer uma alternativa que culmine na compreensão dos alunos acerca das funções trigonométricas, Munhoz (2023), em sua implementação, ele faz uso de uma avaliação diagnóstica, seguida de uma sequência didática com o uso do GeoGebra para a melhor compreensão dos alunos participantes da atividade e de uma avaliação comparativa ao fim, para fins de análise.

Com o intuito de aproximar o mapeamento de Muniz (2023) e o levantamento bibliográfico de Vergilio (2023), foi elaborado o quadro encontrado no Apêndice A, com as principais informações das pesquisas coletadas. Mesclaram-se as estratégias dos recortes de ambas, acrescentando os objetivos – como feito na pesquisa de Muniz (2023) – em todas as

pesquisas e definindo o público-alvo e a validação por aplicação como feito em Vergílio (2023), com o fim de contribuir para a análise do campo de pesquisa.

Integrando saberes

É possível destacar pontos em que ambas as pesquisas dialogam. Em primeira análise, as pesquisas de Muniz (2023) e Vergílio (2023) optam por fazer um levantamento de bibliografia prévio para conhecer a área de pesquisa com tecnologias digitais na Educação Matemática, sobretudo com enfoque naquelas que fazem o uso do *software* GeoGebra. Além da investigação inicial em suas pesquisas com vistas a se aprofundarem na área e no que estava sendo desenvolvido, os autores também compartilham de estratégias de construção semelhantes: ambas as pesquisas, por mais que consultem repositórios científicos distintos, ainda assim utilizam palavras-chave, estratégias de inclusão e exclusão e formas de seleção bastante parecidas. Como exemplos desses aspectos presentes nas pesquisas, podem-se destacar: a filtragem por período de publicação de pesquisas, as palavras-chave envolvidas nas buscas do referido objeto de pesquisa e o filtro por área de pesquisa – ainda que, nesse último aspecto, Muniz (2023) tenha usado a seleção da revista e Vergílio (2023), os filtros no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes. Além disso, os autores também se utilizam de estratégias textuais parecidas para analisar os levantamentos feitos, como o uso de quadros para organizar as pesquisas selecionadas e a descrição detalhada das pesquisas, trazendo o modo como cada pesquisa pode contribuir para o objetivo de estudo.

Por fim, as duas pesquisas selecionadas – Muniz (2023) e Vergílio (2023) – para a confecção da metassíntese trazem em seus quadros teóricos o enfoque na formação de professores e fazem uso de uma sequência de atividades, seja ela selecionada de bibliografia, seja de confecção própria, com o objetivo de investigar as contribuições da utilização do AGD denominado GeoGebra. Para finalizar, os autores contribuem para a área de pesquisa intitulada “Ensino de Trigonometria com o apoio de Tecnologias Digitais”, apresentando sua implementação e os resultados coletados e analisados.

Analizando possíveis movimentos de pesquisa

Ao realizar a revisão de literatura no modelo de uma metanálise ou metassíntese, podem-se verificar algumas tendências e possíveis desdobramentos. A partir do Quadro 2, apresentado a seguir, conclui-se que – tomando como base as revisões de literatura de Muniz (2023) e Vergilio (2023) – é pouco expressivo o número de pesquisas desenvolvidas com objetivo de contribuir para a formação de professores, seja ela inicial, seja continuada. Assim como também poucas pesquisas apresentam uma validação por meio de uma aplicação de um objeto experimental, seja ele uma sequência didática, seja uma sequência de atividades ou tarefas.

Quadro 2: Classificação das pesquisas

Tipo de Pesquisa	Disponíveis	Voltada para a Formação de Professores	Possui Implementação
Artigos	10	1	1
Dissertações	21	4	0
Teses	1	1	1

Fonte: Elaborado pelo autor

Por outro lado, alguns aspectos considerados relevantes para os apontamentos pouco aparecem, entre eles: apresentar as concepções metodológicas em que se embasam as pesquisas e sinalizar o dispositivo móvel utilizado na implementação da pesquisa.

As concepções metodológicas em que o autor se baseia são importantes para a prática docente com o uso de tecnologias digitais, uma vez que tais posicionamentos podem modificar a prática docente e as contribuições pedagógicas que o uso de AGD pode possibilitar. Nesse sentido, focalizar a pesquisa ou simplesmente destacar os dispositivos utilizados para a aplicação da pesquisa pode influenciar na aquisição dos resultados, pois o uso de dispositivos *touchscreen* (*smartphones* ou *tablets*) ou de dispositivos *desktop* (computadores) interfere no modo como os participantes da pesquisa interagem com a tecnologia.

Em última análise – tendo como foco pesquisar sobre práticas de ensino de trigonometria e/ou funções trigonométricas com o apoio de tecnologias digitais –, um fator que poderia potencializar os resultados é o uso da interdisciplinaridade. Ao passo que o referido conteúdo tem forte relação com outras áreas de conhecimento, como as Ciências, poucos estudos foram desenvolvidas trazendo essa perspectiva, como apontam as pesquisas de Muniz (2023) e Vergilio (2023). Outro fator que é bastante comum na didática do ensino de trigonometria é o apoio na história da matemática. Muniz (2023) e Vergilio (2023) lançam mão desse recurso dentro do campo de pesquisa.

Desdobramentos e contribuições para o campo

As pesquisas escolhidas para a elaboração desta metassíntese têm como objetivo analisar as contribuições do GeoGebra – um AGD gratuito e de livre acesso – para o ensino de trigonometria e funções trigonométricas. Tendo isso em vista, uma busca sobre o ensino de trigonometria, sobretudo quando se introduz nesse estudo o uso das tecnologias digitais, sinaliza que essa é uma área de pesquisa que carece de mais implementações e resultados como mostrado no quadro 2. Dessa forma, esta análise possibilita a proposta da pesquisa sobre o ensino de trigonometria e funções trigonométricas sob a luz das contribuições de AGD, porém com o apoio da plataforma Desmos.

Ao realizar as mesmas estratégias de coleta no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, é notório que essa é uma área que necessita ser desenvolvida. O Quadro 3, a seguir, apresenta os resultados da busca.

Quadro 3: Resultados de Busca Desmos

Desmos	Com Filtro de área de conhecimento	Desmos AND Funções	Desmos AND Funções AND Trigonométricas
55	11	2	1

Fonte: Elaborado pelo autor

Quando se utilizou a palavra-chave “Desmos”, apenas 55 trabalhos surgiram como resultado. Utilizando o filtro de área de conhecimento, como aponta Vergilio (2023), e limitando a busca com critérios de inclusão e exclusão que permitem selecionar apenas as pesquisas que pertencem às áreas do conhecimento “Matemática” e “Ensino de Ciências de Matemática”, o número de pesquisas encontradas cai para 11 no total. Já utilizando o operador booleano “AND”, como aponta Vergilio (2023) em sua pesquisa, a busca pela palavra-chave “Desmos AND Funções” obteve apenas 2 resultados. Por fim, com o intuito de pesquisar somente o assunto de funções trigonométricas, é necessário fazer o uso do operador booleano novamente para limitar ainda mais as buscas. Utilizando como palavra-chave “Desmos AND Funções AND Trigonométricas”, existe o resultado unitário. Dessa forma, ao utilizar tais mecanismos de busca, é possível viabilizar novos horizontes de pesquisa para o ensino de trigonometria e/ou funções trigonométricas com o uso de AGD, nesse caso fazendo o uso do Desmos.

Do resultado dessa busca, destaca-se o trabalho de Cândido (2023) – intitulado *Sala Invertida de Funções Trigonométricas usando a classroom do Desmos* –, que traz o uso da plataforma Desmos para o ensino de funções trigonométricas aplicado em consonância com a metodologia de sala de aula invertida.

Considerações Finais

A partir desta metassíntese, foi possível observar novos direcionamentos no campo de pesquisa, bem como tendências e desdobramentos já existentes. A estratégia de revisão de literatura permite analisar o modo como ambas as revisões selecionadas para análise se complementam. Inicialmente, adicionando novas pesquisas que seguem a estratégia de busca dos autores, tem-se a ideia do modo como a área de pesquisa se desenvolve.

Ao tomar como objeto central as duas revisões com o uso de AGD, pode-se verificar que o uso do GeoGebra é bem comum nas temáticas envolvidas. No que se refere aos conteúdos de trigonometria, ainda que esse ramo seja menos explorado quando comparado a outros conteúdos, foi possível constatar que existe bibliografia considerável com o uso do GeoGebra. A partir desse ponto de vista, esta revisão de literatura permitiu lançar um olhar para a área com uma análise mais aprofundada. Alguns pontos críticos foram evidenciados, como o público-alvo das

pesquisas, as aplicações das pesquisas e o uso de outro AGD, por exemplo o Desmos. Assim, pode-se conectar inicialmente cada pesquisa em relação a seu público-alvo – a maioria das pesquisas é direcionada à educação básica, o que torna a educação superior pouco explorada. Ainda nesse contexto, muitas pesquisas não possuíam relatos e resultados decorrentes de aplicação. Por fim, deixa-se como resultado central desta metassíntese a ausência da exploração de conteúdos de trigonometria e de pesquisas com o uso de ambientes como o Desmos na formação inicial de professores de matemática.

Esta análise foi desenvolvida com o fim de lançar um olhar para os direcionamentos das pesquisas em Educação Matemática sobre trigonometria com o uso de tecnologias digitais. Como resultado, foi possível gerar um quadro com as pesquisas realizadas (Apêndice A), que se dedica a categorizar todas as pesquisas levantadas pelas dissertações selecionadas na metassíntese e fazer a inclusão das atualizações das investigações adicionadas mais recentemente. Indicam-se ainda os objetivos de cada pesquisa, o público-alvo, a aplicação e o ano de publicação. Como próximos passos para um trabalho futuro, propõem-se uma análise entre as pesquisas e um mapeamento atualizado do Desmos mediante estudos na Educação Matemática, em contextos *online* ou presenciais.

REFERÊNCIAS

CÂNDIDO, José Valério Moreira. **Sala invertida de funções trigonométricas usando a camada de computação do Desmos**. 2023. 38 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Pará, Castanhal, 2023.

FIORENTINI, Dario; CRECCI, Vanessa Moreira. Metassíntese de pesquisas sobre conhecimentos/saberes na formação continuada de professores que ensinam matemática. *Zetetiké*, [S. l.], v. 25, n. 1, p. 164, 30 abr. 2017. DOI: <http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i1.8647773>

LEITE, Andréa Guimarães. **O estudo de trigonometria e funções trigonométricas com ênfase em metodologias ativas utilizando o GeoGebra**. 2023. 88 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2023.

LOPES, Rinaldo Rufino. **Explorando o movimento harmônico simples para o ensino das funções trigonométricas**: um olhar sobre o uso do GeoGebra no estudo das funções seno e cosseno. 2023. 87 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, 2023.

MUNHOZ, Diego Rodolfo. **Ensino de funções trigonométricas com o auxílio da modelagem matemática e do software GeoGebra**. 2022. 105 f. Dissertação (Doutorado em Matemática) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

MUNIZ, Gabriel dos Santos. **Trigonometria e funções trigonométricas com tecnologias digitais**: uma pesquisa-formação na Licenciatura em Matemática. 2023. 111 f. Dissertação (Mestrado em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2023.

NOVAES, Carolina de Paula Ribeiro. **Funções trigonométricas no Enem com auxílio do GeoGebra**. 2021. 102 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

OLIVEIRA, Adélia Augusta Souto de. Metasynthesis notes for systematization of extensive review and internal criticism to scientific production. **Investigação Qualitativa em Saúde**, Aracaju, v. 1, n. 0, p. 147-152, ago. 2015.

OLIVEIRA, Eliane Santana de Souza. **Estudo das funções seno e cosseno por meio de um modelo didático alternativo integrado ao Geogebra**. 2020. 318 f. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2020.

PEREIRA, Ângela Eloisa Fernandes; VAZ, Helder Vlademiro Correia. O GeoGebra no estudo de funções trigonométricas a partir da análise gráfica. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, [S. l.], v. 11, n. 2, p. 119-137, 12 nov. 2022. DOI: <http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2022.v11i2p119-137>

SILVA, Alexander Pires da; BAIRRAL, Marcelo Almeida. Metassíntese: um estudo de revisão de literatura. In: SILVA, Alexander Pires da; BAIRRAL, Marcelo Almeida. *Elaboração e mapeamento de pesquisas com tecnologias*. Porto Alegre: Fi, 2023. p. 243-259.

VERGILIO, Joyce dos Santos. **Funções trigonométricas pelo olhar de licenciandos de matemática com o uso do GeoGebra**. 2023. 104 f. Dissertação (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2023.

2. O uso do Desmos no ensino de trigonometria: um estudo na Licenciatura em Matemática⁶

Mateus Ágape Guerrão Lourenço⁷

Marcelo Almeida Bairral⁸

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – UFRRJ

Resumo: Este artigo faz parte de uma pesquisa que busca contribuir com reflexões acerca do uso de tecnologias digitais no ensino de matemática, ressaltando considerações sobre possibilidades e limitações desse recurso. Focaliza como objetos de estudo a trigonometria e as funções trigonométricas seno e cosseno. Os sujeitos são licenciandos em Matemática, e trata-se de uma pesquisa-formação. O recurso digital utilizado foi o Desmos Sala de Aula e a estratégia de análise foi a evidenciação e análise de eventos críticos que ocorreram ao longo de três encontros síncronos. Os dados foram coletados mediante gravação em vídeo, registros escritos e registros na plataforma. Foi possível – além de refletir sobre o recurso – destacar alguns pontos favoráveis ao uso do Desmos, entre eles, a visualização, a manipulação ou construção e o dinamismo do dispositivo.

Palavras-chave: Educação Matemática; tecnologias digitais; trigonometria; Desmos Sala de Aula.

1 Introdução

A inovação tornou-se uma necessidade cada vez mais presente nas discussões no âmbito da Educação, sobretudo, no ensino de matemática. Juntamente com essa necessidade de mudança de paradigmas, tornam-se necessárias práticas auxiliadas por tecnologias digitais. Este artigo é fruto de uma pesquisa de mestrado profissional cujo objeto de estudo é a trigonometria. Os sujeitos envolvidos na pesquisa-formação (Santos, 2019) são licenciandos inscritos na disciplina de Ensino de Matemática II da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ).

A revolução da informação, combinada à pandemia da Covid-19, suscitou e evidenciou a prática docente aliada ao uso de tecnologias digitais. Inicialmente, tal prática se deu pela necessidade de quebrar barreiras físicas, tanto pela necessidade de alcançar indivíduos

⁶ Artigo a ser submetido

⁷ mateusguerrao@gmail.com

⁸ mbairral@ufrj.br

impossibilitados de estar presentes em ambientes presenciais quanto pela continuidade do ensino mediante uma imposição de isolamento social.

O uso de tecnologias digitais nos dias de hoje se justifica pela forma que interagimos na sociedade atual e pela presença desses recursos cada vez mais indissociáveis do nosso cotidiano pessoal e profissional. Para fundamentar tais debates, este texto trará como ponto-chave o ensino de matemática com tecnologias digitais, que está constantemente a serviço do currículo. As tecnologias digitais incorporadas ao ensino e aprendizagem de matemática são motivo, muitas vezes, de desconforto por parte do professor, devido à necessidade de uma formação – tanto inicial quanto continuada – que o prepare para enfrentar essa mudança de paradigmas. Tal mudança ficou muito evidente nos períodos pandêmico e pós-pandêmico vivenciados entre os anos de 2020 e 2022.

Nesse cenário, é possível observar que a tecnologia, muitas vezes vista como grande facilitadora dos processos de aprendizagem, não desempenhou esse papel. Dessa maneira, este texto tem por objetivo investigar o modo como o Desmos Sala de Aula⁹ contribui para que os alunos construam – mediante a abordagem de análise pautada na seleção de eventos críticos – seus conhecimentos em atividades de trigonometria e funções trigonométricas.

Ressaltamos a importância de as atividades desenvolvidas proporcionarem a interação entre os indivíduos e de haver um objetivo comum pré-determinado. Para tal, os artefatos tecnológicos devem ser entendidos, para fim da construção desta pesquisa, de forma que o virtual seja uma construção paralela à realidade social estabelecida. E assim como o real, o virtual deve proporcionar interações pontuais e construções coletivas.

No contexto da pandemia da Covid-19, por exemplo, com o objetivo de dar continuidade ao ensino de forma remota e emergencial, em algumas instituições de ensino as tecnologias e os recursos digitais foram explorados sem que houvesse uma recontextualização nos caminhos escolhidos para ensinar matemática. Tais considerações foram constatadas em vivências próprias do primeiro autor deste texto por meio do projeto da Residência Pedagógica no contexto do Ensino Remoto Emergencial de algumas escolas públicas de Seropédica.

⁹ Desmos Sala de Aula é um ambiente específico da plataforma Desmos. O ambiente conta com tarefas pré-moldadas e possibilidades de criação de aulas interativas. A plataforma Desmos pode ser acessada em: <https://www.desmos.com/?lang=pt-BR>

Na prática, em sua grande maioria, mediante essas vivências, o primeiro autor pôde observar que alguns recursos digitais, como o Google Classroom e o Google Meet, foram utilizados para reprodução do ensino tradicional, com aulas expositivas apenas, em que a apresentação de *slides* somente reproduz a lousa. Ou seja, torna-se necessário discutir sobre o modo como as metodologias construtivistas e com geração de significados podem ser utilizadas por intermédio de tecnologias digitais e, com isso, fazer com que a prática docente possa ser norteada por tais considerações.

Sendo assim, levantamos algumas discussões, entre elas: como esses Ambientes Virtuais de Aprendizagem podem contribuir para que os alunos construam seus conhecimentos mediante metodologias de ensino que suprem lacunas cognitivas na construção do conhecimento matemático? Por fim, algumas considerações emergem nesse cenário.

As tecnologias de informação e comunicação (TIC), desde suas origens, adquirem grande espaço na área da Educação. De acordo com Bairral (2018, p. 19), “uma TIC se caracteriza por conectividade, multiplicidade de formas discursivas, não linearidade na navegação e formas variadas de comunicação”.

Dessa forma, faz-se necessário que professores compreendam seus potenciais e as práticas pedagógicas que podem ser adotadas a partir de espaços virtuais de aprendizagem. Nesse sentido, buscaremos compreender, por meio da bibliografia, o modo como surgiu essa dinâmica de ensino-aprendizagem, como se tornaram os espaços virtuais educacionais que existem nos dias de hoje e de que forma esses espaços podem ser utilizados no ensino de matemática de modo que contribuam para um aprendizado significativo para o aluno. Valente (1999, p. 1) esclarece que

a utilização de computadores na educação é muito mais diversificada, interessante e desafiadora, do que simplesmente a de transmitir informação ao aprendiz. O computador pode ser também utilizado para enriquecer ambientes de aprendizagem e auxiliar o aprendiz no processo de construção do seu conhecimento.

Nesse sentido, as TIC – inicialmente representadas pelos computadores – foram introduzidas no meio educacional com o objetivo de letrar os alunos na área da informática. Esse letramento inicial foi marcado por métodos mais tradicionais de ensino. Valente (1999, p. 1), ao abordar a

informática na educação que estamos tratando, enfatiza o fato de o professor da disciplina curricular ter conhecimento sobre os potenciais educacionais do computador e ser capaz de alternar adequadamente atividades tradicionais de ensino-aprendizagem e atividades que usam o computador. No entanto, a atividade de uso do computador pode ser feita tanto para continuar transmitindo a informação para o aluno e, portanto, para reforçar o processo instrucionista, quanto para criar condições do aluno construir seu conhecimento.

No âmbito educacional, esse método permitiu que os indivíduos pudessem se familiarizar com esse recurso e manuseá-lo corretamente. Esse contato inicial foi importante, pois, assim como na matemática, se quisermos construir conhecimento utilizando uma linguagem, devemos aprender a nos comunicar por meio dela – esse fator é extremamente determinante tanto para a Educação Matemática quanto para a Linguagem Computacional. Desse modo, precisamos, a princípio, nos apropriar das tecnologias para, assim, associá-las de maneira contundente no ensino de matemática, ou seja, de forma a garantir que as práticas pedagógicas sejam enriquecidas e contribuam para a aprendizagem dos estudantes.

Em seguida, vale refletir sobre quais mudanças a incorporação de tecnologias digitais geraria no ensino-aprendizagem, visto que as TIC transportam parte dos objetos de estudo de um meio físico e palpável para um ambiente virtual. Nesse contexto, constatamos que essas mudanças devem ser consideradas, já que se relacionam diretamente com a forma como se aprende e o modo como a informação trafega.

Sobre o recurso tecnológico, Valente (1999, p. 2) afirma: “Usá-lo com essa finalidade, requer a análise cuidadosa do que significa ensinar e aprender bem como demanda rever o papel do professor nesse contexto”. Sendo assim, a utilização de TIC no ensino de matemática implica na ressignificação das metodologias de ensino bem como do papel do professor nesse processo e do modo como de fato se aprende nessa dinâmica.

Com isso, podemos destacar a importância do professor nessa nova dinâmica de ensino. Apesar de as máquinas serem vistas como autossuficientes, elas não substituem as contribuições que o professor deve realizar nos processos formativos. Porém, mesmo que não automatizem o ensino-aprendizagem, elas determinam uma série de mudanças na prática pedagógica que o professor deve desempenhar. Segundo Valente (1999, p. 12),

deve-se criar condições para que o professor saiba recontextualizar o aprendizado e a experiência vividas durante a sua formação, para a sua realidade de sala de aula compatibilizando as necessidades de seus alunos e os objetivos pedagógicos que se dispõe a atingir.

Portanto, o professor precisa reconhecer que, em espaços virtuais, a troca de informações se torna cada vez mais rápida, fazendo com que seu papel passe a ser de mediador desse processo. Assim, ele pode dedicar sua prática a filtrar as informações que os alunos possuem e procuram, fazendo considerações pertinentes à construção do conhecimento dos alunos.

A partir da discussão sobre a maneira como os recursos tecnológicos surgem e favorecem o ensino e a aprendizagem, manifesta-se a necessidade de discutirmos o modo como ocorrem os processos teóricos e metodológicos nessa prática educacional. Algumas reflexões emergem desses apontamentos, como, por exemplo, o questionamento sobre quais metodologias de ensino podemos adotar para que os processos cognitivos sejam enriquecidos; e quais características as trilhas de aprendizagem devem possuir para que a aquisição de conhecimento com o uso de aparatos tecnológicos proporcione a interação e a construção ativa de significados.

Contrastando metodologias de ensino tradicionais, Colinviaux (2008) explana que, se o professor ensina, o aluno então irá aprender. Caso isso não aconteça, infere-se que o aluno não assimilou tais ensinamentos por não prestar a devida atenção na explicação ou por deficiências acumuladas em etapas anteriores de seu processo de escolarização. Isso ocorre devido à crença de que o aprendizado é linear e as etapas do desenvolvimento são homogêneas. A docente mostra que o aprendizado na verdade é particular de cada indivíduo. Tendo isso em vista, cada aluno tem seu ritmo de aprendizado, e uns podem atingir a generalização de um conceito em menos etapas do que outros. Com isso, um ponto forte da aprendizagem apoiada por tecnologias digitais é o fato de que as construções de conhecimento podem ser feitas levando em consideração as contribuições coletivas de um grupo de alunos. De certo modo, a conexão e a interação entre os alunos, as ferramentas tecnológicas e o professor podem ser feitas de maneira não linear, mesclando assim as discussões pertinentes a um objeto de estudo e o pensamento que os alunos constroem acerca desse objeto. Nesse contexto, o professor então deve fazer uso de ferramentas digitais, de modo que reforce o comportamento colaborativo entre os alunos, dando ênfase às discussões e aos direcionamentos pertinentes.

Nesta pesquisa, entendemos a aprendizagem do modo como afirma Colinviaux (2008, p. 4): “a aprendizagem é um objeto de estudo do campo da psicologia cujas abordagens dependerão

da perspectiva adotada: comportamentalismo ou cognitivismo. No contexto escolar, há uma intervenção externa planejada e sistematizada para se conduzir a aprendizagem”.

Porém, quais são as motivações que geram respostas – tanto corretas quanto erradas – acerca de determinado conteúdo? Por muito tempo, nas diversas esferas do ensino, não houve essa investigação. Algumas características da aprendizagem com tecnologias digitais, em um contexto de construção de conceitos e significados, podem ser ressaltadas – por exemplo, o modo como a incorporação de tecnologias ao ensino de matemática torna possível a coleta de dados de maneira mais concisa.

Exemplificando, ao incluir o uso de tecnologias em sala de aula, o professor tem o apoio do recurso tecnológico para coleta de dados – o que possibilita uma liberdade maior de interação com os alunos – e pode gerar relatórios e obter *feedbacks* de maneira automatizada. Esses aspectos possibilitam que o professor assuma o posto de mediador com mais contundência. Dessa forma, sua prática docente transforma-se para reorganizar a dinâmica do ensino.

Em contrapartida à aprendizagem do ponto de vista comportamentalista tradicional, Colinvaux (2008, p. 7) afirma:

Para uma concepção construtivista, aprender requer a participação ativa do aprendiz – seja ele um aluno em sala de aula, uma criança brincando ou um adulto em alguma situação da vida cotidiana. Dito de outro modo, uma abordagem construtivista evidencia o papel central do sujeito, de suas ações e de sua participação nas atividades de aprendizagem.

Portanto, o aprendiz, seja ele qual for, deve ter papel ativo no processo de ensino-aprendizagem. Trazendo essa discussão, deixamos claro aqui que, em uma metodologia de ensino inovadora, como a de utilizar tecnologias digitais no ensino de matemática, o que torna essa aprendizagem significativa é a forma como é conduzida essa prática – os recursos digitais em si não geram uma aprendizagem construtivista por si só. Com isso, faz-se necessário que o professor mediador tenha capacidade de conduzir tais práticas.

Nessa esfera, destacamos a importância da formação do professor perante o uso de tecnologias educacionais. Saber utilizar *softwares* e ambientes virtuais não faz com que o aluno assuma papel central na construção de seu conhecimento.

Por outro lado, a aprendizagem demanda a exploração de novos conceitos e novos espaços e mudanças cognitivas: “aprender envolve sempre alguma mudança, interessando

especialmente aquelas que caracterizam a emergência de novidades, aquelas em que aparecem condutas que indicam novas formas de ver, pensar, fazer ou falar” (Colinvaux, 2008, p. 7). A partir desse ponto de vista, o professor, em sua prática, deve considerar como ponto de partida a cultura que o grupo de alunos traz como bagagem para o espaço de aprendizagem e, então, possibilitar a construção e significação desse imaginário por meio de determinados conceitos que serão introduzidos para os alunos. Essa construção de significados possibilita que o aluno perceba e entenda o modo como os objetos de estudo se relacionam com as suas vivências, proporcionando assim o que chamamos de aprendizagem significativa.

Ainda no movimento de construção ativa de significados em sala de aula, Colinvaux (2008, p. 9) aponta que

os alunos deixaram de ser vistos como mentes racionais, solitárias e desencarnadas para se tornarem pessoas inteiras, sujeitos sociais inseridos em múltiplas situações e atividades. Aprender, na escola, é um processo multifacetado, ao mesmo tempo cognitivo, social, emocional, linguístico, e multideterminado por fatores de ordem social, institucional e curricular, pelas ações docentes e discentes.

Em Educação Matemática, a aprendizagem que carece de aplicações e construção de significados é chamada de aprendizagem mecânica. Nesse caso, o aluno é estimulado a utilizar os resultados matemáticos para fins de cálculos, e espera-se que ele “encontre o valor de x ”, “arme e efetue cálculos” sem se preocupar com o significado que esses resultados podem vir a representar.

Uma aprendizagem significativa em matemática pode ser descrita quando o aluno utiliza esses algoritmos matemáticos para a solução de alguns problemas que tragam significados práticos à sua vivência. Nesse sentido, convém, sempre que possível, associar a resolução de problemas no âmbito da matemática ao modo como esses cálculos podem auxiliar na prática do dia a dia dos alunos.

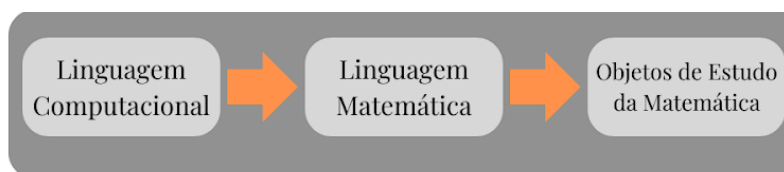
Além disso, o ensino de matemática, muitas vezes, está associado apenas com a utilização de determinados resultados, sem antes investigar ou demonstrar os processos que os precedem. Dessa forma, uma maneira de utilizar os Ambientes Virtuais de Aprendizagem é em uma abordagem investigativa dos objetos matemáticos. A formação escolar, muitas vezes, está

mais preocupada com que o aluno saiba utilizar o teorema de Pitágoras de forma mecanizada, não há investigação de meios de comprovação desses resultados.

Sendo assim, as tecnologias digitais possibilitam que o professor, como mediador, conduza os alunos por meio de métodos e trilhas de aprendizagem que possibilitem a eles alcançar e comprovar alguns resultados matemáticos.

Nesse sentido, o professor, na condição de mediador, deve se atentar para o que chamamos de barreiras de abstração. Inspirados por Vigotski, referimo-nos às limitações que a linguagem pode impor na assimilação de um conceito, impossibilitando assim sua generalização e universalização, como usualmente pretendido no ensino tradicional de matemática. A Figura 1 mostra o esquema de linguagens.

Figura 1: Esquema de linguagens



Fonte: elaborada pelos autores a partir de Vygotsky (2001)

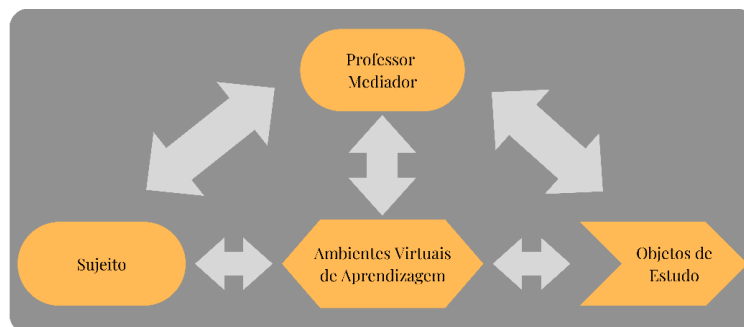
No ensino de matemática, podemos observar a necessidade de dois graus de abstração, que existem devido à necessidade de duas linguagens para acessar determinado conceito. Primeiro, temos a linguagem do meio virtual, ou seja, o sujeito que está construindo seu conhecimento em um ambiente virtual precisa manusear a linguagem presente naquele meio. Quando falamos em linguagem do meio virtual, referimo-nos a uma ambientação nesses espaços de aprendizagem, tal como o manuseio de ferramentas, o acesso a esses recursos e a familiaridade com esses lugares de aprendizagem. Portanto, existe a necessidade dessa prática. Para muitos, isso não é um fator impeditivo, visto que as tecnologias digitais, de maneira geral, são indissociáveis da nossa vida em sociedade.

A segunda linguagem de que o sujeito deve se apropriar é a linguagem matemática. Nesse caso, o aluno, como sujeito interessado na construção e generalização de conceitos matemáticos, precisa se apropriar das simbologias e da linguagem matemática. Esse segundo grau de abstração pode ser alcançado com as contribuições do professor, que é um dos responsáveis pela construção dos saberes matemáticos pertinentes à educação básica. Porém, não

descartamos a apropriação dessa linguagem por meio da experimentação, de forma empírica. O recurso digital pode ser explorado e manuseado pelo sujeito de forma a contribuir para a construção dessa linguagem. Assim, destacada a importância dessas duas linguagens para a construção do conhecimento matemático em Ambientes Virtuais de Aprendizagem, podemos falar dos processos de ensino e de aprendizagem propriamente ditos.

Por fim, e mais importante, devemos observar o foco central desta pesquisa: o modo como se dão os processos teóricos e metodológicos no ensino de matemática por meio de tecnologias digitais. A partir das reflexões proporcionadas ao longo do texto, podemos verificar alguns pilares dessa prática. Utilizando recursos digitais, constatamos que o professor, como mediador, deve incorporar algumas características em sua prática. A Figura 2 mostra um esquema pedagógico com uso de tecnologias digitais.

Figura 2: Esquema pedagógico com tecnologias digitais



Fonte: elaborado pelos autores com base em Chevallard (1991 *apud* Colinvaux, 2008)

No esquema representado na Figura 2, inspirado no modelo proposto por Chevallard (1991 *apud* Colinvaux, 2008), o professor tem papel importante na construção do conhecimento do sujeito que está aprendendo. Sua importância central é a de mediar e transitar entre os alunos – enquanto estes trocam entre si, os recursos digitais e os objetos que estão sendo estudados. Sendo assim, o professor precisa dar liberdade para que os alunos explorem e vivenciem suas experiências por meio das tecnologias digitais, fazendo contribuições significativas quando for pertinente.

Sob a luz das reflexões propostas anteriormente, foi possível relacionar com as práticas pedagógicas em Ambientes Virtuais de Aprendizagem algumas contribuições dos autores explorados no estudo.

Inicialmente, foi constatado o modo como se deu o primeiro contato entre tecnologias e sala de aula, majoritariamente por meio de computadores para o estudo da informática. A partir dessas contribuições, concluímos que os computadores não substituem a presença do professor na prática do ensino.

No decorrer da pesquisa, notamos a necessidade de entender os processos teóricos e metodológicos que permeiam os processos de ensino-aprendizagem apoiados por tecnologias digitais; e a maneira de proporcionar, na condição de professores, uma prática que evidencie a colaboração entre os sujeitos. Importa também compreender de que forma esses objetos de estudo podem ser explorados para que se construam conceitos e generalizações que trazem significados para o aluno como indivíduo que está inserido em uma sociedade e cultura, ou seja, que possui uma identidade.

Além disso, o professor também deve encorajar a interação entre os alunos nas explorações feitas, gerando assim um ambiente de aprendizagem colaborativa. Dessa maneira, o professor pode introduzir a discussão por meio de uma abordagem sobre um assunto que traga significado para os alunos.

Desenvolvemos, então – inicialmente a partir de interações entre os graduandos por meio das tarefas propostas –, o ambiente presencial que proporcionou mais trocas e reflexões entre eles, o mediador e o recurso tecnológico. A partir dessas interações, foram identificados e analisados eventos críticos (Powell *et al.*, 2004) que surgiram ao longo dos três encontros que se sucederam. Com base nesses eventos, a pesquisa, de cunho qualitativo e analítico, examina o modo como as interações, em meio a essas tecnologias digitais, contribuíram de fato para o aprendizado dos educandos.

A proposta curricular guiada pela *Base Nacional Comum Curricular* – BNCC – (Brasil, 2018) é enfática no que diz respeito ao uso de tecnologias digitais no ensino de matemática da educação básica. Dessa forma, vale refletir sobre a forma que esse documento norteador propõe para o uso desse artefato.

A BNCC enfatiza a utilização das tecnologias digitais para o desenvolvimento do pensamento computacional dos estudantes, o que pode acabar por limitar a visão sobre a importância de outras habilidades no ensino de matemática. Ainda que seja essencial que os estudantes saibam utilizar as tecnologias digitais, é igualmente importante que eles desenvolvam outras habilidades, como o pensamento crítico e a criatividade (Figueiredo; Pedrosa, 2023). Assim, devemos, como formadores do pensamento matemático, utilizar as tecnologias para expandir percepções e aprofundar discussões matemáticas e profissionais.

Com o avanço e a intensificação do uso das tecnologias digitais, professores necessitam de capacitação, a partir da formação continuada, para que possam trazer tais recursos para o ambiente escolar. Fazendo o melhor uso possível dos *softwares*, das plataformas e dos aplicativos desenvolvidos, o professor possibilita questionamento, interação, propostas de soluções pelos alunos e formulação de novos problemas (Novaes, 2021). Além disso, a incorporação de tecnologias digitais no ensino de matemática não pode ser domesticada e limitante, ou seja, não pode utilizar recursos digitais de forma a reproduzir *slides* com listas de tabuadas para o aluno decorar. Tais recursos devem explorar e criar possibilidades de atividades, a fim de promover uma aprendizagem mais sólida (Borba; Chiari, 2015). Ainda, ao sugerirem inovações na prática em Educação Matemática com uso de tecnologias digitais, os autores sublinham que

as tecnologias digitais, a depender da forma como são utilizadas, podem ser um recurso para minimizar os problemas enfrentados nessa disciplina, dado o amplo leque de possibilidades que se abrem a partir de sua utilização, em especial as ligadas à dinamicidade, ao feedback e à visualização (Borba; Chiari, 2015, p. 1128).

O uso de tecnologias digitais em Educação Matemática gira em torno das discussões em relação ao que propõe o currículo e às possibilidades que podem ser exploradas. A partir disso, entendemos que o uso de tecnologias digitais sempre trará consigo não só expansão de possibilidades, mas também limitações.

Nossa investigação se propõe a explorar aspectos como interação, visualização e manipulação, mediante o uso da plataforma Desmos Sala de Aula pelos educandos. Assim como o GeoGebra, a calculadora gráfica do Desmos permite: plotar funções e tabela de dados; resolver equações e inequações, apresentando graficamente a resposta; explorar transformações

matemáticas; fazer regressões e medidas estatísticas. Mas, além disso, o Desmos também tem outros dois recursos muito úteis para o ensino. Um é o ambiente “Atividades de Sala de Aula” (Desmos Sala de Aula), em que é possível criar turmas e para elas endereçar atividades já disponíveis dentro do Desmos; ou criar suas próprias atividades (Cândido, 2023).

Para além de uma calculadora gráfica, podemos destacar o Desmos Sala de Aula pelas suas vastas ferramentas de criação de atividades. Para customizar atividades, o Desmos disponibiliza fazê-las também com um nível superior ao de somente usar as existentes. Isso é feito por sua Camada de Computação (Computation Layer – CL), que tem um conjunto de comandos que ligam blocos ou componentes funcionais. Ela tem o caráter de ser um subprograma com ações específicas nas construções das páginas de atividades, servindo de ligação para a linguagem de programação na qual o Desmos é construído (Cândido, 2023). A Figura 3 mostra os recursos de criação do Desmos Sala de Aula.

Figura 3: Recursos de criação do Desmos Sala de Aula



Fonte: Desmos

2 Procedimentos metodológicos

Esta pesquisa se apresenta como uma pesquisa-formação, que aborda as complexas relações que vão se formando entre a formação inicial e a continuada, entre as experiências vivenciadas na formação e no exercício da profissão, sobretudo, nos conhecimentos que podem emergir nessa troca entre docentes e discentes (Santos, 2019). A pesquisa-formação envolve todos os sujeitos – pesquisadores e participantes – como aprendentes no fazer, no vivenciar e no refletir pedagógico da inovação em questão.

Além disso, a investigação visa contribuir para a compreensão do sujeito sobre o objeto que lhe é exposto – no caso, os objetos a serem compreendidos pelos participantes da pesquisa

são os conceitos de trigonometria, no que se refere aos conceitos de ciclo trigonométrico e funções seno e cosseno. Assim, o interesse de pesquisa nesse contexto – além de lançar um olhar sobre quais interações e recursos podem surgir – é analisar e relatar o modo como o desenho didático com o Desmos pode auxiliar no entendimento de conceitos trigonométricos.

A partir de estudo bibliográfico descrito no Artigo 1 desta dissertação, a plataforma virtual escolhida como recurso tecnológico foi o Desmos, mais especificamente, a área do Desmos Sala de Aula. Os encontros ocorreram presencialmente em uma turma da disciplina de Ensino de Matemática 2 no primeiro semestre de 2024. O Quadro 1 apresenta o planejamento inicial dos encontros.

Quadro 1: Planejamento dos encontros

Encontro	objetivo	Estratégias	Dinâmica interativa	Recursos
1º (40min)	Ambientar os estudantes na plataforma Desmos e mapear o seu percurso acadêmico.	- Ambientação na plataforma Desmos (10min) - Acessar a turma virtual (5min). -Responder perguntas pessoas sobre perfil do aluno e sobre o tema de pesquisa. (15min) -Responder 3 questões do ENEM sobre o tema de pesquisa. (10min)	Virtual e Assíncrona	Computador ou Smartphone, Acesso à internet, Plataforma Desmos.
2º (2h)	Compreender os conceitos de ciclo trigonométrico, realizar manipulações interativas e fazer discussões.	- Comentar sobre as atividades do encontro anterior (30min) - Explorar construções interativas através do Desmos sala de aula, respondendo perguntas e desafios quando necessário. (1h20min) - Ao fim, responder 2 questões do ENEM (10min)	Presencial e Síncrona	Tablets, Acesso à internet. Plataforma Desmos

3º (3h)	Realizar tarefas gamificadas de forma colaborativa e resolver tarefas sobre os conteúdos explorados nos encontros anteriores.	- Comentar sobre as atividades do encontro anterior (30min) - Explorar as Atividades propostas e solucionar os desafios. (1h30) - Discutir sobre todos os encontros e sobre quais aspectos auxiliaram no entendimento do conteúdo e quais dificultaram. (1h)	Presença 1 e Síncrono.	Plataforma Desmos, Tablets, Acesso à Internet.
------------	---	--	------------------------	--

Fonte: Dados da Pesquisa.

As atividades propostas foram adaptações de Cândido (2023). O autor apresenta uma proposta sobre funções trigonométricas, utilizando o Desmos Sala de Aula em uma metodologia de sala de aula invertida. As adaptações foram necessárias devido ao contexto metodológico no qual se encontra a proposta desse autor – por serem atividades essencialmente assíncronas, ele necessitou que tivessem características que instruísem os alunos, sem a necessidade de mediação.

Ao trazermos a tarefa para o modelo presencial, conservamos as características mais interativas e manipulativas das atividades, acrescentando outras características interativas disponíveis na própria plataforma Desmos. Por fim, outro recurso mantido da pesquisa de Cândido foi o de utilizar questões do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) sobre o assunto – porém, as questões foram diluídas ao longo dos encontros. Tal recurso se torna interessante, visto que na prática dos futuros docentes esses exercícios serão comuns.

Na tarefa proposta por Cândido, o autor tem por objetivo o aprendizado dos estudantes no contexto de sala de aula invertida, onde os alunos irão ter em mãos vídeos produzidos pelo autor da pesquisa como recurso inicial. Em seguida, por meio do Desmos Sala de Aula, o autor apresenta atividades interativas sobre o ciclo trigonométrico, a redução dos arcos para o primeiro quadrante e as funções seno e cosseno. Por fim, traz em sua atividade exercícios do Enem como

critério avaliativo. As atividades de Cândido foram reorganizadas, sem alterar sua estrutura, por se tratar, aqui, de uma implementação em um contexto presencial de ensino.

Para a análise e discussão dos resultados, a partir da pesquisa foram coletados dados de diferentes fontes. O meio principal de coleta foi a gravação de mídia audiovisual. Essa forma de coleta foi escolhida, pois, segundo Powell; Francisco; Maher (2004, p. 109), “à medida que os pesquisadores transcrevem códigos, eles continuamente revisam episódios correspondentes no registro de vídeo para perceber nuances sutis no discurso e nos comportamentos não-verbais, assim como nas influências visíveis sobre padrões de comportamento”.

A partir dos vídeos, nossa pesquisa propõe-se a analisar o modo como as tecnologias digitais auxiliam na compreensão dos participantes e registrar em mais detalhes questionamentos e inquietações dos licenciandos. Para isso, adotamos a estratégia de eventos críticos, pois

eventos críticos são contextuais. Um evento é crítico em relação a uma questão particular perseguida pela pesquisa. Assim, uma instância na qual os aprendizes apresentam uma explicação matemática ou argumento, pode ser significativa para uma questão de pesquisa preocupada com a construção de justificação matemática ou demonstração pelos estudantes e, como tal, pode ser identificada com um evento crítico (Powell; Francisco; Maher, 2004, p. 103)

3 Resultados

A pesquisa desenvolve-se a partir desses eventos críticos que surgem ao longo dos encontros, para, com base neles, delinear a trajetória dos estudantes envolvidos por meio de suas anotações, seus depoimentos, suas interações com a plataforma Desmos e suas interações verbais ao longo dos encontros – sejam elas com o pesquisador, sejam com os outros estudantes. De acordo com Powell; Francisco; Maher (2004, p. 104), “os pesquisadores podem encontrar eventos críticos fora do vídeo, em materiais como as anotações dos estudantes ou nas proposições escritas em um diário do estudante”.

No **primeiro momento crítico**, temos uma discussão sobre o seguinte exercício:

Karlie Noon: *Encontrei aqui que seria 810° , aí seriam duas voltas mais 90° , tá em cima do eixo.*

Mediador: *Gladys West, você estava fazendo essa questão certo?*

Gladys West: *Fiz. Deu 90° . Botei o primeiro quadrante.*

Mediador: *Por que você colocou o primeiro quadrante?*

Gladys West: *Então, eu considere que fosse do 0° até 90° o primeiro quadrante.*

Karlie Noon: *Maior que 90° já é o segundo quadrante*

Gladys West: *Isso. Mas não sei se é verídico ou não.*

A partir desse diálogo, podemos observar uma reflexão sobre o quadrante em que está situado o arco $\pi/2$, ou 90° . O aluno Gladys West segue uma linha de raciocínio em que a divisão entre os quadrantes é contínua – sendo assim, seja um ângulo θ pertencente ao intervalo $[0,2)$, afirma que se $0 < \theta \leq \pi/2$, então está localizado no primeiro quadrante.

Se θ pertence a $\pi/2 < \theta \leq \pi$, então o ângulo está no segundo quadrante – e assim por diante. Porém, os quadrantes são entendidos como as regiões delimitadas entre os eixos, ou seja, os ângulos $k/2$, com k pertencente aos inteiros não negativos, não pertencem a nenhum quadrante.

No **segundo momento crítico**, temos a seguinte interação a partir da tarefa a seguir:

Karlie Noon: *Aqui, usando todo esse material, eu não encontrei algo que me auxiliasse nesse $\cos(35/6)$*

MC Escher: *Eu pensei assim, em 35 ciclos de $\pi/6$ que é 30°*

Mediador: *Mas aí não necessariamente esse ângulo será congruente a 30° . Se você andar $\pi/6$ trinta e cinco vezes não necessariamente ele vai voltar para 30° no ciclo. É uma estratégia.*

Nessa captura de diálogo, podemos observar que a atividade proposta não deu suporte para que o aluno construísse arcos maiores do que 2π e entendesse sua representação para calcular o valor do cosseno de tais ângulos. Em seguida, outro aluno contribuiu para a discussão, propondo que o ângulo representava 35 vezes o ângulo $\pi/6$, que equivale a 30 graus. Porém, o aluno acaba concluindo que 35 vezes 30 graus seria o mesmo que calcular o ângulo de 30 graus. Nesse caso, o pesquisador e mediador dessa atividade coloca em discussão que não necessariamente 35 vezes 30 graus seja congruente a 30 graus. Basta observar que o ângulo de 30 graus pode ser representado por $30 + 360 \cdot k$, onde k é um número inteiro.

Dessa forma, podemos afirmar que o raciocínio do aluno foi correto, porém com a conclusão equivocada. Assim, o aluno foi convidado a pensar que, para o ângulo $35\pi/6$ interpretado como 35 vezes, o ângulo $\pi/6$ significa que $\pi/6$ cabe 12 vezes no ciclo trigonométrico. Dessa forma, podemos afirmar que $36\pi/6$ equivale a 6, ou seja, 3 vezes 2 (volta

completa) – assim, para analisar o ângulo $35\pi/6$, podemos reescrevê-lo como $36\pi/6 - \pi/6$. Como $36\pi/6$ é congruente a 0 radianos, então o ângulo $35\pi/6$ é congruente a $-\pi/6$ radianos, que equivale a 330° .

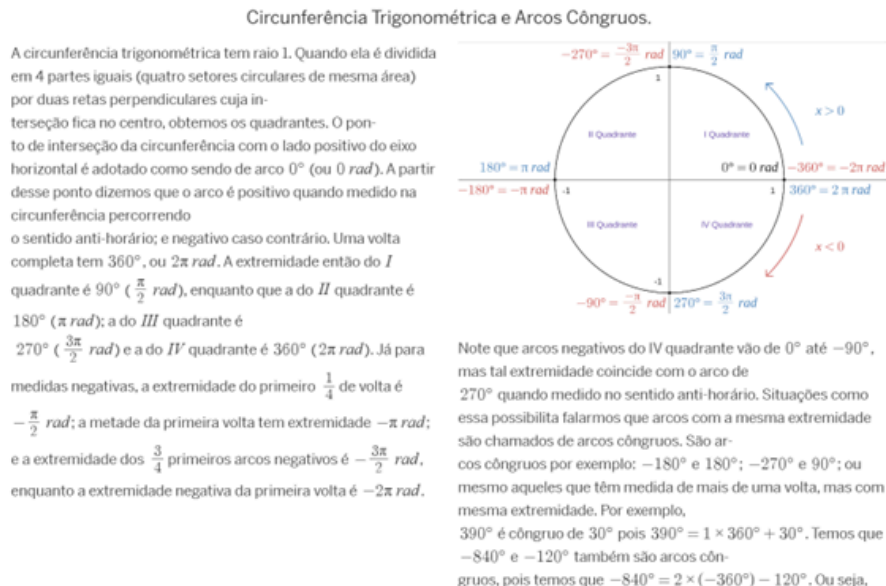
A partir desses eventos críticos descritos, a investigação das interações e das respostas consistirá em analisar a trajetória dos autores dos eventos críticos ao longo de suas respostas e depoimentos.

O **primeiro encontro** concentrou-se em uma sequência de atividades interativas com construções interativas, juntamente de explicações teóricas dos conteúdos de ciclo trigonométrico e funções trigonométricas (seno e cosseno). Para a realização da atividade, os estudantes utilizaram unicamente *tablets*, já que a própria plataforma Desmos já disponibiliza espaço apropriado para registrarem suas respostas.

A escolha por *tablets* se deu por conta da visualização mais clara das construções nesse tipo de dispositivo – essa questão tinha sido empecilho na primeira implementação, quando os estudantes utilizaram seus próprios *smartphones*. Após interagirem com essas construções, os alunos deveriam resolver tarefas – e podiam utilizar as próprias construções como material de apoio.

Para situar o leitor, a primeira página da tarefa consistia em uma explicação sobre o ciclo trigonométrico, como mostrado na Figura 4.

Figura 4: Circunferência Trigonométrica



Fonte: Cândido (2023)

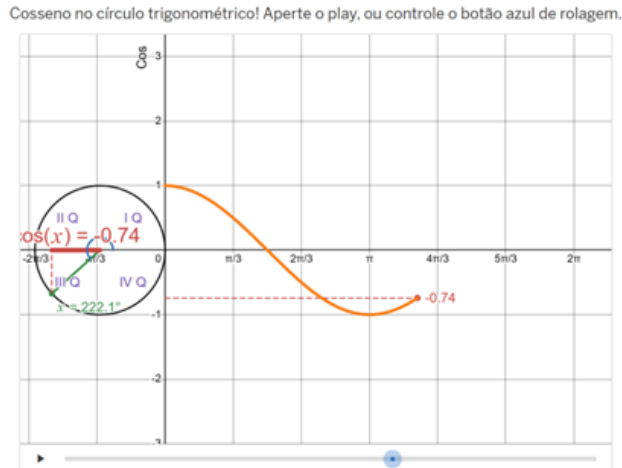
As atividades mais explicativas vieram da necessidade – sinalizada pelos alunos participantes da pesquisa – de retomar os conteúdos formais relacionados aos estudos.

Na segunda metade da implementação em questão, o assunto abordado é o de funções trigonométricas, seguindo o mesmo modelo de construção. Nesse momento, os alunos foram colocados para interagir com construções sobre funções trigonométricas; investigar seus aspectos periódicos, seu domínio, contradomínio e imagem; e efetuar quando necessário o cálculo de suas imagens ou seus pontos máximos e mínimos.

Além disso, como grande valia para os estudantes, existem construções referentes aos parâmetros das funções trigonométricas – e, manipulando essas construções, os estudantes podem verificar o modo como cada parâmetro é responsável por alterar a função em si.

Inicialmente, os alunos são convidados a dar *play* no objeto de interação ou arrastá-lo para observar o modo como os valores do cosseno, calculados no ciclo trigonométrico, se projetam no eixo plano cartesiano, formando assim a função $f(x) = \cos(x)$ de forma contínua. A Figura 5 mostra o cosseno no círculo.

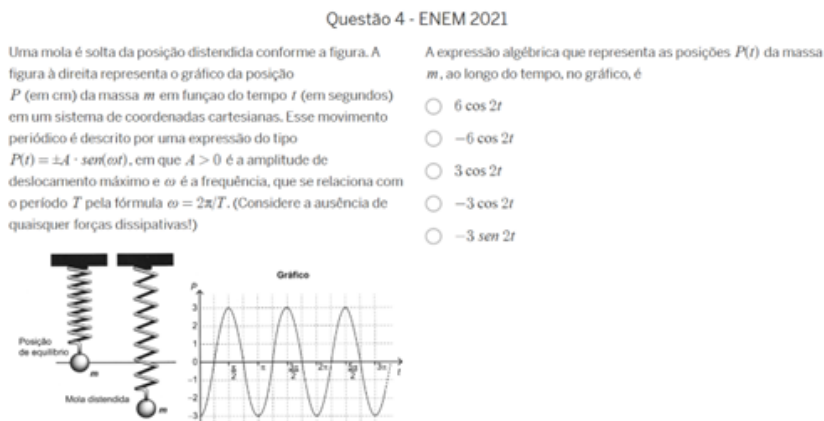
Figura 5: O cosseno no círculo



Fonte: Cândido (2023)

Em relação às questões do Enem utilizadas para fins de verificação da aprendizagem ao longo dos encontros, todos os estudantes acertaram a primeira. Já no que concerne à segunda questão, dos sete estudantes que responderam a ela, três acertaram a resposta, e outros dois erraram a resposta em razão da forma errada de empregar um sinal. A Figura 6, a seguir, reproduz uma das questões do Enem que utilizamos.

Figura 6: Exemplo de questão do Enem

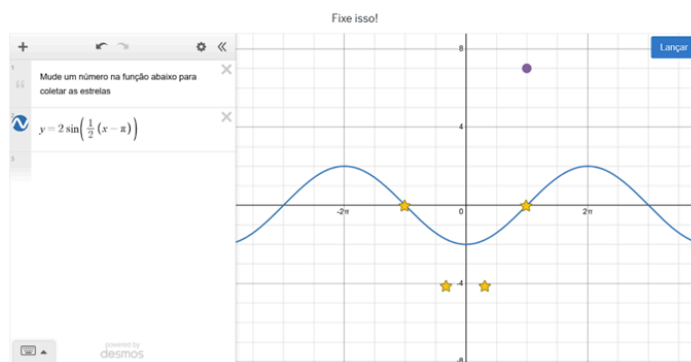


Fonte: Cândido (2023)

No segundo encontro, foram propostas atividades gamificadas e atividades sobre a alteração dos parâmetros, caracterizando assim a implementação como mais prática do que a anterior. Inicialmente, os alunos deveriam resolver desafios gamificados retirados da própria plataforma para a implementação.

A atividade consistia em alterar os parâmetros de uma função trigonométrica a fim de lançar bolas do alto para coletar estrelas. A Figura 7 mostra um dos desafios propostos.

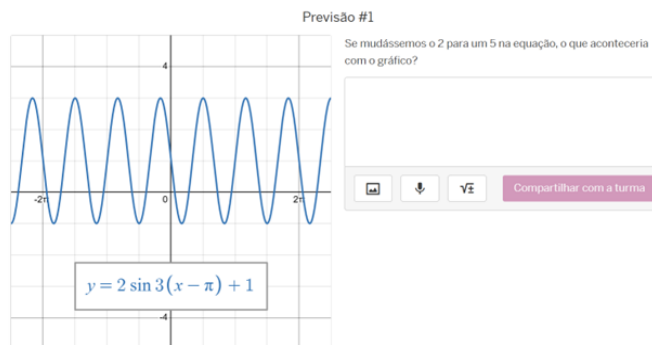
Figura 7: Gamificação com funções trigonométricas



Fonte: Desmos

Os alunos mostraram-se bastante interessados na resolução desses desafios. Durante a discussão final da terceira implementação, um aluno sugeriu uma alteração na sequência de atividades, de modo que os desafios fossem para o início dos encontros, pois, segundo ele, são desafios que despertam o interesse dos estudantes. Ainda segundo esse mesmo estudante, os alunos – mesmo que não compreendam ainda as funções trigonométricas seno e cosseno e a alteração de seus parâmetros – veem-se desafiados e engajados a participar da atividade devido a seus aspectos gamificados. A Figura 8 mostra outro desafio apresentado aos alunos – em seguida, inserimos um trecho do diálogo referente a esse desafio.

Figura 8: Previsão 1



Fonte: Desmos

Gladys West: *Aumentaria o valor máximo e mínimo atingido pela função (de -1 a 3 para -4 a 6)*

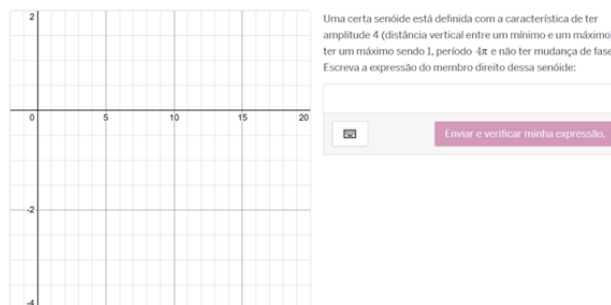
Karlie Noon: *Vai aumentar a amplitude vertical da curva, os pontos de máximos e mínimos ficam mais distantes entre si.*

MC Escher: *Aumentaria a amplitude entre o máximo e mínimo.*

Ao observarmos as respostas desses alunos, podemos ver que o conceito da alteração desse parâmetro foi assimilado por eles. Alguns responderam de forma mais completa, porém todos entenderam quais seriam as implicações da alteração do parâmetro na função em questão.

Na tarefa reproduzida na Figura 9, os alunos deveriam encontrar a expressão que representa a senoide de acordo com as características enunciadas – a fala da aluna Gladys West está colocada a seguir. A Figura 10, em seguida, mostra a resolução dessa aluna para a tarefa apresentada na Figura 9.

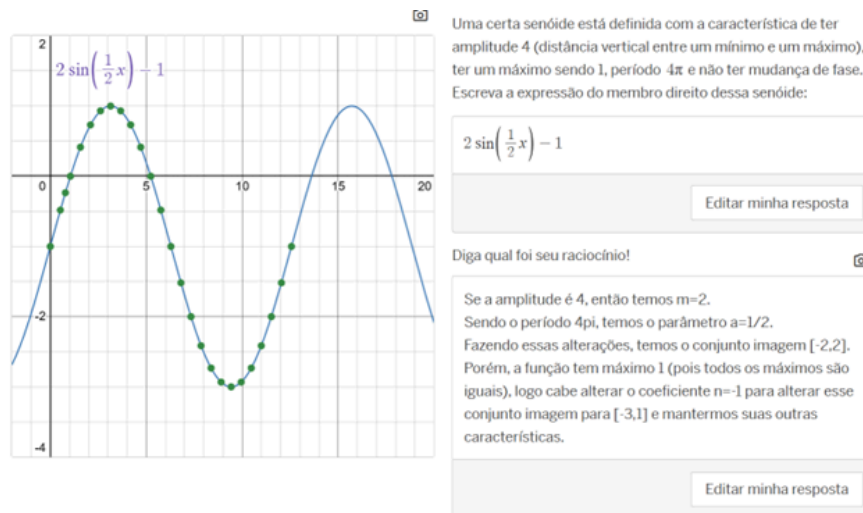
Figura 9: Encontre a senoide



Fonte: Desmos

Gladys West: *Se a amplitude é 4, então temos $m=2$. Sendo o período 4π , temos o parâmetro $a=1/2$. Fazendo essas alterações, temos o conjunto imagem $[-2,2]$. Porém, a função tem máximo 1 (pois todos os máximos são iguais), logo cabe alterar o coeficiente $n=-1$ para alterar esse conjunto imagem para $[-3,1]$ e mantermos suas outras características.*

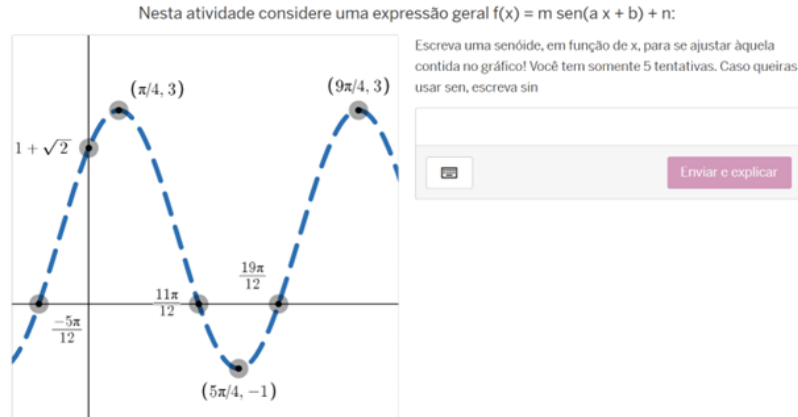
Figura 10: Resolução de Gladys West



Fonte: Desmos

A próxima tarefa, mostrada na Figura 11, consiste em verificar se os educandos, utilizando os parâmetros e suas implicações no gráfico da função, poderiam criar uma senoide que passasse pelos pontos pré-fixados. Em seguida, apresentamos um fragmento do raciocínio e suas conclusões.

Figura 11: Encontre a senoide



Fonte: Desmos

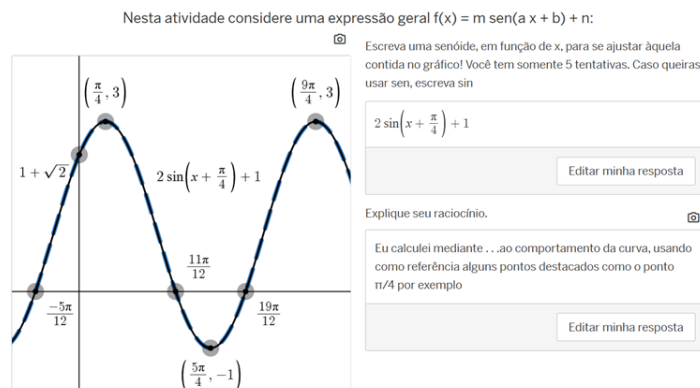
Gladys West: Não houve alteração no período da função, logo $a=1$. Temos que a função atinge seu máximo em $\pi/4$, sendo a função seno com máximo em $\pi/2$. Como $\pi/4 + \pi/4 = \pi/2$, tomamos $b=\pi/4$. Por último, temos que a amplitude é 4, logo temos $m=2$.

Karlie Noon: Eu calculei mediante ao comportamento da curva, usando como referência alguns pontos destacados como o ponto $\pi/4$ por exemplo.

MC Escher: Eu calculei mediante aos valores dados nos máximos e mínimos e onde eles batiam o eixo X no par ordenado.

A conclusão dos três estudantes foi similar, embora tenham utilizado estratégias diferentes. A Figura 12 mostra um exemplo da resolução dos alunos.

Figura 12: Exemplo da resolução dos estudantes



Fonte: dados da pesquisa

4 Considerações finais

É importante que o profissional de educação analise o modo como o uso de tecnologias digitais no ensino de matemática impacta sua vida pessoal e profissional. A partir do protocolo de análise ilustrado e dos depoimentos dos graduandos, foi possível observar a maneira como a visualização, a manipulação, a reflexão e o dinamismo favorecidos pela plataforma auxiliam no aprendizado.

Com a abordagem de eventos críticos, pudemos realizar uma análise em primeira instância no que diz respeito ao ensino e à aprendizagem no ambiente Desmos Sala de Aula. Consideramos discussões que foram evidenciadas pelas interações com a plataforma ou pelos debates entre os educandos.

O uso da plataforma Desmos é relativamente novo. Contudo, além de ressaltar as possibilidades da plataforma Desmos como recurso didático para o ensino de matemática, algumas características devem ser destacadas: a plataforma Desmos e seu ambiente Desmos Sala de Aula oferecem recursos inovadores e agregadores para a aprendizagem dos educandos; e a presença de interatividade, visualização e manipulação é de extrema importância para a compreensão e construção de significados referentes ao ensino de trigonometria. Além disso, as possibilidades são extensas, levando em consideração a viabilidade de incorporar parte ou o todo de tarefas que já constam na plataforma e poder criar materiais próprios de maneira gratuita e prática.

A análise, ainda em fase de refinamento, tem evidenciado contribuições e limitações do uso do Desmos no ensino de trigonometria. A contribuição advém de suas características de visualização e manipulação. Como limitações, podemos observar a necessidade do acesso à internet e da utilização de dispositivos como *tablets* ou computadores, uma vez que as atividades se mostraram incompatíveis com o uso em *smartphones*. Como sugestões para futuras análises, recomendamos fazer uma sistematização dos depoimentos dos estudantes para que as falas e os movimentos ganhem maior aprofundamento.

Referências

BAIRRAL, Marcelo Almeida. **Discurso, interação e aprendizagem**: matemática em ambientes virtuais a distância. Seropédica: Edur, 2018. 122 p.

BORBA, Marcelo de Carvalho; CHIARI, Aparecida Santana de Souza. Diferentes usos de tecnologias digitais nas licenciaturas em matemática da UAB. **Nuances: Estudos sobre Educação**, [S. l.], v. 25, n. 2, p. 127-147, 28 nov. 2014. DOI: <http://dx.doi.org/10.14572/nuances.v25i2.2829>

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br> Acesso em: 20 abr. 2025.

CÂNDIDO, José Valério Moreira. **Sala invertida de funções trigonométricas usando a camada de computação do Desmos**. 2023. 38 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Pará, Castanhal, 2023.

COLINVAUX, Dominique. Aprendizagem: as questões de sempre, a pesquisa e a docência. **Ciência em Tela**, Rio de Janeiro, v. 1, n. 1, p. 1-11, jan. 2008. Disponível em: <http://www.cienciaemtela.nutes.ufrj.br/index.html> Acesso em: 13 abr. 2025.

FIGUEIREDO, Ronaldo Lage; PEDROSA, Stella Maria Peixoto de Azevedo. Concepções das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação presentes na BNCC da área de matemática e suas tecnologias. **Em Teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, [S. l.], v. 14, n. 1, p. 262, 5 abr. 2023. DOI: <http://dx.doi.org/10.51359/2177-9309.2023.256901>

NOVAES, Carolina de Paula Ribeiro. **Funções trigonométricas no ENEM com auxílio do GeoGebra**. 2021. 102 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Estadual do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

POWELL, Arthur B.; FRANCISCO, John M.; MAHER, Carolyn A. **Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento das idéias matemáticas e do raciocínio de estudantes**. *Bolema*, Rio Claro, v. 17, n. 21, p. 81-140, 2004.

SANTOS, Edméa. Pesquisa-formação na cibercultura: fundamentos e dispositivos. In: SANTOS, Edméa. **Pesquisa-formação na cibercultura**. Seropédica: Edufpi, 2019. p. 79-130.

VALENTE, José Armando. Informática na Educação no Brasil: análise e contextualização histórica. **Núcleo de Informática Aplicada à Educação/Unicamp**, [S. l.], p. 1-13, 1999.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. Desenvolvimento dos conceitos científicos na infância. In: VYGOTSKY, Lev Semenovich. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2001. p. 71-100.

3. Trigonometria no Desmos em aula *online* e/ou presencial: uma proposta de ambiência

Resumo

O presente artigo surge a partir de uma pesquisa realizada no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Inicialmente é feita uma discussão sobre o uso de tecnologias digitais aliado ao ensino de matemática. Em seguida, o texto dedica-se a ambientar o leitor no espaço virtual conhecido como Desmos Sala de Aula, que faz parte da plataforma Desmos e permite a criação de atividades para sala de aula. Ao destacar algumas funcionalidades do Desmos Sala de Aula, espera-se contribuir para a formação continuada de professores de matemática bem como para a expansão de recursos tecnológicos que podem ser fortes ferramentas para a área de Ensino de Matemática. Finaliza-se apresentando a proposta de atividades no Desmos Sala de Aula, que foi aplicada em uma turma de Ensino de Matemática II do curso de Licenciatura em Matemática da UFRRJ.

Palavras-chave: tecnologias digitais; ensino de matemática; Desmos Sala de Aula; formação continuada.

INTRODUÇÃO

Como já é notório, os recursos digitais são cada vez mais utilizados no ensino de matemática. Em uma sociedade que está cada vez mais munida das mais diversas tecnologias de informação e comunicação, no âmbito escolar não seria diferente. Nesse sentido, buscamos encontrar caminhos, contextualizando tais considerações sobre o ensino de matemática com o apoio de tecnologias digitais. Para tal, definimos como objetivos apresentar uma ambiência na plataforma Desmos¹⁰, especificamente na área denominada Desmos Sala de Aula, com o foco na formação de professores de matemática; destacar suas funcionalidades; e propor uma sequência de tarefas para o ensino de trigonometria, a fim de contribuir para o ensino de matemática com o uso de tecnologias digitais.

Para dissertar sobre o ensino e aprendizagem mediante o uso de tecnologias digitais, devemos definir que um ambiente virtual com potencial de aprendizagem necessita proporcionar trocas entre os indivíduos com a finalidade de construir determinado conhecimento. Desde que a

¹⁰ A plataforma Desmos pode ser acessada em: <https://www.desmos.com/?lang=pt-BR>

sua utilização proporciona interação entre determinado grupo, a construção de certo conhecimento por meio de certas atividades é um objetivo comum (Bairral, 2018).

As tecnologias digitais inseridas no contexto de ensino e aprendizagem determinam uma série de mudanças na prática pedagógica, as quais o professor deve desempenhar. Valente (1999, p. 12) afirma:

Deve-se criar condições para que o professor saiba recontextualizar o aprendizado e a experiência vividas durante a sua formação, para a sua realidade de sala de aula compatibilizando as necessidades de seus alunos e os objetivos pedagógicos que se dispõe a atingir.

Nesse contexto, constatamos que essas mudanças devem ser consideradas, já que se relacionam diretamente com a forma como se aprende e o modo como a informação trafega.

Trata-se de uma pesquisa qualitativa e de campo, contextualizada em uma turma de Ensino de Matemática II da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ) e realizada com oito educandos.

NAVEGAÇÃO NA PLATAFORMA DESMOS

Inicialmente convém ao leitor ser orientado sobre algumas funcionalidades da plataforma. Ela consiste em uma plataforma que possui recursos voltados para o ensino de matemática, como a calculadora gráfica, a calculadora científica, a calculadora das quatro operações, a calculadora de matrizes, a ferramenta de geometria e uma calculadora 3D.

Todos os seus recursos são gratuitos em sua totalidade e de livre utilização pelo professor. É possível também fazer o acesso por meio do *smartphone* e do *tablet*, porém é mais recomendável utilizar *tablets* ou computadores de mesa, já que a visualização e algumas funcionalidades – ao usar o *smartphone* – podem ser prejudicadas em algumas atividades, de acordo com a própria plataforma Desmos. A Figura 1, a seguir, mostra a tela inicial da plataforma Desmos.

Figura 1: Tela Inicial



Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

Na tela inicial, o usuário deve descer o cursor e encontrar o ícone “Procurando Desmos Classroom?” – então, deve acessar como professor. A Figura 2 mostra o ícone mencionado.

Figura 2: Desmos Sala de Aula

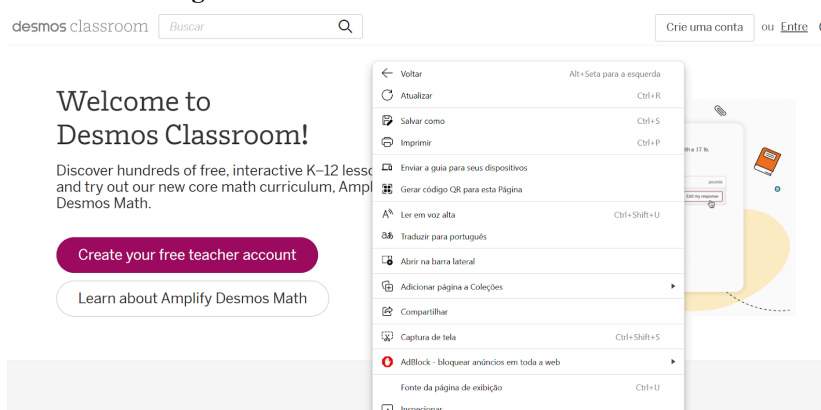


Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

O usuário deve, então, clicar com o botão direito do *mouse* sobre a página, em uma região com a ausência de um *hiperlink*, para então selecionar a opção “Traduzir para o Português”, pois alguns recursos são apresentados em inglês.

Feito isso, o usuário deve clicar em “entrar” e acessar sua conta, utilizando sua conta Google. A Figura 3 mostra a tela inicial do Desmos Sala de Aula.

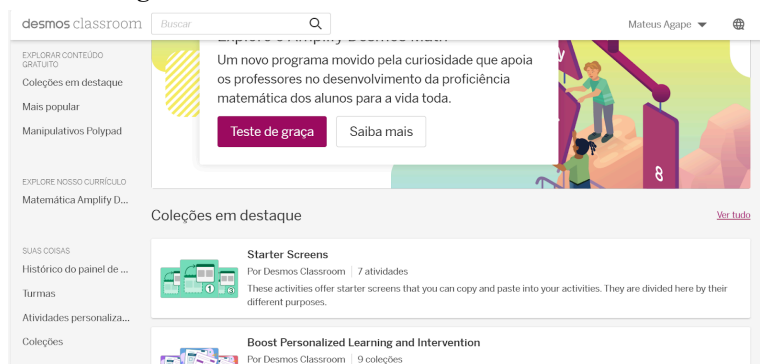
Figura 3: Tela inicial do Desmos Sala de Aula



Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

Após fazer o acesso, o usuário será direcionado a uma tela que permitirá acessar conteúdos da plataforma – prontos e gratuitos –, explorar o currículo Desmos e acessar seus conteúdos criados e suas turmas. Assim, vamos apresentar cada uma dessas opções separadamente. A Figura 4 mostra as funcionalidades do Desmos Sala de Aula.

Figura 4: Funcionalidades do Desmos Sala de Aula



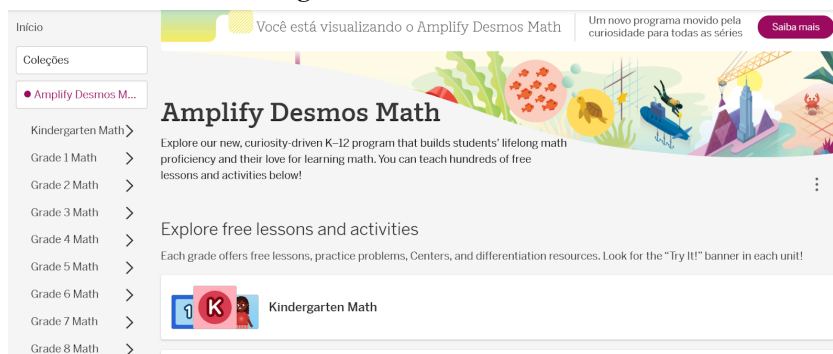
Fonte: elaborada pelo autor a partir do site Desmos

Explorar Conteúdo Gratuito: Nesta seção, o usuário terá acesso às coleções em destaque, ou seja, atividades organizadas por ano de ensino ou por área da matemática, como cálculo, álgebra, funções e Polypads¹¹ manipuláveis.

Em “Mais popular”, terá os conteúdos mais utilizados pelos usuários do Desmos. E em “Manipulativos Polypad” contará com recursos que se assemelham aos materiais concretos, mas de forma digital.

Explore Nosso Currículo: A Figura 5, a seguir, mostra o Currículo Desmos

Figura 5: Currículo Desmos



¹¹ O Polypad pode ser acessado no link: <https://polypad.amplify.com/>

Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

Nesse espaço, o Desmos prepara atividades alinhadas aos conteúdos de seu currículo, propondo sequências didáticas separadas em aulas para trabalhar cada conteúdo de cada série.

Avaliação, Criação e *Feedback*

A Figura 6 apresenta o histórico de painéis de controle.

Figura 6: Histórico dos painéis de controle

Histórico de painéis [Ver painéis arquivados](#)

Filtrar por turma ▼

ATIVIDADE	SESSÕES	ALUNOS	DATA
 Atividade 4	Ensino de Matemática II 2024.1	7 de 9	20 de mar. de 2024 às 16:17 Painel de controle ⋮
 Atividade 3	Ensino de Matemática II 2024.1	8 de 9	13 de mar. de 2024 às 10:09 Painel de controle ⋮
 Atividade 1	Ensino de Matemática II 2024.1 ⏸ Pausado	8 de 9	29 de fev. de 2024 às 12:25 Painel de controle ⋮

Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

No painel de controle, o usuário pode analisar o progresso dos estudantes, suas respostas e suas interações com a plataforma, referentes a atividades pausadas ou não. Nesse contexto, podemos afirmar que esse é o espaço destinado à avaliação e ao *feedback* dos processos cognitivos dos educandos. A Figura 7 mostra o painel de controle do Desmos.

Figura 7: Painel de controle do Desmos

Ensino de Matemática II 2024.1... 0 / 9 alunos [Transferir para a aula](#) Prints 14 [Resumo](#) [Professor](#) [Aluno](#)

Andarim Ritmo Sincronizar comigo Pausar

ORDENAR POR Hora inserido

	1 Coleção...	2 Fixe iss...	3 Reiniciar...	4 Fixe iss...	5 Fixe iss...	6 Fixe iss...	7 Previs...	8
Seki Takakazu	✓	✓	—	✓	✓	✓	●	●
Elbert Frank Cox	✓	✓	—	✓	✓	✓	●	●
Euphemia Lofton Haynes	✓	✓	—	✓	✓	✓	●	●
Srinivasa Ramanujan	✓	✓	—	✓	✓	✓	●	●
John Urschel	✓	✓	—	✓	✓	✓	●	●
Erica Walker	✓	✓	—	✓	✓	✓	●	●
Maryam Mirzakhani	✓	✓	—	✓	✓	✓	●	●

Alunos que ainda não começaram a atividade não são exibidos. Desative o anonimato para ver sua lista completa.

Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

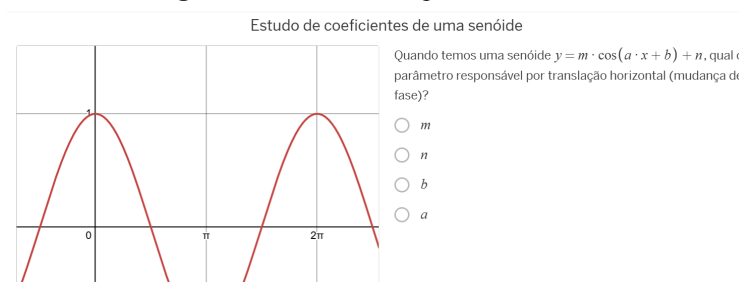
O painel de controle do Desmos é uma ferramenta da plataforma que permite ao professor acompanhar em tempo real o andamento das atividades realizadas pelos educandos.

Na aba Resumo, o professor tem acesso, de forma anônima ou não – basta ativar ou desativar o modo anônimo no canto superior esquerdo –, ao painel geral de todas as atividades, que permite saber quais alunos fizeram as atividades e quais atividades foram feitas. Na horizontal encontram-se as atividades organizadas em *slides*; na vertical, os nomes dos estudantes.

Na aba Aluno, o professor terá acesso às atividades direcionadas aos educandos.

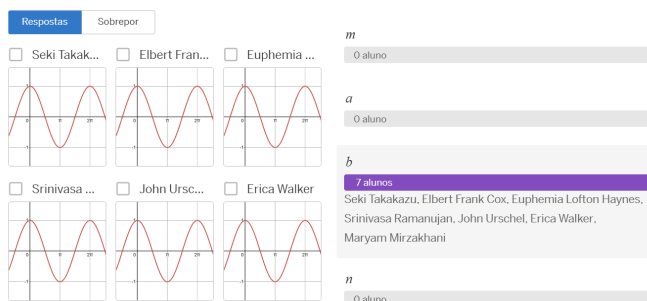
A Figura 8 mostra a aba Aluno do painel de controle. A Figura 9, em seguida, mostra a aba Professor.

Figura 8: Aba Aluno do painel de controle



Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

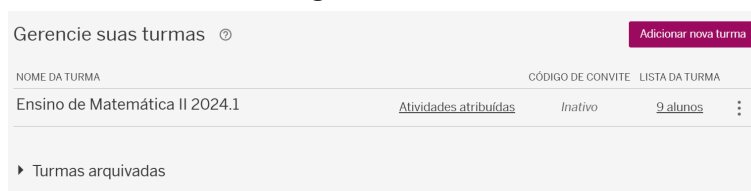
Figura 9: Aba Professor do painel de controle



Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

Na aba Professor, estarão as respostas dos educandos. Nela, o professor terá acesso à interação que cada aluno teve com a atividade, a manipulação que realizou, seu depoimento e a opção que selecionou. A Figura 10 mostra a área onde o professor pode acessar suas turmas cadastradas.

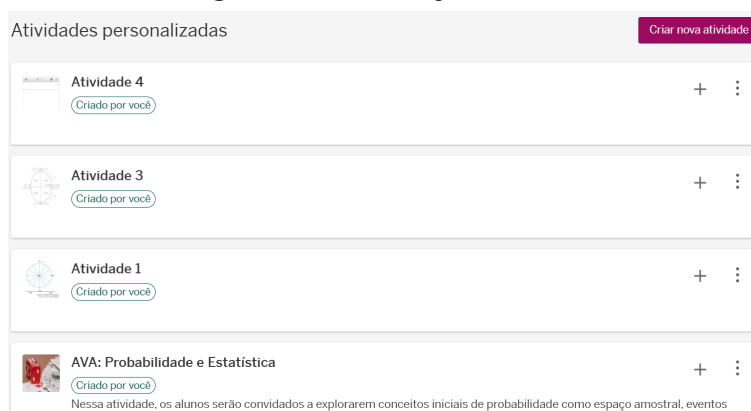
Figura 10: Turmas



Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

Na parte das turmas, o professor terá a possibilidade de adicionar uma turma, ver suas turmas existentes, os alunos que estão cadastrados em cada turma, adicionar novos alunos e verificar as atividades que foram atribuídas. Para adicionar uma nova turma, o professor tem a opção de importar uma turma do Google Classroom – para atribuir atividades conta-se também com essa integração. A Figura 11 mostra atividades personalizadas.

Figura 11: Atividades personalizadas



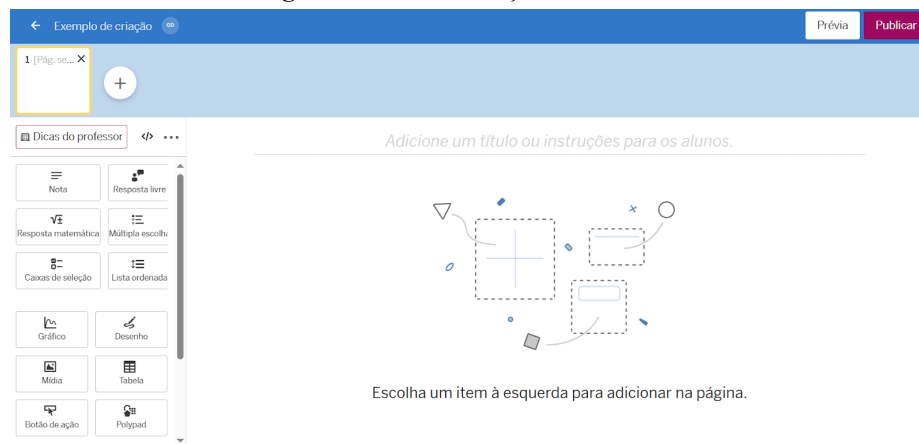
Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

Atividades personalizadas são atividades construídas pelo usuário. Nessa aba, também é possível criar uma nova atividade. Esse recurso é de extrema relevância na plataforma e apresenta-se como um diferencial, juntamente com o painel de controle. A seguir faz-se necessária a exploração da aba de criação de novas atividades.

A aba de criação da plataforma Desmos conta com diversas ferramentas. Na Figura 12, a seguir, serão apresentados alguns de seus recursos. Primeiramente, podemos observar o botão “dicas do professor”. Por meio dele, o professor pode acrescentar dicas e orientações aos professores que utilizarão a atividade. Também é possível adicionar dicas aos estudantes e exemplos de respostas.

As atividades são construídas em um modelo semelhante a *slides* interativos – assim, cabe ao professor fazer a elaboração de cada *slide*, seguindo a ideia da aula que pretende criar.

Figura 12: Aba de criação Desmos Sala de Aula



Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

No canto esquerdo da tela, observamos alguns dos recursos existentes. Nesse contexto, o professor pode criar atividades utilizando esses recursos. Existem infinitas possibilidades de criação, além da possibilidade de copiar e colar algum *slide* das atividades já existentes nas coleções da plataforma Desmos. Portanto, recomendamos que, como em qualquer ambiente pedagógico ou *software* educacional, o professor se permita explorar as opções, encontrando assim a melhor forma de incorporar o recurso digital às suas aulas.

AS TAREFAS

As tarefas aqui propostas foram desenvolvidas no contexto de uma dissertação de mestrado, que possui como produto final uma sequência de tarefas para uso de professores de matemática. Foram produzidas três tarefas, explicadas a seguir.

As tarefas propostas foram adaptações das atividades sugeridas por Cândido (2023). Ao trazermos as tarefas para o modelo presencial, conservamos as suas características mais interativas e manipulativas, acrescentando outras características interativas gamificadas disponíveis na própria plataforma Desmos.

Por fim, outro recurso mantido da pesquisa de Cândido foi o de utilizar questões do Enem sobre o assunto, porém elas foram diluídas ao longo dos encontros. Tal recurso se torna interessante, visto que na prática dos futuros docentes esses exercícios serão comuns.

As tarefas estão disponíveis de forma pública e gratuita na plataforma Desmos.

A primeira tarefa tem como objetivo conhecer o público da pesquisa, no caso os estudantes de Licenciatura em Matemática matriculados na turma de Ensino de Matemática II da UFRRJ.

Inicialmente, os graduandos foram perguntados sobre seu nome, idade e período da graduação no qual se encontram. Os alunos foram questionados sobre sua participação em projetos, ao longo da graduação. Tal pergunta foi direcionada devido ao grande potencial de enriquecimento da prática docente que esses projetos possuem¹² e está apresentada na Figura 13.

A segunda tarefa concentrou-se em uma sequência de atividades interativas que possuía construções interativas, juntamente com explicações teóricas dos conteúdos de ciclo trigonométrico e funções trigonométricas (seno e cosseno). Para a realização da atividade, os estudantes utilizaram unicamente *tablets*, já que a própria plataforma Desmos disponibiliza espaço apropriado para registrarem suas respostas.

A escolha dos *tablets*, como já dissemos, deu-se por conta da visualização mais clara das construções – a visualização foi prejudicada na primeira implementação, quando os estudantes utilizaram seus próprios *smartphones*. Após interagirem com essas construções, os alunos deveriam resolver tarefas – e podiam utilizar as próprias construções como material de apoio.

Para situar o leitor, a primeira página da tarefa consistia em uma explicação sobre o ciclo trigonométrico. Essas atividades mais explicativas vieram da necessidade – sinalizada pelos alunos participantes da pesquisa – de retomar os conteúdos formais relacionados aos estudos¹³.

Por fim, a última atividade proposta é fruto de algumas tarefas interativas presentes na plataforma Desmos e foi alinhada com alguns recursos produzidos por Cândido. Foram propostas tarefas gamificadas e tarefas sobre a alteração dos parâmetros, caracterizando assim a implementação como mais prática do que a anterior. Inicialmente, os alunos deveriam resolver desafios gamificados retirados da própria plataforma para a implementação. A atividade consistia em alterar os parâmetros de uma função trigonométrica a fim de lançar bolas do alto para coletar

¹² A atividade pode ser acessada no endereço: <https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/65d37088a720a7f67bceadfa?lang=pt-BR>

¹³ A atividade pode ser acessada no endereço: <https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/65da2ddab46943738ae839aa?lang=pt-BR>

estrelas. Mais adiante, neste artigo, apresentamos alguns dos desafios propostos nas tarefas do Desmos.

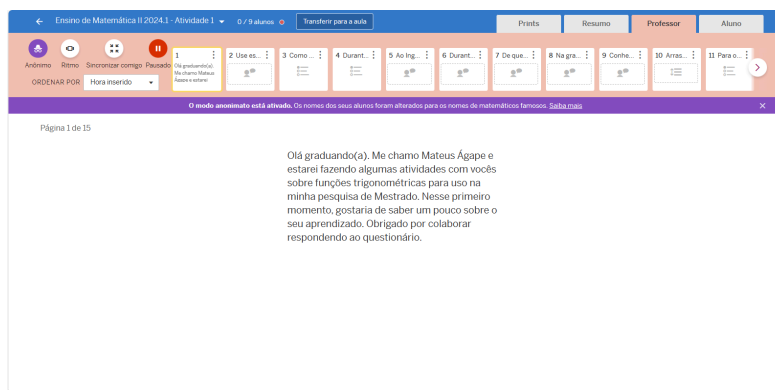
DESIGN DA AMBIÊNCIA

DO PERFIL DOS ESTUDANTES

Na primeira sequência de tarefas, os licenciandos foram convidados a acessar a plataforma Desmos a fim de se familiarizar com ela. Nesse momento, os alunos cumpriram a atividade de forma assíncrona com interações por meio do Whatsapp para instruções e soluções de dúvidas ou dificuldades de manuseio.

Inicialmente, os graduandos foram perguntados sobre seu nome, idade e período da graduação no qual se encontravam. No Quadro 1 serão apresentadas as respostas e os nomes fictícios – a fim de preservar a real identidade dos graduandos –, gerados pela própria plataforma Desmos.

Figura 13: Tela Inicial da Primeira atividade na plataforma



Fonte: elaborada pelo autor

Quadro 1: Idade dos educandos e período do curso

Nome	Idade (anos)	Período
Ami Radunskaya	26	7º
Abraham Nemeth	28	12º
Nalini Joshi	28	13º
Gladys West	29	6º
Erika Camacho	25	13º
Maryam Mirzakhani	27	13º
Karlie Noon	31	12º
MC Escher	24	10º

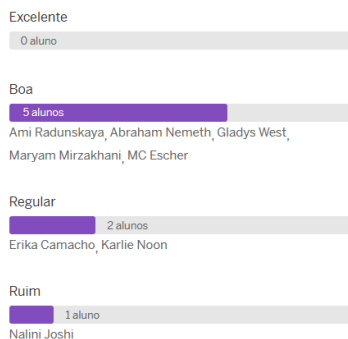
Fonte: elaborado pelo autor

Por meio dessas informações, podemos observar que todos os estudantes se encontram na etapa final da graduação, visto que a disciplina é uma disciplina alocada nos últimos períodos da graduação.

Em seguida, na Figura 14 mostramos as respostas dos alunos para a pergunta sobre o modo como avaliam sua trajetória acadêmica no ensino de matemática da educação básica.

Figura 14: Gráfico resultados trajetória acadêmica

Como você avalia sua trajetória na Matemática na educação básica?



Fonte: elaborada pelo autor

Nessa análise, podemos ver que a maioria dos alunos (cinco alunos de oito no total) avalia que seu contato com a matemática foi bom.

Na Figura 15, organizamos as respostas dos alunos para a questão sobre sua participação em projetos, ao longo da graduação. Tal pergunta foi direcionada devido ao grande potencial de enriquecimento da prática docente que esses projetos possuem.

Figura 15: Gráfico resultados projetos acadêmicos

Durante o curso, participou de projetos? Selecione quais.



fonte: elaborado pelo autor

Foi possível observar a grande adesão dos alunos aos projetos de extensão e de docência. Em seguida os alunos descreveram como foi essa participação. Organizamos essas respostas no Quadro 2, a seguir.

Quadro 2: Depoimentos dos educandos referentes à participação em projetos

Durante o curso, participou de projetos? Caso tenha participado, descreva como contribuiu para sua formação.	
Nome	Resposta
Ami Raduns kaya	No momento eu estou participando da Residência Pedagógica e este é o meu primeiro semestre na escola. Acredito que tem contribuído por poder acompanhar o professor e fazer o planejamento de algumas atividades que ele sugere para aplicarmos.
Abraham Nemeth	Não cheguei a participar de projetos da universidade, como aluno precisei dar aulas particulares e trabalhar aos finais de semana para poder complementar minha renda familiar e logo cedo tive que entrar para o

	mercado de trabalho.
Nalini Joshi	Foi simplesmente enriquecedor.
Gladys West	A monitoria foi fundamental para que eu percebesse que me sentia bem fazendo parte do aprendizado de outras pessoas Com o PIBID, tenho aprendido muito sobre os deveres e responsabilidades de um professor, e também sobre como é importante planejarmos bem nossa atuação dentro de sala de aula
Erika Camacho	PET me ajudou a desenvolver atividades e pensar como usá-las nas escolas , pibid está me ajudando a perder o medo da sala de aula , testar meus conhecimentos como professor
Maryam Mirzakhani	A monitoria a qual eu participei de maneira formal foi da disciplina de Desenho Técnico, do departamento de Arquitetura e Urbanismo, o que não tem diretamente a ver com o nosso curso, mas que posso afirmar com toda a certeza que muito me ajudou a melhorar minhas habilidades de ensino e aprendizagem, e posso dizer que a matemática me ajudou muito nessa disciplina. De maneira não oficial eu ofereci por conta própria, monitorias de Matemática 1 e 2, e Cálculo 1 para alguns alunos que apresentavam dificuldades nas disciplinas, alunos esses que eu acabei conhecendo durante as monitorias de Desenho Técnico.
Karlie Noon	Esses dois programas me permitiram desenvolver uma visão mais delicada em relação ao ensinar. Aprendi que há outras ferramentas úteis além do quadro e giz que podem contribuir para um bom entendimento.
MC Escher	Bolsista ProExt de Audiovisual. Para Matemática não muita coisa, mais para o meu trabalho atual onde tiro meu sustento

Fonte: elaborado pelo autor

Nessa etapa da pesquisa, foi possível constatar o modo como os projetos de extensão (PET) e de docência – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), Residência Pedagógica e Monitoria – contribuem para a formação inicial dos professores; e como o contato próximo com a rotina mais direta dos(as) professores(as) de matemática também possibilita que redescubram sua paixão por ensinar e contribuir para o aprendizado de terceiros.

A pergunta seguinte tinha como objetivo verificar as dificuldades dos alunos nas disciplinas de matemática da graduação. Ao serem questionados sobre a participação em projetos e a contribuição dessas ações, relataram que participaram de PIBID, Residência Pedagógica e

PET – essas ações trazem em comum a aproximação dos licenciandos às práticas docentes. O Quadro 3 mostra os depoimentos dos educandos sobre as dificuldades nas disciplinas.

Quadro 3: Depoimentos dos educandos sobre as dificuldades nas disciplinas

Ao ingressar na graduação, quais foram as dificuldades encontradas no curso em relação às disciplinas? Escreva ou mande seu áudio.	
Nome	Resposta
Ami Radunskaya	Além de algumas dificuldades em matemática básica, acredito que por ter visto a matemática como "calcule isso" e ter sempre um padrão de resolução, existiram certas disciplinas que exigiram o contrário disso e tive dificuldade.
Abraham Nemeth	Acho que realmente o que foi mais difícil foi lidar com as regras de matemática básica no cálculo 1, saber como lidar com as equações em geral sem negligenciar os fundamentos.
Nalini Joshi	Como vim de escola pública, meu conhecimento era bem diferente dos meus colegas e isso acabou me deixando bastante frustrada.
Gladys West	Principalmente o fato de que todas as matérias demandam muito tempo de dedicação, o que dificultava o planejamento para o estudo das mesmas. Optei por puxar menos matérias por período para tentar equilibrar esse problema, mas nunca foi fácil.
Erika Camacho	Matemática básica , gráficos , muitas coisas eu não vi pois meu curso técnico era voltado para dança
Maryam Mirzakhani	Como eu disse anteriormente, ao entrar na universidade eu percebi que eu não sabia matemática básica, pelo menos não da maneira que eu achava que sabia, então as maiores dificuldades que encontrei no curso em relação às disciplinas, tinham relação direta com a matemática básica.
Karlie Noon	Não tive um ensino médio de muita qualidade, e só entrei na graduação 8 anos depois de me formar no ensino médio, sem nenhum cursinho preparatório ou algo do tipo. Então por esse motivo tenho muita insegurança mesmo com a matemática básica e isso influencia diretamente em muita coisa ao longo do curso.
MC Escher	As de educação foram muito boas e reflexivas de se fazer. Para realizá-las tínhamos que ler e estar bastante envolvido com a matéria, inclusive era um esforço dos professores. As matérias específicas foram num cenário completamente oposto. Algumas matérias com a maioria esmagadora de reprovados. (Me lembrou a matéria de Álgebra Linear B em que resultou em quase 90% da turma reprovada)

Muitas defasagens surgem na fala dos alunos nesse momento – a grande maioria pode ser discutida com base no fenômeno da dupla descontinuidade, publicado por Félix Klein, em 1908. Nesse mesmo contexto, observamos

O referido pesquisador criticava os professores universitários que se preocupavam exclusivamente com a Matemática Acadêmica, sem considerarem as necessidades das escolas, e a Matemática Escolar. Klein identifica essa ruptura como uma dupla descontinuidade, que se estabelece na falta de conexão entre a Matemática aprendida na escola básica e a Matemática que determina os cursos de formação de professores (Rodrigues *et al.*, 2021, p. 193).

A dupla descontinuidade é uma realidade na formação inicial de professores e acaba gerando dificuldade nas disciplinas da graduação e até mesmo abandono do curso de graduação. Nos depoimentos, podemos verificar que os alunos entendem que na educação básica a matemática se dedicava a cálculos e reprodução de fórmulas, e na graduação o pensamento parece ser o oposto. Além disso, comentaram também sobre o fato de o tempo de dedicação e estudos para obter bom aproveitamento nas disciplinas ser diferente da educação básica.

Quando perguntados sobre as disciplinas que mais contribuíram para o exercício da profissão, os acadêmicos dissertam da forma como mostramos no Quadro 4, a seguir.

Quadro 4: Depoimentos dos educandos sobre experiências na graduação

Durante a Graduação quais experiências ou disciplinas mais contribuíram (ou contribuem) para o exercício da sua profissão? Escreva no quadro ou clique no ícone para mandar um áudio	
Nome	Resposta
Ami Radunskaya	As disciplinas de Lab I, Lab II, os NEPES e Didática, pois nelas vi algumas atividades que podem ser usadas como algo complementar a aula e exemplos de abordagem.
Abraham Nemeth	Atualmente atuo como desenvolvedor, então as disciplinas que mais contribuíram foram linguagem de programação, álgebra 1 e seus fundamentos de lógica, álgebra linear em seus fundamentos de vetores e matrizes, assim como os cálculos em geral, em especial o numérico.
Nalini Joshi	As de educação foram as que mais me encontrei e me encaixei.
Gladys West	Acredito que todas, pois cada uma me ensinou uma forma diferente de estudar matemática. Também gosto do aprofundamento político e das formas diferentes de ensinar matemática que as matérias da educação trazem.
Erika	As disciplinas de educação, desenvolvimentos

Camacho	
Maryam Mirzakhani	As disciplinas de NEPE, os LabMat e a disciplina de Ensino 1 contribuíram muitíssimo, além da monitoria, tanto a de matemática propriamente dita, quanto a de Desenho Técnico, que foi o que mais me ajudou a me comunicar com os alunos.
Karlie Noon	A disciplina de Didática 1, com a professora Adriana, pra mim foi a que mais conseguiu trazer uma questão mais humanizada. Aprendi a observar o lado humano do aluno, a questão de como o emocional influencia na aprendizagem. A professora fez uma espécie de "regressão" onde voltamos às lembranças da infância no ambiente escolar/familiar e pude associar minhas dificuldades e/ou qualidades a partir dessas lembranças.
MC Escher	Introdução à Estatística, Cálculo I, Álgebra I.

Fonte: elaborado pelo autor

De certa forma, o público-alvo da pesquisa está bem definido. Sendo assim, convém questionar os alunos daqui para frente sobre os objetivos da pesquisa. Como primeiro questionamento, está o uso de tecnologias digitais no ensino de matemática.

DO USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A seguir, no Quadro 5, apresentamos os depoimentos dos educandos sobre as contribuições das tecnologias digitais para o aprendizado de matemática.

Quadro 5: Depoimentos dos educandos sobre as contribuições das tecnologias digitais

De que forma você considera que as Tecnologias Digitais (Softwares, apps, programas, etc.) contribuem ou não para o seu aprendizado em Matemática? Escreva no quadro ou envie um áudio	
Nome	Resposta
Ami Radunskaya	Contribuem sim para o meu aprendizado em Matemática , pois dependendo do aplicativo ajuda na visualização de alguns conceitos, como por exemplo eu gosto de usar para visualização das formas geométricas.
Abraham	Uma das maiores dificuldades e barreiras que tive era poder visualizar toda a

Nemeth	álgebra que praticamos no dia a dia, então o uso de softwares foi importantíssimo para esse processo, acredito que a memória visual seja um fato crucial para nós também, dessa forma poder entender como se comportam as funções em geral, com o auxílio do GeoGebra por exemplo, foi um divisor de águas em questão de sair do abstrato para o concreto.
Nalini Joshi	Com a Tecnologias tivemos um avanço muito satisfatório principalmente em geometria que podemos ver as figuras com mais riqueza e detalhes.
Gladys West	Me ajudam muito como ferramentas para estudo em si. Muitas vezes me pego conferindo gráficos no GeoGebra, consultando formas diferentes de resoluções de questões de matemática pura, etc.
Erika Camacho	Eu sou mt ruim em lidar com tecnologia , preferi-o mt mais um trabalho escrito ou algo assim
Maryam Mirzakhani	Eu acredito que as tecnologias digitais contribuem muito para o aprendizado de matemática, e acredito que desde os anos iniciais elas deveriam ser implementadas nas aulas.
Karlie Noon	As tecnologias digitais por si só não podem trazer benefício algum, a não ser que sejam utilizadas de maneira coerente, com planejamento e objetivos definidos, considerado é claro, a realidade dos alunos.
MC Escher	Contribui mas tem que ser muito bem elaborado pois caso contrário, atrapalha mais do que ajudaria no sentido de aprendizado. A boa elaboração seria para agir de uma forma mais lúdica e esclarecedora onde certas perspectivas no quadro não seriam possíveis.

Fonte: elaborado pelo autor

Inicialmente, nas respostas sobre a utilização de tecnologias digitais no ensino de matemática, já emergem características como a visualização. Para os alunos, alguns aplicativos se mostraram de extrema importância para visualizarem gráficos, comportamentos de funções e formas geométricas; e compreenderem certos resultados e conceitos matemáticos. Por fim, vale destacar a fala de Karlie Noon, que ressalta a importância da intencionalidade alinhada à utilização de tecnologias digitais.

A seguir, no Quadro 6, mostramos os depoimentos dos educandos sobre o modo como as tecnologias digitais minimizam dificuldades.

Quadro 6: Depoimentos dos educandos sobre o modo como as tecnologias digitais minimizam dificuldades

Na graduação, quais disciplinas você acha que o uso de Tecnologias Digitais minimizam suas dificuldades de aprendizado? Caso queira, comente a partir de um conteúdo estudado.	
Nome	Resposta
Ami Radunskaya	As disciplinas de Tópicos de Geometria Espacial e Equações Diferenciais II, sendo esta última poderia ser usada para o estudo do comportamento de algumas soluções.
Abraham Nemeth	Apesar de ter tido disciplinas que aprofundaram bastante o uso do GeoGebra para o ensino, a experiência que tive em cálculo numérico onde o professor transformava o conteúdo aprendido em códigos Python, foi simplesmente sensacional. Me senti estimulado e pude ver na prática que o conteúdo aprendido impactava diretamente meu dia a dia.
Nalini Joshi	Com Tecnologias pude expressar mais meus conhecimentos.
Gladys West	Praticamente todas. Em topologia foi fundamental consultar diferentes fontes para descobrir propriedades que eu poderia usar para fazer as questões.
Erika Camacho	Nepe , geometria espacial , GeoGebra.
Maryam Mirzakhani	Acredito que sem o uso das Tecnologias Digitais, os cursos de Cálculos se tornem ainda mais complicados, principalmente a parte geométrica, apps como o GeoGebra por exemplo nos dão uma outra perspectiva a respeito de funções que em outro momento eram inimagináveis para a maioria dos alunos.
Karlie Noon	As tecnologias digitais me ajudaram bastante principalmente no modo de visualização de gráficos, observar comportamentos. Utilizei muito em Cálculo 2 e 3, foram indispensáveis para minha compreensão. Em Geometria Analítica poderia ter me ajudado, porém no início da graduação, quando cursei essa disciplina, não havia conhecido nenhuma dessas tecnologias digitais, tive certa dificuldade que poderia ter sido evitado com o uso do GeoGebra por exemplo
MC Escher	Cálculo I, II, III e IV Matemática Plana e Espacial Álgebra Linear A e B Função de Variável Complexa

Fonte: elaborado pelo autor

Sobre a utilização de tecnologias para minimizar as dificuldades de aprendizado, os alunos demonstram que diversas tecnologias são essenciais em sua trajetória acadêmica, tanto

para fazer uma busca quanto para utilizar calculadoras gráficas e Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD).

Posteriormente, foram colocados em questão dois AGD – o GeoGebra e o Desmos –, ambos com os mesmos propósitos: uso de ferramentas de visualização, exploração e manipulação de objetos matemáticos. Porém, existem grandes diferenças entre os AGD citados, embora seus propósitos sejam semelhantes. Quando perguntados sobre o GeoGebra e o Desmos, os alunos forneceram as respostas organizadas no Quadro 7.

Quadro 7: Depoimentos dos educandos sobre experiências com o Desmos e o Geogebra

Conhece e já teve experiências com a plataforma Desmos? E com o GeoGebra? Comente.	
Nome	Resposta
Ami Radunskaya	Sim. Eu conheço as duas plataformas, mas o GeoGebra é a que mais utilizo nas disciplinas da graduação.
Abraham Nemeth	Como comentado anteriormente, tive ótimas experiências com o GeoGebra, mas ainda não conhecia a plataforma Desmos.
Nalini Joshi	Desmos ainda não.
Gladys West	Nunca tive com o Desmos. GeoGebra já tive bastante. Muitos professores e disciplinas utilizam o GeoGebra como ferramenta fundamental.
Erika Camacho	Só com GeoGebra
Maryam Mirzakhani	Conheço melhor o GeoGebra, a plataforma Desmos tive pouco contato em um período conturbado que acabei trancando, então acabei não fazendo muito proveito de suas funcionalidades.
Karlie Noon	Com a Desmos ainda não, nem conhecia. Já o GeoGebra usei, bastante em alguns momentos, excelente plataforma
MC Escher	Apenas GeoGebra, onde foi usado em todas as matérias da professora XXXX.

Fonte: elaborado pelo autor

Em relação ao uso do GeoGebra e do Desmos, a maioria dos alunos utiliza ou conhece o GeoGebra, por ser uma plataforma amplamente consolidada e popular. Já o Desmos é pouco conhecido pelos alunos e nenhum deles o utiliza com frequência. Esse resultado torna oportuno que as atividades propostas sejam realizadas no Desmos, de forma que contribuam para a formação inicial de professores.

DOS CONTEÚDOS DE TRIGONOMETRIA

Nessa etapa, os participantes foram questionados sobre suas percepções de complexidade dos conteúdos e responderam a todas as questões para posterior análise. A Figura 16 mostra a atividade de ordenar conteúdos pelo grau de dificuldade.

Figura 16: Atividade na plataforma: ordenar conteúdos pelo grau de dificuldade

Arraste as sentenças para ordenar a lista abaixo da forma que achar melhor

MENOS COMPLEXO



Trigonometria no Triângulo



Trigonometria no Círculo



Equações Trigonométricas



Inequações Trigonométricas



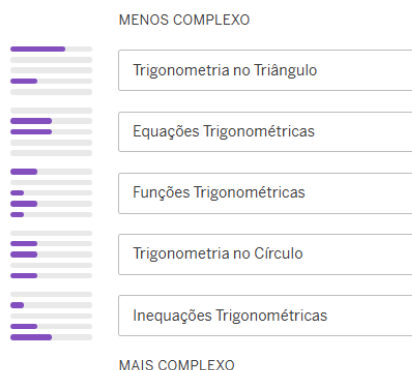
Funções Trigonométricas

MAIS COMPLEXO

Fonte: elaborado pelo autor

Na atividade seguinte, os alunos poderiam arrastar as fichas como achassem melhor, para ordenar os conteúdos do menos complexo ao mais complexo. Os resultados estão mostrados na Figura 17.

Figura 17: Resultados dos estudantes para a ordenação dos conteúdos



Fonte: elaborado pelo autor

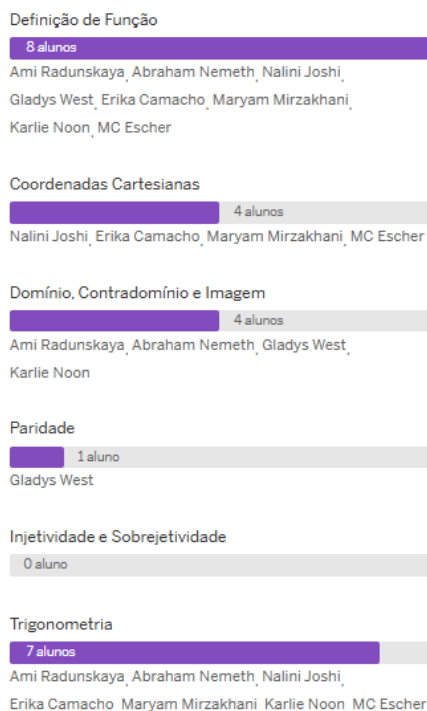
Observamos que, para conclusões iniciais, os estudantes acreditam que os conceitos de trigonometria no triângulo retângulo são menos complexos, de forma geral. Em seguida, as equações trigonométricas foram posicionadas entre a segunda e terceira posição. Em relação à trigonometria no círculo, foi evidenciado que houve um impasse sobre o referido conteúdo – alguns educandos alocaram a trigonometria na terceira, outros na quarta e outros, ainda, na quinta posição.

Por outro lado, a percepção dos licenciandos sobre os conceitos de funções trigonométricas – foco da pesquisa – e de inequações trigonométricas mostrou-se bastante dividida: há alunos que os julgam menos complexos entre os demais, mas também há alunos que afirmam que esses conteúdos são os mais complexos.

Sucedendo os questionamentos sobre os conceitos de trigonometria, os alunos também foram convidados a refletir sobre quais seriam os pré-requisitos para um estudante compreender bem os conceitos de funções trigonométricas, e os resultados estão dispostos na Figura 18.

Figura 18: Resultados dos educandos sobre conteúdos importantes

Para o estudo de Funções Trigonométricas, selecione APENAS TRÊS pré-requisitos que julga mais importante



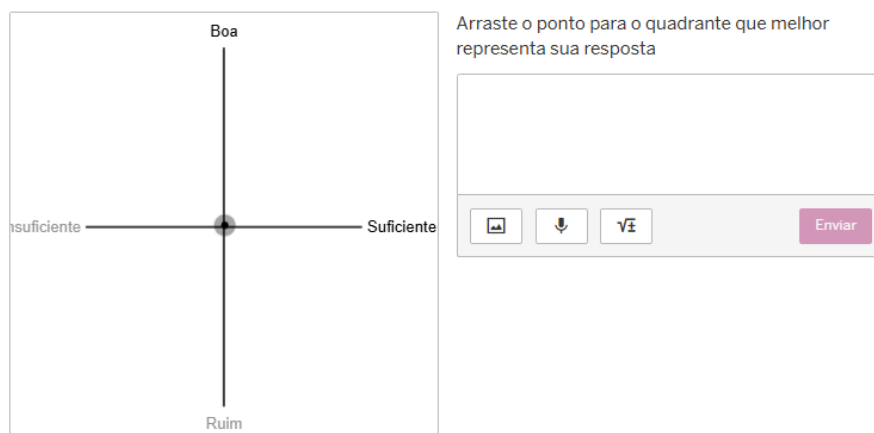
Fonte: elaborada pelo autor

Ao visualizarmos os resultados, foi possível perceber que, como apontam os resultados de Vergilio (2023), para os participantes, o pré-requisito mais importante entre os demais seria conhecer a definição de função – de fato, para compreender o comportamento de qualquer função no campo da matemática, faz-se necessário compreender o conceito e a definição de função de maneira geral.

Em seguida, outro pré-requisito determinado como de maior importância foi compreender os conceitos de trigonometria. Por fim, como terceiro pré-requisito mais importante no estudo de funções trigonométricas, os alunos se dividiram entre o conhecimento das coordenadas cartesianas e a compreensão sobre domínio, contradomínio e imagem.

O levantamento seguinte teve o intuito de entender o modo como os participantes julgam seu próprio aprendizado em relação às funções trigonométricas. Inicialmente os alunos deveriam manipular um ponto no plano cartesiano e posicioná-lo de acordo com sua resposta. A Figura 19 mostra o gráfico a ser manipulado pelos educandos.

Figura 19: Atividade – gráfico sobre a experiência acadêmica dos educandos



Fonte: elaborada pelo autor

Em seguida, os alunos registraram suas respostas escritas, que estão mostradas no Quadro 8, a seguir.

Quadro 8: Depoimentos dos educandos sobre seu grau de aprendizado de funções trigonométricas

Movendo o ponto entre os quadrantes, utilize o espaço abaixo para classificar o seu aprendizado sobre funções trigonométricas ($f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \tan(x)$). Você os julga suficientes, teve boas experiências? Comente no quadro.	
Nome	Resposta
Ami Radunskaya	Eu classifico meu aprendizado como suficiente.
Abraham Nemeth	Julgo minhas experiências mais suficientes do que boas, acredito que o medo da trigonometria vem realmente da matemática básica, onde a visualização do aprendizado sempre foi ruim tanto no ensino fundamental quanto no médio.
Nalini Joshi	Imparcial.
Gladys West	Não considero suficiente pois sempre me pego me embolando ou consultando materiais, mas me dou bem com o conteúdo em geral.
Erika Camacho	Ainda esqueço coisas básicas , porém consigo anotar e seguir
Maryam Mirzakhani	Julgo que meu aprendizado nas funções trigonométricas seja bem ruim e insuficiente, o pouco que sei posso dizer que aprendi na universidade, pois dificilmente tive algum contato com elas no ciclo básico. Percebo que ainda

	faço muita confusão com as 3 principais (com as outras então, nem se fala, hahahahaha) e por muitas vezes preciso recorrer ao círculo para conseguir me orientar melhor.
Karlie Noon	Não domino o assunto, então não considero meu aprendizado bom.
MC Escher	Aprendi depois de velho mas já tinha ideia de Trigonometria.

Fonte: elaborado pelo autor

Podemos relacionar o aprendizado como suficiente quando o participante de fato compreende os conceitos abordados na trigonometria, porém classificamos o aprendizado como bom ou ruim de forma afetiva, verificando se o aluno de fato gostou de se debruçar sobre os conteúdos e aprendê-los ou se sua transposição didática foi eficiente para sua aprendizagem na educação básica. Portanto, dizer se o aprendizado foi suficiente ou insuficiente é uma análise de desempenho, mas entender a experiência como boa ou ruim significa analisar se o aluno teve boas experiências do ponto de vista pessoal.

Dessa forma, cinco participantes localizaram o ponto no primeiro quadrante, ou seja, classificaram seu aprendizado como bom e suficiente. Uma estudante mostrou-se imparcial e fixou o ponto na origem. Por fim, um participante localizou o ponto no terceiro quadrante e outro no quarto quadrante, informando assim que suas experiências foram ruins – porém uma foi classificada como ruim e suficiente e outra como ruim e insuficiente.

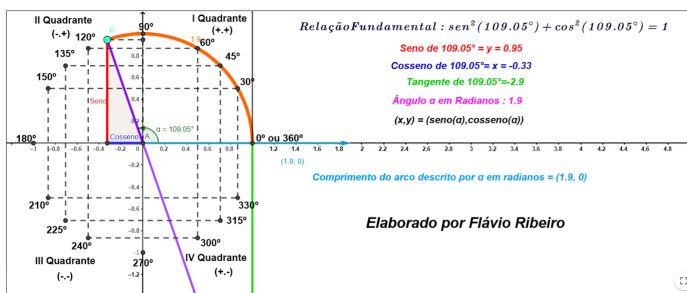
Para finalizar o primeiro encontro, os alunos deveriam solucionar três questões do Enem, a fim de observar o modo como esses conteúdos são exigidos na educação básica. As questões do Enem foram incorporadas em todos os encontros, com o objetivo de validar os conteúdos explorados.

Primeiro Encontro

Na **primeira implementação**, os participantes foram convidados a interagir com o *applet* intitulado “Atividade 1 - O ciclo trigonométrico”¹⁴, elaborado por Júnior (2018). Para a realização dessa atividade, os participantes contaram com folhas de papel ofício para registrar suas respostas; e com seus próprios *smartphones*, preferidos por eles, para manipular a construção. A Figura 12 mostra o *design* do primeiro *applet*.

¹⁴ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/afF3rGeF#material/AeTdy8jX> Acesso em: 03/02/2024

Figura 12: Design do primeiro *applet* utilizado no GeoGebra



Fonte: Júnior (2018)

O *applet* possibilita que os participantes compreendam os conceitos explorados a partir da observação, da manipulação e do registro do que de fato está sendo alterado na construção. Assim, o objetivo da tarefa era que os estudantes, apenas deslizando o ponto azul sobre a circunferência trigonométrica, respondessem às tarefas propostas.

Quando questionados sobre o raio do ciclo trigonométrico ser unitário, os participantes fizeram os seguintes comentários:

Gladys West: *Sim, podemos observar que a borda do círculo passa no +1 e -1 nos dois eixos.*

Como o centro é na origem e a borda é sempre equidistante do centro, temos que o raio é 1.

Karlie Noon: *Sim, $R = \cos(0)$*

MC Escher: *Considerando que o seno e cosseno dos ângulos representados no círculo só podem atingir seu valor máximo em 1, então o raio será unitário.*

A partir dessas observações, destacamos que o primeiro estudante tirou suas conclusões de forma visual, enquanto os dois outros estudantes utilizaram noções anteriores que possuíam sobre o conteúdo. Notamos uma certa preferência pelo conhecimento que já está estabelecido e assimilado na mente dos estudantes.

Em seguida, quando perguntados sobre a circunferência trigonométrica ser orientada, todos os participantes da pesquisa comentaram que o sentido positivo seria o anti-horário e o sentido negativo o horário. Também apresentaram que os eixos que representam numericamente o seno e o cosseno são respectivamente os eixos y e x; e observaram que o eixo que representa numericamente a tangente seria a reta $x=1$. Nesse ponto, verificamos que os estudantes possuem uma noção dos conteúdos explorados.

Quando indagados sobre o estudo de sinal do seno, do cosseno e da tangente, foi perceptível a utilização de tabelas pelos três estudantes – característica que pode ser destacada como um recurso útil quando estamos fazendo estudo de sinais ou funções. Apesar de a atividade ter sido realizada de maneira individual, com discussões e trocas entre os estudantes, nesse quesito os alunos não conversaram e ainda assim seguiram uma mesma estratégia de resolução. É possível concluir, inicialmente, que a tabela pode ser o recurso por meio do qual aprenderam esses conteúdos – além disso, a tabela também é um recurso que auxilia a organizar os pensamentos e ter uma visualização mais direta. No Quadro 9, mostramos um exemplo de tabela feita pelos estudantes.

Quadro 9: Exemplo de tabela feita pelos estudantes

Quadrantes	Seno	Cosseno	Tangente
1	+	+	+
2	+	-	-
3	-	-	+
4	-	+	-

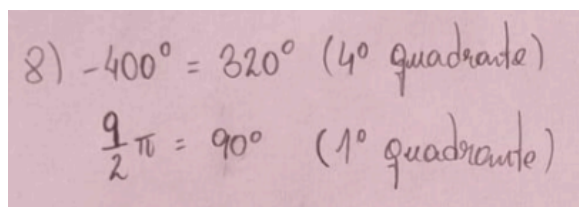
Fonte: elaborado pelo autor a partir dos registros dos educandos

Os participantes deveriam assinalar os ângulos marcados na circunferência, em radianos. Para executar essa tarefa, a proposta inicial seria que os alunos, apenas deslizando o ponto azul sobre os ângulos, constatassem que a marcação em azul da construção já apresentava os valores dos arcos em radianos – assim, eles deveriam apenas deslizar sobre os pontos e fazer os registros.

Dos estudantes observados, apenas um seguiu essa estratégia, utilizando o valor decimal aproximado dos ângulos em radianos. Os outros dois alunos utilizaram a notação com pi. Ambas as estratégias estão corretas, porém na segunda estratégia não foi utilizada a construção, mas sim conhecimentos prévios.

Em relação à localização de alguns ângulos e seus respectivos quadrantes, os alunos responderam da forma como aparece na Figura 13, na Figura 14 e na Figura 15, a seguir.

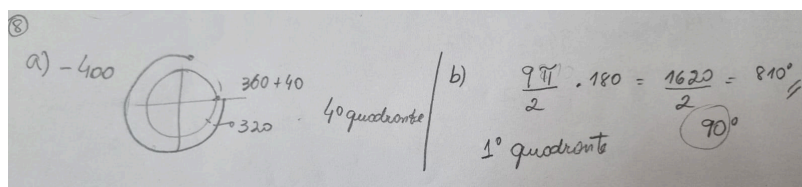
Figura 13: Resposta do aluno Gladys West

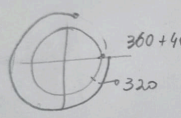


8) $-400^\circ = 320^\circ$ (4º quadrante)
 $\frac{9}{2}\pi = 90^\circ$ (1º quadrante)

Fonte: elaborada pelo autor

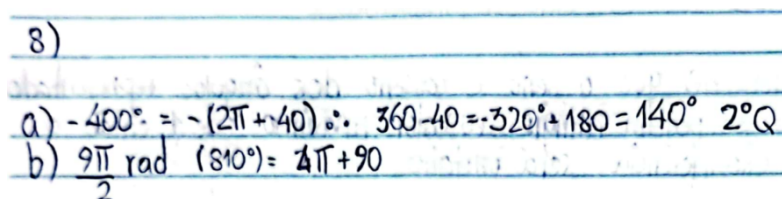
Figura 14: Resposta do aluno Karlie Noon



8) a) -400  $360+40$
 320 4º quadrante
 b) $\frac{9\pi}{2} \cdot 180 = \frac{1620}{2} = 810^\circ$
 1° quadrante 90°

Fonte: elaborada pelo autor

Figura 15: Resposta do aluno MC Escher



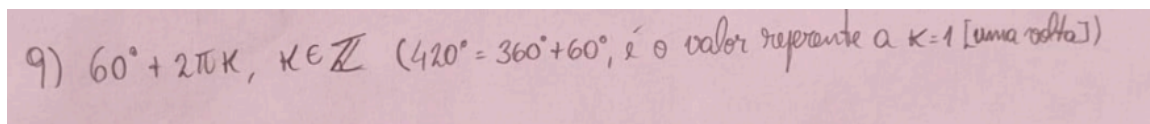
8)
 a) $-400^\circ = -(2\pi + 40)^\circ \therefore 360 - 40 = -320^\circ + 180 = 140^\circ$ 2ºQ
 b) $\frac{9\pi}{2} \text{ rad } (810^\circ) = 4\pi + 90$

Fonte: elaborada pelo autor

De maneira mais direta, Gladys West chegou à conclusão de que os ângulos correspondiam a 320° e 90° respectivamente, pertencendo assim ao 4.º e ao 1.º quadrante. Karlie Noon seguiu por uma demonstração mais didática, desenhando o ciclo trigonométrico e chegando às mesmas conclusões. Por fim, MC Escher acabou cometendo alguns equívocos em seus cálculos, errando assim o primeiro item e acertando o segundo. Podemos observar também que o ângulo de 90° foi classificado como 2.º quadrante, a mesma discussão que emergiu anteriormente.

Para caminharmos para os objetivos desta pesquisa em relação à investigação dos eventos críticos, faz sentido destacarmos uma última percepção dos alunos sobre a seguinte solicitação: determinar os arcos congruentes a 420° . É o que está mostrado na Figura 16, na Figura 17 e na Figura 18.

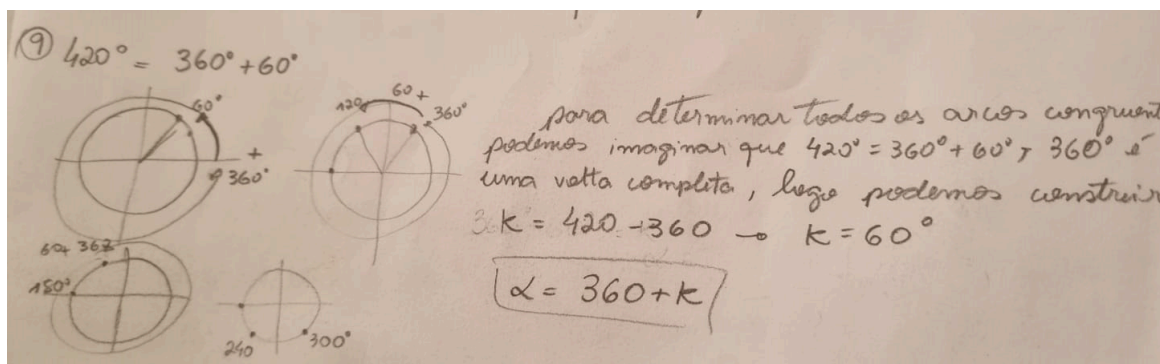
Figura 16: Resposta do aluno Gladys West



9) $60^\circ + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ ($420^\circ = 360^\circ + 60^\circ$, é o valor referente a $k=1$ [uma volta])

Fonte: elaborada pelo autor

Figura 17: Resposta do aluno Karlle Noon



9) $420^\circ = 360^\circ + 60^\circ$

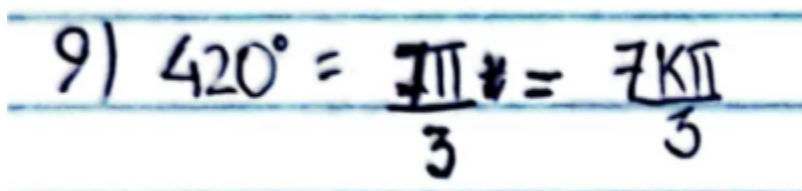
para determinar todos os arcos congruentes podemos imaginar que $420^\circ = 360^\circ + 60^\circ$, 360° é uma volta completa, logo podemos construir

$360^\circ k = 420^\circ - 360^\circ \rightarrow k = 60^\circ$

$\alpha = 360^\circ + k$

Fonte: elaborada pelo autor

Figura 18: Resposta do aluno MC Escher



9) $420^\circ = \frac{7\pi}{3} = \frac{7k\pi}{3}$

Fonte: elaborada pelo autor

Quando solicitados a escrever expressões que generalizam um conjunto de ângulos congruentes, foi possível notar certa dificuldade por parte dos estudantes. Primeiro, é preciso tomar uma série de cuidados em relação à notação utilizada.

Gladys West concluiu que o ângulo 420° reduzido à primeira volta positiva equivale a 60° . Assim, na tentativa de generalizar essa ideia, ele determina que os ângulos congruentes devem respeitar a lei expressa por $60^\circ + 2k\pi$, com k inteiro. Para essa solução vale destacar o cuidado que se deve ter em relação a expressar ângulos em graus e em radianos em uma mesma expressão. Para não gerar essa confusão, é possível escrever 60° como $\pi/3$.

Já Karlie Noon propõe que o ângulo 420° nada mais é que $360^\circ + 60^\circ$ – assim, para construir uma generalização, ele pode considerar o ângulo 60° . Em seguida, esse aluno escreve a generalização $\alpha = 360 + k$. Essa é uma generalização possível para o aluno entender o primeiro ângulo congruente após a primeira volta, porém ela não dá conta de todos os ângulos congruentes.

Por fim, MC Escher propõe o seguinte raciocínio: converter o ângulo de graus para radianos e em seguida multiplicar por k , sem situar ao leitor o significado de k .

Os estudantes compreenderam a pergunta e entenderam que os ângulos congruentes são aqueles obtidos ao completar $+360^\circ$ a partir da sua primeira determinação positiva.

Portanto, podemos inferir que a dificuldade por parte dos estudantes consiste na representação matemática dessa generalização. Com o fim de sanar essas dificuldades, na implementação seguinte, os alunos tiveram contato justamente com a generalização dos arcos congruentes, de forma iterativa e interativa.

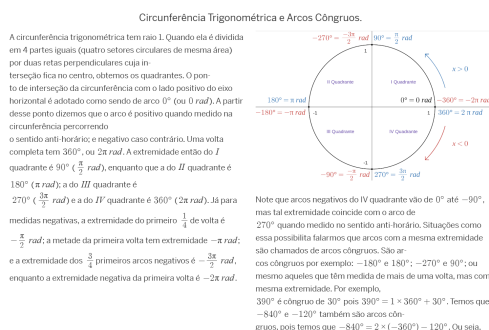
A seguir, esta pesquisa se dedica a descrever e destacar pontos importantes da segunda implementação, que aconteceu no Desmos Sala de Aula. Para adentrar no ambiente do Desmos, entre a primeira e a segunda implementação, aos alunos foram propostas as atividades criadas por Júnior (2018) por meio dos *applets*. Eles fizeram as atividades 2, 3, 4 e 5, que trabalhavam os conceitos de função seno, função cosseno e a alteração dos parâmetros delas.

A **segunda implementação** concentrou-se em uma sequência de atividades interativas, que possuíam construções interativas juntamente de explicações teóricas dos conteúdos de ciclo trigonométrico e funções trigonométricas (seno e cosseno). Para a realização da atividade, os estudantes utilizaram unicamente *tablets*, uma vez que a própria plataforma Desmos já disponibiliza espaço apropriado para registrarem suas respostas.

A escolha dos *tablets* se deu por conta da visualização mais clara das construções – a visualização foi prejudicada na primeira implementação, quando os estudantes utilizaram seus próprios *smartphones*. Após interagirem com essas construções, os alunos deveriam resolver tarefas e podiam utilizar as próprias construções como material de apoio.

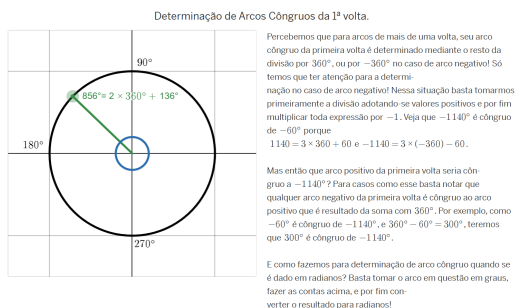
Para situar o leitor, a primeira página da tarefa consistia em uma explicação sobre o ciclo trigonométrico. A Figura 20, a seguir, mostra o *design* da segunda atividade na plataforma Desmos. A Figura 21 mostra a atividade de determinação de arcos realizada na plataforma Desmos.

Figura 20: Design da segunda atividade na plataforma Desmos



Fonte: Cândido (2023)¹⁵

Figura 21: Atividade na plataforma Desmos sobre determinação dos arcos



Fonte: Cândido (2023)

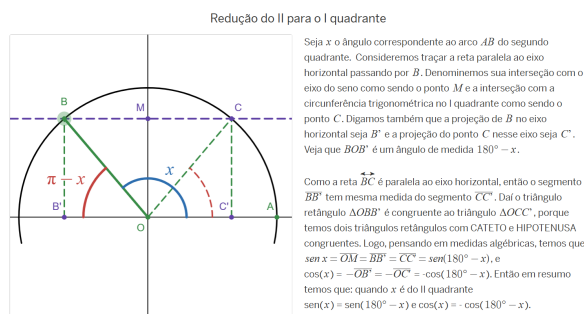
Essas atividades mais explicativas vieram da necessidade – sinalizada pelos alunos participantes da pesquisa – de retomar os conteúdos formais relacionados aos estudos.

Essa próxima página mostra um exemplo de construções propostas de forma interativa. Além de ter acesso à explicação, o aluno é capaz de manipular o ponto sobre a circunferência a fim de entender o modo como são generalizados os ângulos em graus após a primeira volta completa.

Por fim, mostramos, na Figura 22, uma construção apresentada aos alunos sobre as reduções para o primeiro quadrante. Novamente os alunos podem manipular a construção e visualizar os ângulos do segundo quadrante e seus correspondentes no primeiro quadrante. Nesse momento, foi chamada a atenção para a possível variação do sinal nessa redução. Assim, o professor mediador deve estar atento às considerações que devem ser feitas para a melhor compreensão da atividade.

¹⁵ As atividades apresentadas por Cândido (2023) em sua dissertação podem ser acessadas em: <https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/63bc3229b8c091975c778927?lang=pt-BR&collections=63bbfbab89f5f4e83f593e2f>

Figura 22: Atividade de redução do segundo para o primeiro quadrante



Fonte: Cândido (2023)

Além das construções interativas acerca dos conteúdos de ciclo trigonométrico, arcos côngruos e redução dos arcos para o primeiro quadrante, a atividade também trabalha os conteúdos de arcos notáveis da primeira volta positiva, finalizando com atividades avaliativas, mostradas na Figura 23 e na Figura 24.

Figura 23: Atividade expressões trigonométricas

Avalie o seu conhecimento a respeito dos conteúdos das páginas anteriores!

1 - O valor de $Y = \sin 90^\circ + \cos 360^\circ - \sin 270^\circ - \cos 180^\circ + \sin 180^\circ + \cos 90^\circ$ é:

- ☐ 1
☐ -1
☐ 2
☐ -2
☐ 4

Fonte: Cândido (2023)

Figura 24: Atividade expressões trigonométricas

2 - Encontre o valor de: $\cos 120^\circ + \sin 210^\circ$

- ☐ 1
☐ -1
☐ 0
☐ $\frac{1}{4}$
☐ $-\frac{1}{4}$

Fonte: Cândido (2023)

Nas atividades 1 e 2, mostradas na Figura 25 e na Figura 26, todos os alunos observados assinalaram a resposta correta, respectivamente, 4 e -1.

Figura 25: Atividade de multiplicação de arcos

3 - Qual o valor da expressão $\cos\left(\frac{35\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{-13\pi}{3}\right)$?

- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ $-\frac{1}{2}$
- ☐ 1
- ☐ $\frac{3}{4}$
- ☐ $-\frac{3}{4}$

Fonte: Cândido (2023)

Figura 26: Atividade de imagem da função

4 - Dada a função $f(x) = 3 - 2 \sin(2x)$, qual o valor de $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$?

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5

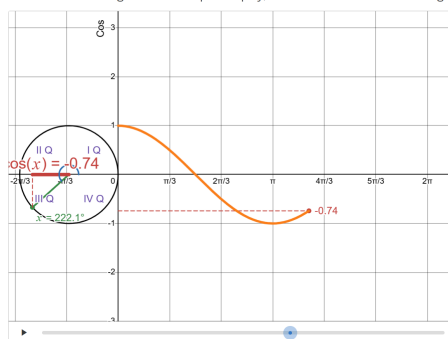
Fonte: Cândido (2023)

Na segunda metade da implementação em questão, o assunto abordado é o de funções trigonométricas, seguindo o mesmo modelo de construção. Nesse momento, os alunos foram colocados para interagir com construções sobre funções trigonométricas; investigar seus aspectos periódicos, seu domínio, contradomínio e imagem; e efetuar quando necessário o cálculo de suas imagens ou seus pontos máximos e mínimos.

Além disso, para os educandos existem construções referentes aos parâmetros das funções trigonométricas – e, manipulando essas construções, eles podem verificar o modo como cada parâmetro é responsável por alterar a função em si. A Figura 27 mostra a atividade rastro da função cosseno.

Figura 27: Atividade rastro da função cosseno

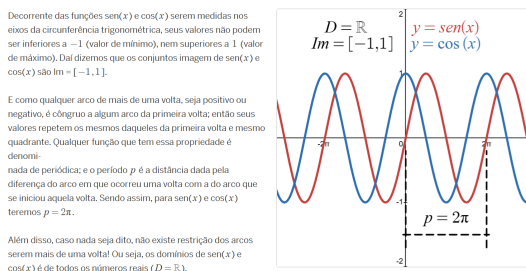
Cosseno no círculo trigonométrico! Aperte o play, ou controle o botão azul de rolagem.



Fonte: Cândido (2023)

Inicialmente, os alunos são convidados a dar *play* no objeto de interação ou arrastá-lo para observar o modo como os valores do cosseno, calculados no ciclo trigonométrico, se projetam no eixo plano cartesiano, formando assim a função $f(x) = \cos(x)$ de forma contínua. A Figura 28 mostra a atividade com a explicação sobre o período das funções seno e cosseno.

Figura 28: Atividade com explicação sobre o período das funções seno e cosseno



Fonte: Cândido (2023)

Por conseguinte, são trabalhados a partir de considerações textuais com o apoio de imagens os conceitos de imagem, periodicidade e período das funções $f(x) = \sin(x)$ ou $f(x) = \cos(x)$, além de atividades avaliativas sobre os máximos e os mínimos e o período de funções derivadas da função seno e cosseno. A Figura 29 mostra a atividade para avaliação do máximo da função f ; a Figura 30 apresenta a atividade para avaliação do mínimo da função f ; a Figura 31 expõe a avaliação sobre o período da função f e a Figura 32 exhibe a avaliação sobre a imagem da função f .

Figura 29: Atividade Máximo da função f

Avalie o seu conhecimento a respeito dos conteúdos!

1 - Dada a função $f(x) = 5 - 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right)$, o máximo valor que ela tem é:

- ☐ 8
☐ 10
☐ 2
☐ 3
☐ 4

Fonte: Cândido (2023)

Figura 30: Atividade mínimo da função f

2 - Com relação à função $f(x) = \frac{6}{2 + \cos(3x)}$, o mínimo valor que ela possui é:

- ☐ 4
☐ 8
☐ 6
☐ 3
☐ 2

Fonte: Cândido (2023)

Figura 31: Atividade período da função f

3 - Dada a função $f(x) = 5 - 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right)$, seu período é:

- ☐ 4
☐ 3
☐ 2
☐ 6
☐ 8

Fonte: Cândido (2023)

Figura 32: Atividade imagem da função f

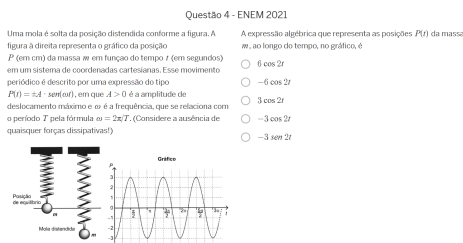
4 - Dada a função $f(x) = 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, qual o valor de x abaixo satisfaz $f(x) = \frac{5}{2}$?

- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{1}{3}$
- ☐ 0
- ☐ $\frac{1}{6}$
- ☐ $\frac{2}{3}$

Fonte: Cândido (2023)

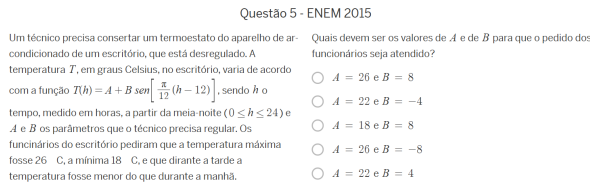
Ao final das situações exploratórias e das tarefas envolvendo os conteúdos de imagem e domínio das funções trigonométricas seno e cosseno, apresentamos duas questões do Enem, para avaliar o que foi compreendido pelos estudantes. A primeira questão está mostrada na Figura 33; e a segunda, na Figura 34.

Figura 33: Atividade com a questão do Enem



Fonte: Cândido (2023)

Figura 34: Atividade com a questão do Enem

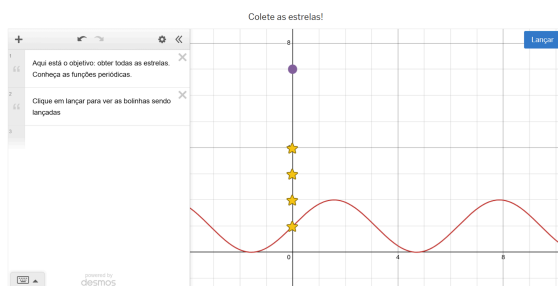


Fonte: Cândido (2023)

Em relação às questões do Enem, todos os estudantes acertaram a primeira. Já a segunda questão, dos sete estudantes que a responderam, três acertaram a resposta e outros dois erraram – assinalaram a alternativa correta, porém com sinal oposto.

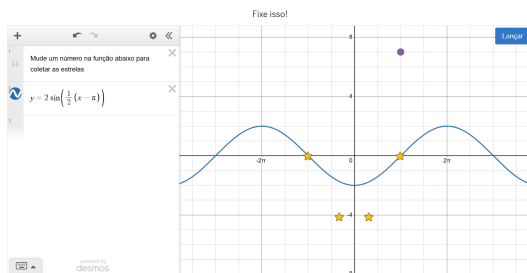
Na **terceira implementação**, foram propostas atividades gamificadas e atividades sobre a alteração dos parâmetros, caracterizando assim a implementação como mais prática do que a anterior. Inicialmente, os alunos deveriam resolver desafios gamificados retirados da própria plataforma para a implementação. A atividade consistia em alterar os parâmetros de uma função trigonométrica a fim de lançar bolas do alto para coletar estrelas. A Figura 35, a Figura 36, a Figura 37 e a Figura 38 apresentam alguns dos desafios propostos.

Figura 35: Atividade gamificada



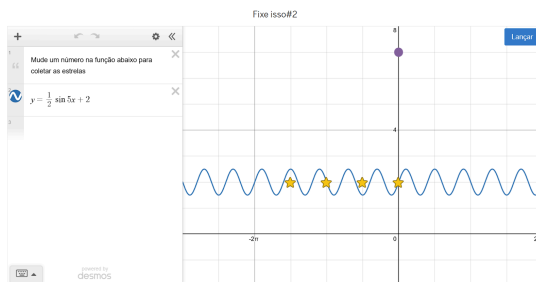
Fonte: Desmos

Figura 36: Atividade gamificada

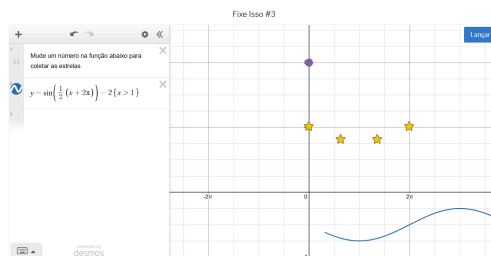


Fonte: Desmos

Figura 37: Atividade gamificada

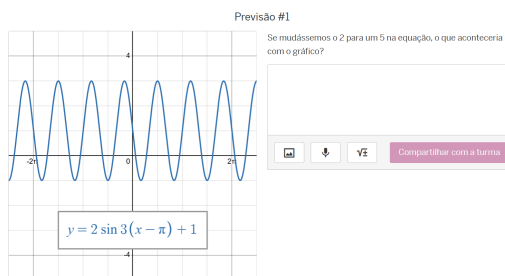


Fonte: Desmos

Figura 38: Atividade gamificada


Fonte: Desmos

Os alunos mostraram-se bastante interessados na resolução desses desafios. Durante a discussão final da terceira implementação, um aluno sugeriu uma alteração na sequência de atividades, de modo que os desafios fossem para o início dos encontros, pois, segundo ele, são desafios que despertam o interesse dos estudantes. Ainda segundo esse mesmo estudante, os alunos – mesmo que não compreendam ainda as funções trigonométricas seno e cosseno e a alteração de seus parâmetros – veem-se desafiados e engajados a participar da atividade devido a seus aspectos gamificados. A Figura 39 mostra uma atividade gamificada. Em seguida, apresentamos as respostas dos alunos.

Figura 39: Atividade gamificada


Fonte: Desmos

Gladys West: *Aumentaria o valor máximo e mínimo atingido pela função (de -1 a 3 para -4 a 6)*

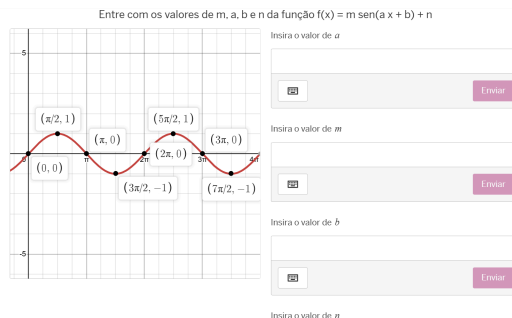
Karlie Noon: *Vai aumentar a amplitude vertical da curva, os pontos de máximos e mínimos ficam mais distantes entre si.*

MC Escher: *Aumentaria a amplitude entre o máximo e mínimo.*

Ao observarmos as respostas desses alunos, podemos ver que o conceito da alteração desse parâmetro foi assimilado por eles. Alguns responderam de forma mais completa, porém

todos entenderam quais seriam as implicações da alteração do parâmetro na função em questão. A Figura 40 mostra a atividade de alteração de parâmetros.

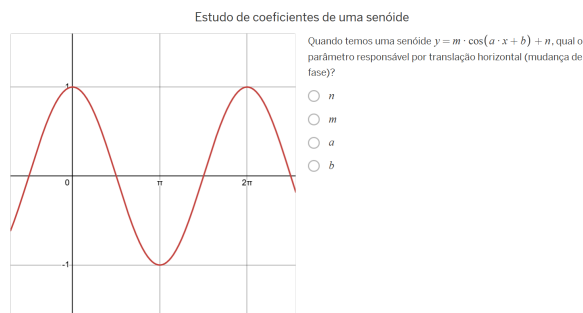
Figura 40: Atividade de alteração de parâmetros



Fonte: Cândido (2023)

Quando questionados sobre os coeficientes da função, a maioria dos alunos assinalou que os coeficientes a e m eram iguais a 1 e b e n eram iguais a zero. A Figura 41 mostra outra atividade de alteração de parâmetros.

Figura 41: Atividade de alteração de parâmetros



Fonte: Cândido (2023)

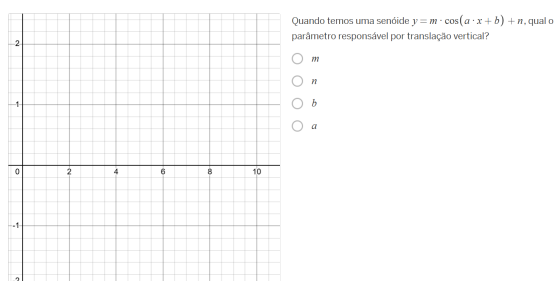
No estudo dos coeficientes da senoide, os alunos deveriam observar o gráfico da função e, em seguida, assinalar o parâmetro que era responsável pela translação horizontal. Nesse sentido, todos os alunos conseguiram chegar à conclusão de que o parâmetro b seria a resposta. Vejamos a seguir algumas respostas dos alunos.

Gladys West: O parâmetro b adiciona unidades ao valor de x , o que "adianta" ou "atrasa" o ciclo da cossenoide.

MC Escher: A letra b que faz essa função pois ela que vai decidir o primeiro ponto de origem da onda no eixo x . O aluno Karlie Noon assinalou a alternativa correta, porém não fez comentários sobre.

A partir dos comentários dos alunos, podemos observar que há o entendimento dos estudantes sobre a variação do parâmetro b . Ainda podemos observar que, intuitivamente, eles tendem a partir da construção da função $f(x) = \sin(x)$ para daí observarem como esse valor irá alterar a função original. Para realizarmos essas conjecturas, notamos então a importância da compreensão das funções originais e suas características. A Figura 42 mostra atividade de alteração de parâmetros.

Figura 42: Atividade de alteração de parâmetros



Fonte: Cândido (2023)

Em relação ao parâmetro responsável pela translação vertical, todos os alunos entendem que o coeficiente n seria a resposta, como aparece nas respostas apresentadas a seguir.

Gladys West: *A função seno atinge apenas valores entre -1 e 1 , e o parâmetro n altera o conjunto imagem da função para $[-1+n, 1+n]$.*

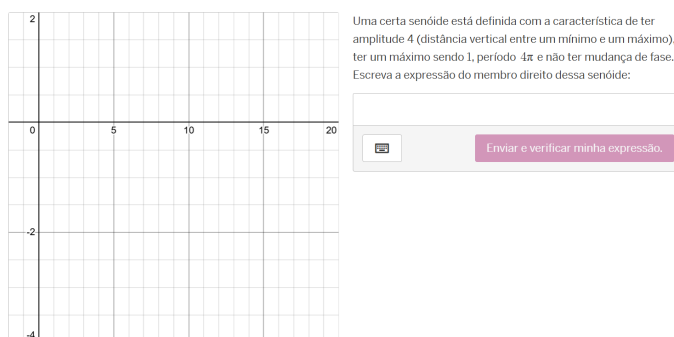
MC Escher: *O parâmetro n mostrará onde a função cruzará o eixo y , determinando a amplitude dos ciclos.*

O aluno Karlie Noon assinalou a alternativa correta, porém não fez comentários sobre sua resposta.

A partir desses depoimentos, podemos observar que o primeiro aluno partiu do fato de que a função canônica $f(x) = \cos(x)$ tem sua imagem limitada no intervalo fechado $[-1, 1]$. Então, a partir desse fato, ele concluiu que, como o parâmetro n estava somando unidades à função original, esse fato alteraria seus extremos, realizando assim uma translação vertical.

O segundo estudante chegou à sua resposta a partir de uma constatação mais visual: ele apresenta a ideia de que o parâmetro n irá alterar a interseção do gráfico com o eixo das ordenadas, porém acaba se equivocando quando afirma que isso determina a amplitude dos ciclos. A Figura 43 mostra uma atividade de alteração de parâmetros.

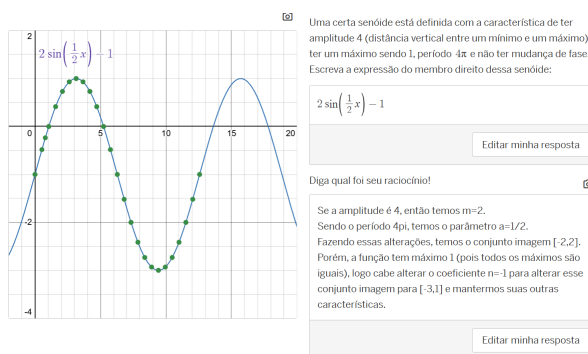
Figura 43: Atividade de alteração de parâmetros



Fonte: Cândido (2023)

Na tarefa mostrada na Figura 43, os alunos deveriam encontrar a expressão que representa a senoide de acordo com as características enunciadas. Vejamos a resolução dos alunos, na Figura 44, na Figura 45 e na Figura 46, seguidas pela transcrição das respostas.

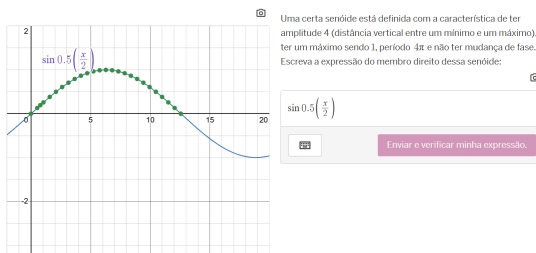
Figura 44: Resolução de Gladys West



Fonte: registro dos educandos

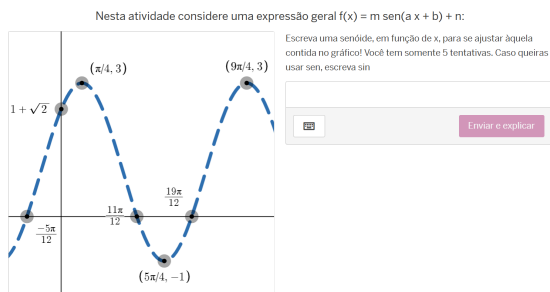
Gladys West: *Se a amplitude é 4, então temos $m=2$. Sendo o período 4π , temos o parâmetro $a=1/2$. Fazendo essas alterações, temos o conjunto imagem $[-2,2]$. Porém, a função tem máximo 1 (pois todos os máximos são iguais), logo cabe alterar o coeficiente $n=-1$ para alterar esse conjunto imagem para $[-3,1]$ e mantermos suas outras características.*

Figura 45: Resolução de Karlie Noon



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 46: Atividade: encontrar a senoide que intercepta os pontos



Fonte: Cândido (2023)

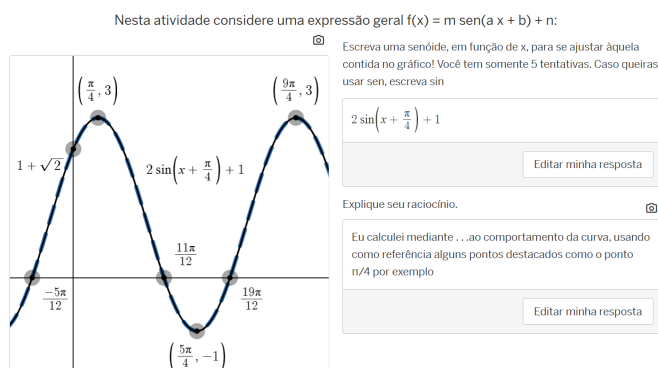
Gladys West: Não houve alteração no período da função, logo $a=1$. Temos que a função atinge seu máximo em $\pi/4$, sendo a função seno com máximo em $\pi/2$. Como $\pi/4 + \pi/4 = \pi/2$, tomamos $b=\pi/4$. Por último, temos que a amplitude é 4, logo temos $m=2$.

Karlie Noon: Eu calculei mediante ao comportamento da curva, usando como referência alguns pontos destacados como o ponto $\pi/4$ por exemplo.

MC Escher: Eu calculei mediante aos valores dados nos máximos e mínimos e onde eles batiam o eixo X no par ordenado.

A conclusão dos três licenciandos foi similar, embora tenham utilizado estratégias diferentes. A Figura 47 exhibe um exemplo da resolução dos estudantes.

Figura 47: Exemplo da resolução dos estudantes



Fonte: elaborada pelo autor

Nas duas últimas questões do Enem propostas como fixação dos conteúdos, os alunos acertaram em maioria a primeira – a segunda foi respondida de maneira correta por apenas dois estudantes. A Figura 48 e a Figura 49 mostram as atividades do Enem.

Figura 48: Atividade do Enem

Questão 6 - ENEM 2015

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é:

☐ Junho

☐ Abril

☐ Julho

☐ Janeiro

☐ Outubro

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P , em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de Janeiro, $x = 2$ ao mês de Fevereiro e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de Dezembro.

Fonte: Cândido (2023)

Figura 49: Atividade do Enem

Questão 7 - ENEM 2010

Um satélite de comunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por

$$r(t) = \frac{5865}{1 + 0,15 \times \cos(0,06 t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores r , no apogeu e no perigeu, representado por S . O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de

☐ 11 730

☐ 5 865

☐ 10 965

☐ 12 765

☐ 12 000

Fonte: Cândido (2023)

Considerações finais

Por meio desta pesquisa foi possível contribuir para o exercício docente com o apoio de tecnologias digitais de geometria dinâmica e interativa. A princípio foram exploradas algumas funcionalidades da plataforma Desmos, buscando assim dialogar com professores e futuros profissionais da educação matemática e instruí-los para manusearem esse recurso.

A plataforma Desmos mostrou-se um recurso com manuseio relativamente simples e o potencial de ser gratuita e intuitiva. Uma desvantagem da plataforma, mesmo com a tradução feita por intermédio do navegador, é a dificuldade de leitura de alguns recursos, visto que algumas partes estão em inglês. Porém, o ambiente do Desmos Sala de Aula apresenta inúmeras possibilidades de criação.

Como próximos passos da pesquisa, podemos destacar a importância do Painel de Controle vinculado ao Desmos, que necessita de uma exploração mais aprofundada. O ambiente mostrou-se bastante útil no que se refere à avaliação e progresso dos educandos, assim como *feedback* imediato. Uma possibilidade então é um aprofundamento maior nesse recurso do Desmos Sala de Aula.

Outro destaque importante é a integração com os recursos Polypad, incluídos na plataforma. Tais recursos, se integrados ao Desmos Sala de Aula, permitem trabalhar conteúdos que vão muito além das funções e da geometria. Sendo assim, é de grande importância que o estudo e a análise desse recurso sejam levados em consideração nos próximos passos da pesquisa.

REFERÊNCIAS

BAIRRAL, Marcelo Almeida. **Discurso, interação e aprendizagem**: matemática em ambientes virtuais a distância. Seropédica: Edur, 2018. 122 p.

CÂNDIDO, José Valério Moreira. **Sala invertida de funções trigonométricas usando a camada de computação do Desmos**. 2023. 38 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Pará, Castanhal, 2023.

COLINVAUX, Dominique. Aprendizagem: as questões de sempre, a pesquisa e a docência. **Ciência em Tela**, Rio de Janeiro, v. 1, n. 1, p. 1-11, jan. 2008. Disponível em: <http://www.cienciaemtela.nutes.ufrj.br/index.html> Acesso em: 13 abr. 2025.

JUNIOR, F. R. S. **Ensino de Funções Trigonométricas com applets**. 2018. 96 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, RJ, 2018.

RODRIGUES, Márcio Urel; MACEDO, Ediel Pereira; SILVA, Luciano Duarte; GONÇALVES, William Vieira. Dupla descontinuidade contínua na formação inicial de professores de matemática: compreensões dos professores de matemática em serviço nas escolas da educação básica. **Tangram - Revista de Educação Matemática**, [S. l.], v. 5, n. 3, p. 189-224, 30 set. 2022. DOI: <http://dx.doi.org/10.30612/tangram.v5i3.12532>

VALENTE, José Armando. A informática na educação no Brasil: análise e contextualização histórica. In: VALENTE, José Armando. **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: Ned/Unicamp, 1999. p. 1-13.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa traz possibilidades de ensinar conceitos da trigonometria por intermédio da plataforma Desmos, cujo uso é novo em trigonometria. Por meio dos artigos gerados, foi possível observar o que se tem investigado em trigonometria e analisar as interações de licenciandos. A pesquisa apresenta relevância ao apontar, por meio de metassíntese, a necessidade de estudos com tecnologias digitais e de ampliação do uso da plataforma Desmos, evidenciando sua implementação e os resultados alcançados. Alguns pontos críticos foram evidenciados, como o público-alvo das pesquisas – o que mostrou poucas pesquisas com público-alvo na formação de professores. Outro ponto são as aplicações das pesquisas: a revisão de literatura demonstrou que a maioria das pesquisas não possuía implementação. Por fim, foi sinalizada a necessidade do uso de outro AGD, por exemplo o Desmos, uma vez que não há pesquisas que referenciam esse recurso digital.

Também foi possível analisar os impactos e os movimentos no ensino de trigonometria, utilizando como recurso o Desmos Sala de Aula e a abordagem de eventos críticos. Além de ressaltar as possibilidades da plataforma Demos como recurso didático para o ensino de matemática, algumas características devem ser destacadas: a plataforma Desmos Sala de Aula oferece recursos inovadores para a aprendizagem dos educandos, e a presença de interatividade, visualização, manipulação ou construção é de extrema importância para a compreensão e construção de significados referentes ao ensino de trigonometria.

A análise evidenciou contribuições e limitações do uso do Desmos no ensino de trigonometria. A contribuição advém de suas características de visualização e manipulação. Como limitações podemos observar a necessidade do acesso à internet e da utilização de dispositivos como *tablets* ou computadores, uma vez que as atividades se mostraram incompatíveis para uso em *smartphones*.

Como sugestões para pesquisas futuras, podem ser analisadas as contribuições do uso do Painel de Controle para avaliação e *feedback* e o uso do Polypad vinculado ao Desmos. O uso do ambiente na formação de professores em exercício também é uma possibilidade. É relevante também propor uma análise comparativa entre as pesquisas e um mapeamento atualizado do Desmos mediante estudos na Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

BAIRRAL, Marcelo Almeida. **Discurso, interação e aprendizagem**: matemática em ambientes virtuais a distância. Seropédica: Edur, 2018. 122 p.

BORBA, Marcelo de Carvalho; CHIARI, Aparecida Santana de Souza. Diferentes usos de tecnologias digitais nas licenciaturas em matemática da UAB. **Nuances: Estudos sobre Educação**, [S. l.], v. 25, n. 2, p. 127-147, 28 nov. 2014. DOI: <http://dx.doi.org/10.14572/nuances.v25i2.2829>

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br> Acesso em: 20 abr. 2025.

CÂNDIDO, José Valério Moreira. **Sala invertida de funções trigonométricas usando a camada de computação do Desmos**. 2023. 38 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Pará, Castanhal, 2023.

COLINVAUX, Dominique. Aprendizagem: as questões de sempre, a pesquisa e a docência. **Ciência em Tela**, Rio de Janeiro, v. 1, n. 1, p. 1-11, jan. 2008. Disponível em: <http://www.cienciaemtela.nutes.ufrj.br/index.html> Acesso em: 13 abr. 2025.

FIGUEIREDO, Ronaldo Lage; PEDROSA, Stella Maria Peixoto de Azevedo. Concepções das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação presentes na BNCC da área de matemática e suas tecnologias. **Em Teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, [S. l.], v. 14, n. 1, p. 262, 5 abr. 2023. DOI: <http://dx.doi.org/10.51359/2177-9309.2023.256901>

FIORENTINI, Dario; CRECCI, Vanessa Moreira. Metassíntese de pesquisas sobre conhecimentos/saberes na formação continuada de professores que ensinam matemática. **Zetetiké**, [S. l.], v. 25, n. 1, p. 164, 30 abr. 2017. DOI: <http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i1.8647773>

JUNIOR, F. R. S. **Ensino de Funções Trigonométricas com applets**. 2018. 96 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, RJ, 2018.

LEITE, Andréa Guimarães. **O estudo de trigonometria e funções trigonométricas com ênfase em metodologias ativas utilizando o GeoGebra**. 2023. 88 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2023.

LOPES, Rinaldo Rufino. **Explorando o movimento harmônico simples para o ensino das funções trigonométricas**: um olhar sobre o uso do GeoGebra no estudo das funções seno e cosseno. 2023. 87 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, 2023.

MUNHOZ, Diego Rodolfo. **Ensino de funções trigonométricas com o auxílio da modelagem matemática e do software GeoGebra**. 2022. 105 f. Dissertação (Doutorado em Matemática) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

MUNIZ, Gabriel dos Santos. **Trigonometria e funções trigonométricas com tecnologias digitais**: uma pesquisa-formação na Licenciatura em Matemática. 2023. 111 f. Dissertação (Mestrado em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2023.

NOVAES, Carolina de Paula Ribeiro. **Funções trigonométricas no Enem com auxílio do GeoGebra**. 2021. 102 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

OLIVEIRA, Eliane Santana de Souza. **Estudo das funções seno e cosseno por meio de um modelo didático alternativo integrado ao Geogebra**. 2020. 318 f. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2020.

PEREIRA, Ângela Eloisa Fernandes; VAZ, Helder Vlademiro Correia. O GeoGebra no estudo de funções trigonométricas a partir da análise gráfica. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, [S. l.], v. 11, n. 2, p. 119-137, 12 nov. 2022. DOI: <http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2022.v11i2p119-137>

POWELL, Arthur B.; FRANCISCO, John M.; MAHER, Carolyn A. Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento das idéias matemáticas e do raciocínio de estudantes. **Bolema**, Rio Claro, v. 17, n. 21, p. 81-140, 2004.

RODRIGUES, Márcio Urel; MACEDO, Ediel Pereira; SILVA, Luciano Duarte; GONÇALVES, William Vieira. Dupla descontinuidade contínua na formação inicial de professores de matemática: compreensões dos professores de matemática em serviço nas escolas da educação básica. **Tangram - Revista de Educação Matemática**, [S. l.], v. 5, n. 3, p. 189-224, 30 set. 2022. DOI: <http://dx.doi.org/10.30612/tangram.v5i3.12532>

SANTOS, Edméa. Pesquisa-formação na cibercultura: fundamentos e dispositivos. In: SANTOS, Edméa. **Pesquisa-formação na cibercultura**. Seropédica: Edufpi, 2019. p. 79-130.

SILVA, Alexander Pires da; BAIRRAL, Marcelo Almeida. Metassíntese: um estudo de revisão de literatura. In: SILVA, Alexander Pires da; BAIRRAL, Marcelo Almeida. **Elaboração e mapeamento de pesquisas com tecnologias**. Porto Alegre: Fi, 2023. p. 243-259.

VALENTE, José Armando. Informática na Educação no Brasil: análise e contextualização histórica. **Núcleo de Informática Aplicada à Educação/Unicamp**, [S. l.], p. 1-13, 1999.

VERGILIO, Joyce dos Santos. **Funções trigonométricas pelo olhar de licenciandos de matemática com o uso do GeoGebra**. 2023. 104 f. Dissertação (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2023.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. Desenvolvimento dos conceitos científicos na infância. *In*: VYGOTSKY, Lev Semenovich. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2001. p. 71-100.

APÊNDICE A

A n o	Título	Tipo de Publicação	Autor	Público Alvo	Objetivo(s)	A p l i c a ç ã o	Autor da Dissertação
2021	Função seno - uma experiência com o software GeoGebra na formação de professores de Matemática	Artigo Publicado em Revista	Loreni Aparecida Ferreira Baldini e Marcia Cristina de Costa Trindade Cyrino	Formação de Professores	Analisar e identificar significados atribuídos por professores para os parâmetros da função Seno para as transformações dos gráficos e para as implicações no domínio, imagem e período das funções decorrentes de alterações nos seus parâmetros.	–	MUNIZ (2023)
2015	O ensino da trigonometria usando o software GeoGebra como ferramenta de ensino-aprendizagem	Dissertação de Mestrado	Eilson Santiago	Educação Básica	melhorar o ensino-aprendizado da trigonometria, especificamente das funções trigonométricas seno e cosseno. Através do GeoGebra como ferramenta para auxiliar a visualização e variação das funções trigonométricas.	✓	VERGÍLIO (2023)
	GeoGebra e o estudo das funções trigonométricas no Ensino Médio.	Dissertação de Mestrado	Denise Mansoldo Salazar	Educação Básica	investigar os processos de ensino e de aprendizagem das funções trigonométricas utilizando recursos educacionais digitais, em especial o GeoGebra	✓	VERGÍLIO (2023)
	Uma Proposta de Estudo de Funções Trigonômicas e Suas Inversas Através do GeoGebra	Dissertação de Mestrado	Leila Maria Salomão de Souza	Educação Básica	apresentar uma proposta de estudo de funções trigonométricas com o uso de construções dinâmicas com o uso do GeoGebra	✓	VERGÍLIO (2023)
	As novas tecnologias no contexto escolar: Uma abordagem sobre aplicações do GeoGebra em trigonometria	Dissertação de Mestrado	Jander Carlos Silva e Silva	Educação Básica	Contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno por meio do ensino de Matemática agregando a utilização de tecnologia, neste caso, o software GeoGebra, de forma que o aluno não seja somente um espectador, mas sim, participante da construção da própria atividade	✓	VERGÍLIO (2023)
	Funções trigonométricas e números complexos: uma	Artigo Publicado em Revista	Reinaldo Oliveira Reis Júnior e Ednailton	Educação Básica	Apresentar uma Sequência Didática sobre a organização dos conceitos de Trigonometria que servem de referência para a exploração de	–	MUNIZ (2023)

	abordagem possível na Educação Básica		Santos Silva		propriedades no conjunto dos números complexos.		
	Modelagem trigonométrica de cálculo de distâncias usando GeoGebra	Artigo Publicado em Revista	Reinaldo Oliveira Reis Júnior e Afonso Henriques	Educação Básica	Destacar as características dinâmicas dos fenômenos inerentes ao problema, fornecendo assim, subsídios para o ensino e aprendizagem da Trigonometria mediado pelas ferramentas tecnológicas na Educação Básica.	–	MUNIZ (2023)
206	Trigonometria e Funções Trigonômicas, uma abordagem didático metodológica	Dissertação de Mestrado	Andre Luiz dos Santos Ferreira	Formação de Professores	Fortalecer uma abordagem da trigonometria de forma mais significativa e apresentar uma sequência didática para ser aplicada com a possibilidade de utilizar o GeoGebra	–	VERGÍLIO (2023)
	Trigonometria: Um estudo teórico e seu ensino em sala de aula com o auxílio do software GeoGebra	Dissertação de Mestrado	Glaucia Maria Queiroz de Freitas	Educação Básica	desenvolver um estudo contextualizado, priorizando as aplicações com o uso de recursos tecnológicos e problemas como o GeoGebra, valendo dos conhecimentos prévios dos alunos, como ângulos, razão e proporção, relações métricas num triângulo retângulo, semelhança de triângulos, Teorema de Pitágoras e outros, dando um maior significado à sua aprendizagem	✓	VERGÍLIO (2023)
	Ensino-aprendizagem de funções trigonométricas através do software GeoGebra aliado à Modelagem matemática	Dissertação de Mestrado	Enaldo Vieira de Melo	Educação Básica	Usar o software GeoGebra como um recurso computacional que venha otimizar os processos de ensino-aprendizagem de funções trigonométricas; utilizar a Modelagem Matemática como uma metodologia de ensino para as funções seno e cosseno; que os discentes compreendam o comportamento de cada um dos parâmetros a, b, c e d nas funções	✓	VERGÍLIO (2023)
	Propostas para o ensino da trigonometria: Introdução à aproximações de funções periódicas por polinômios trigonométricos	Dissertação de Mestrado	Suellen Karina Palhano Iochucki	Educação Básica	Apresentar algumas propostas para o ensino-aprendizagem de trigonometria com base em aplicações em diferentes áreas do conhecimento e nas TIC (tecnologia da informação e comunicação).	–	VERGÍLIO (2023)
207	Estudo de Funções Trigonômicas em dois	Dissertação de Mestrado	Helder Lima Silva	Educação Básica	pesquisar os saberes matemáticos no 2º ano do Ensino Médio acerca de Funções Trigonômicas e suas relações com o som enquanto fenômeno natural que favorecem a contextualização, a	✓	VERGÍLIO (2023)

	ambientes de aprendizagem no ensino médio				representação destas funções em diferentes registros e analisar as práticas institucionais dos alunos do 3º ano do Ensino Médio em torno desses saberes, utilizando os ambientes papel/lápis e computacional GeoGebra, bem como o aplicativo DaTuner		
	Um estudo sobre a execução de sons e criação de músicas no software GeoGebra	Artigo Publicado em Revista	Lucas Teixeira da Silva, Claudia Lisete Oliveira Groenwald, Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa	—	Um estudo no software GeoGebra sobre a execução de sons a partir de funções trigonométricas e a criação de músicas através de instrumentos e notas musicais pré-programadas, relacionando a Matemática, a Música e a Física do Som,	—	MUNIZ (2023)
2018	Ensino de Funções Trigonômicas com applets	Dissertação de Mestrado	Flavio Ribeiro De Souza Junior	Formação de Professores	apresentar um GeoGebra Book com uma proposta de atividades para o ensino das Funções Trigonômicas associadas ao ciclo trigonométrico por meio da manipulação de tecnologias digitais, mais especificamente, de Applets criados com o auxílio do GeoGebra.	—	VERGÍLIO (2023)
	Uma sequência didática para o ensino de Funções Trigonômicas: Uma investigação sobre as contribuições do GeoGebra	Dissertação de Mestrado	Tatiane Ferreira Da Silva	Educação Básica	investigar em que medida a aplicação de uma sequência didática, elaborada na perspectiva da Engenharia Didática, com o auxílio do GeoGebra, pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de funções trigonométricas	✓	VERGÍLIO (2023)
	Ensino e aprendizagem da trigonometria com o auxílio do software GeoGebra	Artigo Publicado em Revista	Reinaldo Oliveira Reis Júnior, Eduardo Delcides Bernardes, Matheus dos Santos Reis.	Educação Básica	Elaboração de uma Sequência Didática (SD) para o ensino de trigonometria com o GeoGebra.	—	MUNIZ (2023)
	Estudo da Trigonometria no 11º Ano Com Recurso ao Software GeoGebra	Artigo Publicado em Revista	Crisolita Sousa de Brito, Dirce Henriques da Luz, João Emanuel Almeida Duarte.	Formação de Professores	Apresentar uma proposta aos professores para o estudo da trigonometria no 11º ano de escolaridade com auxílio do software GeoGebra, fazendo uso do material informático disponível nas salas de aula, e nas salas de informática disponíveis nas escolas	✓	MUNIZ (2023)
2	O uso do	Dissertação de	Carlos	-----	Sem Acesso	—	—

0 1 9	GeoGebra no ensino das Funções Trigonométricas no 2º ano do ensino médio no IFMT campus Cuiabá	Mestrado	Carlão Pereira do Nascimento				
	A interatividade do GeoGebra no auxílio da compreensão da trigonometria	Dissertação de Mestrado	Jairo Renato Araújo Chaves	Educação Básica	O uso do GeoGebra contribui para a compreensão pelos alunos sobre conceitos básicos das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, bem como das Funções Seno, Cosseno e Tangente?	✓	VERGÍLIO (2023)
	Funções Trigonométricas com o auxílio do GeoGebra.	Dissertação de Mestrado	Tiago Bezerra Da Costa	Educação Básica	Potencializar o aprendizado de alunos da rede estadual de São Paulo através do caderno de atividades do aluno e do software GeoGebra	✓	VERGÍLIO (2023)
	Música e Funções Trigonométricas: Uma abordagem interdisciplinar	Dissertação de Mestrado	Mayck Gomes Marvila	Educação Básica	investigar se a abordagem da relação entre música e matemática no estudo de funções trigonométricas pode contribuir para o estudo de funções trigonométricas numa turma do Ensino Médio	✓	VERGÍLIO (2023)
	Funções Trigonométricas ou Função Trigonométrica: Uma análise histórica e institucional no Ensino Médio	Dissertação de Mestrado	Leticia Santos Meneses	Educação Básica	Realizar uma análise epistemológica e institucional de referência visando a organização de uma Sequência Didática sobre Funções Trigonométricas, que possa ser útil na análise de praxeologias de alunos no Ensino Médio.	—	VERGÍLIO (2023)
	O GeoGebra no estudo das funções trigonométricas: uma experiência em um minicurso com alunos do 2o ano do Ensino Médio	Artigo Publicado em Revista	Lúcia Helena Costa Braz, Gustavo Teixeira de Castro, Patrick Macêdo Oliveira.	Educação Básica	Apresentar resultados de uma experiência com o uso de tecnologias no ensino de Matemática na Educação Básica	✓	MUNIZ (2023)
	Variação de Soluções na Geometria com a utilização do GeoGebra	Artigo Publicado em Revista	Marcos Paulo Mesquita da Cruz e Ivan de Oliveira Holanda Filho.	Educação Básica	Tratar uma solução alternativa oficial para a questão da Obmep do ano de 2017 primeira fase, nível três com assistência do software GeoGebra na construção das figuras.	—	MUNIZ (2023)
2 0 2 0	Funções Trigonométricas e aplicações: Uma proposta	Dissertação de Mestrado	John Nathan Pereira de Carvalho	Educação Básica	elaborar uma proposta didática que possa dar suporte aos professores para lecionar o conteúdo de funções trigonométricas no Ensino Médio, levando em consideração as Competências e	—	VERGÍLIO (2023)

	didática para o Ensino Médio usando o GeoGebra				Habilidade da Base Nacional Comum Curricular – BNCC e as avaliações nacionais de aprendizagem, ENEM e SAEB, atendendo anseios conhecidos e discutidos aqui anteriormente e oferecendo um passeio pelas seguintes tendências: História da Matemática, Recursos Tecnológicos e Resolução de Problemas.		
	GeoGebra: Uma proposta para o ensino de Funções Trigonométricas	Dissertação de Mestrado	Maxiel De Mesquita Machado	Educação Básica	contribuir com o ensino e a aprendizagem da trigonometria e com a prática de professores de matemática, que nas últimas décadas vem recebendo muitas críticas em decorrência do baixo rendimento apresentado por alunos em diversos níveis de ensino.	—	VERGÍLIO (2023)
	Estudo das funções seno e cosseno por meio de um modelo didático alternativo integrado ao GeoGebra.	Tese de Doutorado	Eliane Santana de Souza Oliveira	Formação de Professores	analisar como um modelo alternativo com o uso do GeoGebra favorece o estudo das funções seno e cosseno	✓	VERGÍLIO (2023)
	Estudo das funções trigonométricas com o uso do software GeoGebra: uma experiência com calouros do curso de engenharia elétrica	Artigo Publicado em Revista	Gustavo Teixeira de Castro, Suélem Costa Braz, Lucia Helena Costa Braz.	Ensino Superior	Apresentar resultados obtidos em uma experiência que envolveu o uso de tecnologias no ensino de Matemática em uma turma de calouros do curso de Engenharia Elétrica.	✓	MUNIZ (2023)
2021	GeoGebra e o ensino de Funções Trigonométricas: Percepções dos estudantes do ensino médio	Dissertação de Mestrado	Fernanda dos Santos Garcia	Educação Básica	Compreender as percepções dos estudantes sobre o uso do software GeoGebra para o estudo das funções trigonométricas.	✓	VERGÍLIO (2023)
	Funções trigonométricas no ENEM com auxílio do GeoGebra.	Dissertação de Mestrado	Carolina de Paula Ribeiro Novaes	Formação de Professores	apresentar aos professores do Ensino Médio que o estudo das Funções Trigonométricas, um tema tão relevante no ENEM, não precisa ser um assunto de difícil compreensão, podendo ser trabalhado de forma interdisciplinar com outras áreas do conhecimento e não exclusivamente com a Matemática, além de poder ser trabalhado com a ajuda da tecnologia digital	—	VERGÍLIO (2023)
2022	Ensino de funções trigonométricas com o auxílio da modelagem	Dissertação de Mestrado	Diego Rodolfo Munhoz	Formação de Professores	servir de apoio para o professor do Ensino Médio que vai ministrar aulas de funções trigonométricas, assunto esse, que é dado como complicado pela maioria dos alunos, o que gera a perda de interesse no aprendizado.	—	VERGÍLIO (2023)

	matemática e do software GeoGebra						
	O GeoGebra no Estudo de Funções Trigonômétricas a partir da Análise Gráfica	Artigo Publicado em Revista	Ângela Eloisa Fernandes Pereira e Helder Vlademiro Correia Vaz.	Educação Básica	Familiarizar os alunos com as ferramentas básicas do GeoGebra; Explorar os diferentes recursos e ferramentas do software GeoGebra, para a construção de objetos geométricos; Procurar analisar como se desenvolve a aprendizagem dos alunos em Trigonometria a partir de um conjunto de tarefas exploratórias com recurso ao GeoGebra; Estabelecer conjecturas entre os objetos construídos através de manipulação; Analisar graficamente as funções seno, cosseno e tangente; Desenvolver a capacidade de comunicação, raciocínio e resolução de problemas.	✓	VERGÍLIO (2023)
2 0 2 3	O Estudo de Trigonometria e Funções Trigonômétricas com Ênfase em Metodologias Ativas utilizando o GeoGebra	Dissertação de Mestrado	Andrea Guimaraes Leite	Educação Básica	propor um produto educacional, GeoGebrabook, a fim de fornecer, tanto para o professor quanto para o aluno, um material completo para o estudo de Trigonometria e Funções Trigonômétricas, baseado em Metodologias Ativas, Educação Matemática Crítica e Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs), através de applets, que possibilitam um aprendizado mais dinâmico, fazendo com que o aluno seja parte principal do processo de ensino e aprendizagem, enquanto o professor desempenha o papel de mediador nesse contexto educacional.	—	contribuição do autor
	Explorando o Movimento Harmônico Simples no Ensino das Funções Trigonômétricas: Uma Perspectiva sobre o Uso do GeoGebra no Estudo das Funções Seno e Cosseno	Dissertação de Mestrado	Rinaldo Rufino Lopes	Educação Básica	Buscar propiciar a estudantes e professores do 2º ano do Ensino Médio uma alternativa didática ao ensino-aprendizagem de funções trigonométricas, em especial o seno e o cosseno, voltada à utilização dos recursos de GD presentes no software GeoGebra, empregando como fator motivacional a interdisciplinaridade com o MHS,	✓	Contribuição do autor

APÊNDICE B

Trigonometria no Desmos em aula online e/ou presencial

Uma proposta de ambiência

Mateus Ágape Guerrão Lourenço

Marcelo Almeida Bairral



PPGEdu**CIMAT**

Resumo

O presente artigo surge a partir de uma pesquisa realizada no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Inicialmente é feita uma discussão sobre o uso de tecnologias digitais aliado ao ensino de matemática. Em seguida, o texto dedica-se a ambientar o leitor no espaço virtual conhecido como Desmos Sala de Aula, que faz parte da plataforma Desmos e permite a criação de atividades para sala de aula. Ao destacar algumas funcionalidades do Desmos Sala de Aula, espera-se contribuir para a formação continuada de professores de matemática bem como para a expansão de recursos tecnológicos que podem ser fortes ferramentas para a área de Ensino de Matemática. Finaliza-se apresentando a proposta de atividades no Desmos Sala de Aula, que foi aplicada em uma turma de Ensino de Matemática II do curso de Licenciatura em Matemática da UFRRJ.

Palavras-chave: tecnologias digitais; ensino de matemática; Desmos Sala de Aula; formação continuada.

Sumário

01. Introdução	3
02. Navegação na plataforma Desmos	4
03. As Tarefas	10
04. Dos Conceitos de Trigonometria	24
05. Considerações Finais	49
06. Referências	50

01. Introdução

Como já é notório, os recursos digitais são cada vez mais utilizados no ensino de matemática. Em uma sociedade que está cada vez mais munida das mais diversas tecnologias de informação e comunicação, no âmbito escolar não seria diferente. Nesse sentido, buscamos encontrar caminhos, contextualizando tais considerações sobre o ensino de matemática com o apoio de tecnologias digitais. Para tal, definimos como objetivos apresentar uma ambiência na plataforma Desmos¹, especificamente na área denominada Desmos Sala de Aula, com o foco na formação de professores de matemática; destacar suas funcionalidades; e propor uma sequência de tarefas para o ensino de trigonometria, a fim de contribuir para o ensino de matemática com o uso de tecnologias digitais.

Para dissertar sobre o ensino e aprendizagem mediante o uso de tecnologias digitais, devemos definir que um ambiente virtual com potencial de aprendizagem necessita proporcionar trocas entre os indivíduos com a finalidade de construir determinado conhecimento. Desde que a sua utilização proporciona interação entre determinado grupo, a construção de certo conhecimento por meio de certas atividades é um objetivo comum (Bairral, 2018).

As tecnologias digitais inseridas no contexto de ensino e aprendizagem determinam uma série de mudanças na prática pedagógica, as quais o professor deve desempenhar. Valente (1999, p. 12) afirma:

Deve-se criar condições para que o professor saiba recontextualizar o aprendizado e a experiência vividas durante a sua formação, para a sua realidade de sala de aula compatibilizando as necessidades de seus alunos e os objetivos pedagógicos que se dispõe a atingir.

Nesse contexto, constatamos que essas mudanças devem ser consideradas, já que se relacionam diretamente com a forma como se aprende e o modo como a informação trafega.

Trata-se de uma pesquisa qualitativa e de campo, contextualizada em uma turma de Ensino de Matemática II da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ) e realizada com oito educandos.

¹ A plataforma Desmos pode ser acessada em: <https://www.desmos.com/?lang=pt-BR>

02. Navegação na plataforma Desmos

Inicialmente convém ao leitor ser orientado sobre algumas funcionalidades da plataforma. Ela consiste em uma plataforma que possui recursos voltados para o ensino de matemática, como a calculadora gráfica, a calculadora científica, a calculadora das quatro operações, a calculadora de matrizes, a ferramenta de geometria e uma calculadora 3D.

Todos os seus recursos são gratuitos em sua totalidade e de livre utilização pelo professor. É possível também fazer o acesso por meio do smartphone e do tablet, porém é mais recomendável utilizar tablets ou computadores de mesa, já que a visualização e algumas funcionalidades – ao usar o smartphone – podem ser prejudicadas em algumas atividades, de acordo com a própria plataforma Desmos. A Figura 1, a seguir, mostra a tela inicial da plataforma Desmos.

Figura 1: Tela Inicial



Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

Na tela inicial, o usuário deve descer o cursor e encontrar o ícone “Procurando Desmos Classroom?” – então, deve acessar como professor. A Figura 2 mostra o ícone mencionado.

Figura 2: Desmos Sala de Aula

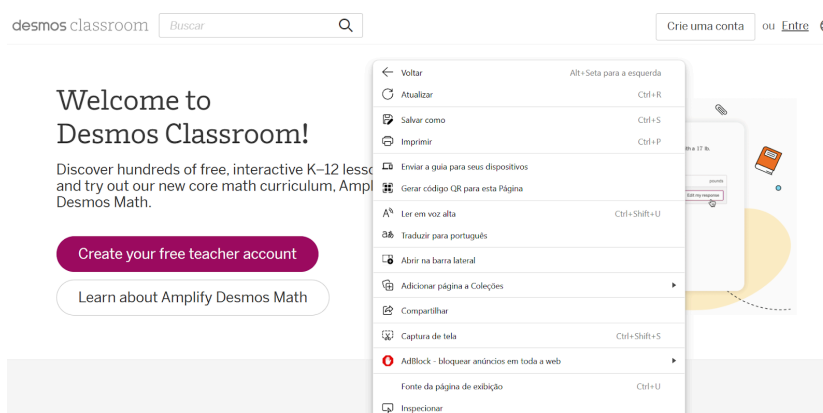


Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

O usuário deve, então, clicar com o botão direito do *mouse* sobre a página, em uma região com a ausência de um *hiperlink*, para então selecionar a opção “Traduzir para o Português”, pois alguns recursos são apresentados em inglês.

Feito isso, o usuário deve clicar em “entrar” e acessar sua conta, utilizando sua conta Google. A Figura 3 mostra a tela inicial do Desmos Sala de Aula.

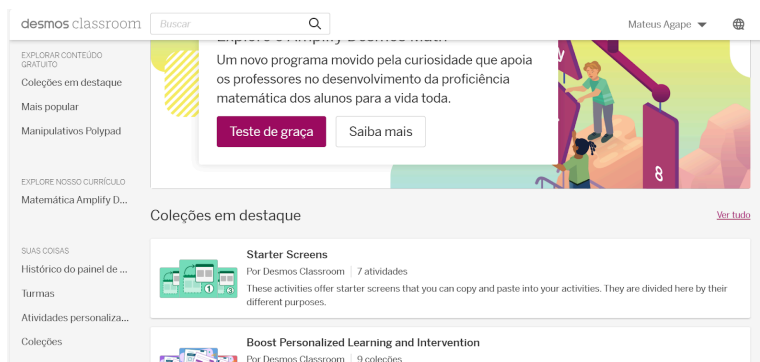
Figura 3: Tela inicial do Desmos Sala de Aula



Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

Após fazer o acesso, o usuário será direcionado a uma tela que permitirá acessar conteúdos da plataforma – prontos e gratuitos –, explorar o currículo Desmos e acessar seus conteúdos criados e suas turmas. Assim, vamos apresentar cada uma dessas opções separadamente. A Figura 4 mostra as funcionalidades do Desmos Sala de Aula.

Figura 4: Funcionalidades do Desmos Sala de Aula



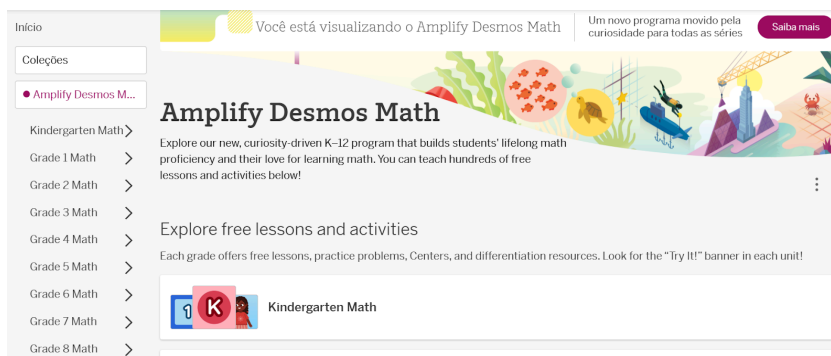
Fonte: elaborada pelo autor a partir do site Desmos

Explorar Conteúdo Gratuito: Nesta seção, o usuário terá acesso às coleções em destaque, ou seja, atividades organizadas por ano de ensino ou por área da matemática, como cálculo, álgebra, funções e Polypads² manipuláveis.

Em “Mais popular”, terá os conteúdos mais utilizados pelos usuários do Desmos. E em “Manipulativos Polypad” contará com recursos que se assemelham aos materiais concretos, mas de forma digital.

Explore Nosso Currículo: A Figura 5, a seguir, mostra o Currículo Desmos

Figura 5: Currículo Desmos



Fonte: elaborada pelo autor a partir do site Desmos

Nesse espaço, o Desmos prepara atividades alinhadas aos conteúdos de seu currículo, propondo sequências didáticas separadas em aulas para trabalhar cada conteúdo de cada série.

² O Polypad pode ser acessado no link: <https://polypad.amplify.com/>

Avaliação, Criação e *Feedback*

A Figura 6 apresenta o histórico de painéis de controle.

Figura 6: Histórico dos painéis de controle

Histórico de painéis

Ver painéis arquivados

Filtrar por turma

ATIVIDADE	SESSÕES	ALUNOS	DATA
 Atividade 4	Ensino de Matemática II 2024.1	7 de 9	20 de mar. de 2024 às 16:17 Painel de controle
 Atividade 3	Ensino de Matemática II 2024.1	8 de 9	13 de mar. de 2024 às 10:09 Painel de controle
 Atividade 1	Ensino de Matemática II 2024.1 II Pausado	8 de 9	29 de fev. de 2024 às 12:25 Painel de controle

Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

No painel de controle, o usuário pode analisar o progresso dos estudantes, suas respostas e suas interações com a plataforma, referentes a atividades pausadas ou não. Nesse contexto, podemos afirmar que esse é o espaço destinado à avaliação e ao *feedback* dos processos cognitivos dos educandos. A Figura 7 mostra o painel de controle do Desmos.

Figura 7: Painel de controle do Desmos

← Ensino de Matemática II 2024.1... 0 / 9 alunos transferir para a aula

Prints 14

Resumo

Professor

Aluno

Anônimo Rítmo Sincronizar comigo Pausar

ORDENAR POR Hora inserido

1 Coleteia

2 Fixe isso

3 Reiniciar

4 Fixe isso

5 Fixe isso

6 Fixe isso

7 Preview...

8

Seki Takakazu	✓	—	✓	✓	✓	●	●
Elbert Frank Cox	✓	—	✓	✓	✓	●	●
Euphemia Lofton Haynes	✓	✓	—	✓	✓	●	●
Srinivasa Ramanujan	✓	—	✓	✓	✓	●	●
John Urschel	✓	✓	—	✓	✓	●	●
Erica Walker	✓	✓	—	✓	✓	●	●
Maryam Mirzakhani	✓	—	✓	✓	✓	●	●

Alunos que ainda não começaram a atividade não são exibidos. Desative o anonimato para ver sua lista completa.

Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

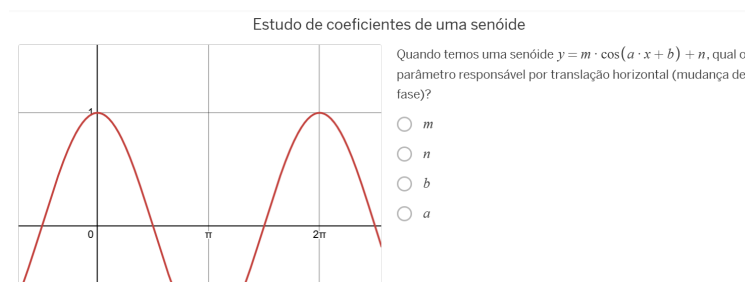
O painel de controle do Desmos é uma ferramenta da plataforma que permite ao professor acompanhar em tempo real o andamento das atividades realizadas pelos educandos.

Na aba Resumo, o professor tem acesso, de forma anônima ou não – basta ativar ou desativar o modo anônimo no canto superior esquerdo –, ao painel geral de todas as atividades, que permite saber quais alunos fizeram as atividades e quais atividades foram feitas. Na horizontal encontram-se as atividades organizadas em *slides*; na vertical, os nomes dos estudantes.

Na aba Aluno, o professor terá acesso às atividades direcionadas aos educandos.

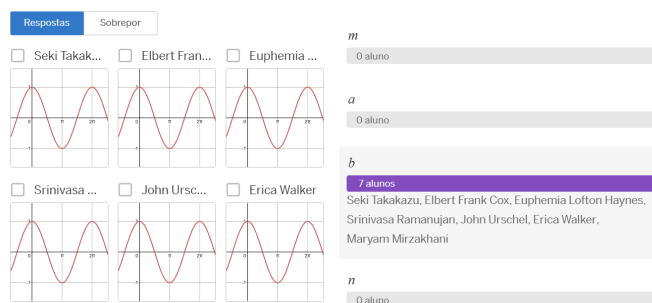
A Figura 8 mostra a aba Aluno do painel de controle. A Figura 9, em seguida, mostra a aba Professor.

Figura 8: Aba Aluno do painel de controle



Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

Figura 9: Aba Professor do painel de controle

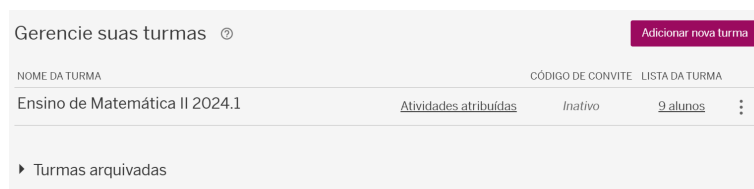


Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

Na aba Professor, estarão as respostas dos educandos. Nela, o professor terá acesso à interação que cada aluno teve com a atividade, a manipulação que realizou,

seu depoimento e a opção que selecionou. A Figura 10 mostra a área onde o professor pode acessar suas turmas cadastradas.

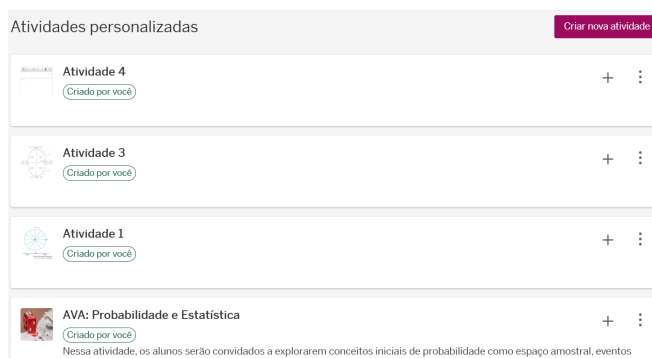
Figura 10: Turmas



Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

Na parte das turmas, o professor terá a possibilidade de adicionar uma turma, ver suas turmas existentes, os alunos que estão cadastrados em cada turma, adicionar novos alunos e verificar as atividades que foram atribuídas. Para adicionar uma nova turma, o professor tem a opção de importar uma turma do Google Classroom – para atribuir atividades conta-se também com essa integração. A Figura 11 mostra atividades personalizadas.

Figura 11: Atividades personalizadas



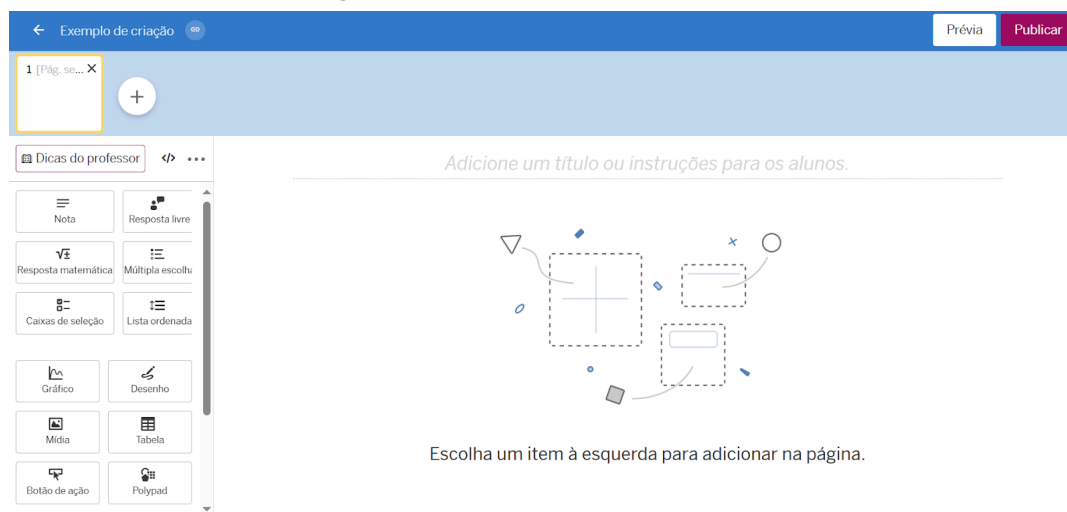
Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

Atividades personalizadas são atividades construídas pelo usuário. Nessa aba, também é possível criar uma nova atividade. Esse recurso é de extrema relevância na plataforma e apresenta-se como um diferencial, juntamente com o painel de controle. A seguir faz-se necessária a exploração da aba de criação de novas atividades.

A aba de criação da plataforma Desmos conta com diversas ferramentas. Na Figura 12, a seguir, serão apresentados alguns de seus recursos. Primeiramente, podemos observar o botão “dicas do professor”. Por meio dele, o professor pode acrescentar dicas e orientações aos professores que utilizarão a atividade. Também é possível adicionar dicas aos estudantes e exemplos de respostas.

As atividades são construídas em um modelo semelhante a *slides* interativos – assim, cabe ao professor fazer a elaboração de cada *slide*, seguindo a ideia da aula que pretende criar.

Figura 12: Aba de criação Desmos Sala de Aula



Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

No canto esquerdo da tela, observamos alguns dos recursos existentes. Nesse contexto, o professor pode criar atividades utilizando esses recursos. Existem infinitas possibilidades de criação, além da possibilidade de copiar e colar algum *slide* das atividades já existentes nas coleções da plataforma Desmos. Portanto, recomendamos que, como em qualquer ambiente pedagógico ou *software* educacional, o professor se permita explorar as opções, encontrando assim a melhor forma de incorporar o recurso digital às suas aulas.

03. As Tarefas

As tarefas aqui propostas foram desenvolvidas no contexto de uma dissertação de mestrado, que possui como produto final uma sequência de tarefas para uso de professores de matemática. Foram produzidas três tarefas, explicadas a seguir.

As tarefas propostas foram adaptações das atividades sugeridas por Cândido (2023). Ao trazermos as tarefas para o modelo presencial, conservamos as suas características mais interativas e manipulativas, acrescentando outras características interativas gamificadas disponíveis na própria plataforma Desmos.

Por fim, outro recurso mantido da pesquisa de Cândido foi o de utilizar questões do Enem sobre o assunto, porém elas foram diluídas ao longo dos encontros. Tal recurso se torna interessante, visto que na prática dos futuros docentes esses exercícios serão comuns.

As tarefas estão disponíveis de forma pública e gratuita na plataforma Desmos.

A primeira tarefa tem como objetivo conhecer o público da pesquisa, no caso os estudantes de Licenciatura em Matemática matriculados na turma de Ensino de Matemática II da UFRRJ.

Inicialmente, os graduandos foram perguntados sobre seu nome, idade e período da graduação no qual se encontram. Os alunos foram questionados sobre sua participação em projetos, ao longo da graduação. Tal pergunta foi direcionada devido ao grande potencial de enriquecimento da prática docente que esses projetos possuem³ e está apresentada na Figura 13.

A segunda tarefa concentrou-se em uma sequência de atividades interativas que possuía construções interativas, juntamente com explicações teóricas dos conteúdos de ciclo trigonométrico e funções trigonométricas (seno e cosseno). Para a realização da

³ A atividade pode ser acessada no endereço:
<https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/65d37088a720a7f67bceadfa?lang=pt-BR>

atividade, os estudantes utilizaram unicamente *tablets*, já que a própria plataforma Desmos disponibiliza espaço apropriado para registrarem suas respostas.

A escolha dos *tablets*, como já dissemos, deu-se por conta da visualização mais clara das construções – a visualização foi prejudicada na primeira implementação, quando os estudantes utilizaram seus próprios *smartphones*. Após interagirem com essas construções, os alunos deveriam resolver tarefas – e podiam utilizar as próprias construções como material de apoio.

Para situar o leitor, a primeira página da tarefa consistia em uma explicação sobre o ciclo trigonométrico. Essas atividades mais explicativas vieram da necessidade – sinalizada pelos alunos participantes da pesquisa – de retomar os conteúdos formais relacionados aos estudos⁴.

Por fim, a última atividade proposta é fruto de algumas tarefas interativas presentes na plataforma Desmos e foi alinhada com alguns recursos produzidos por Cândido. Foram propostas tarefas gamificadas e tarefas sobre a alteração dos parâmetros, caracterizando assim a implementação como mais prática do que a anterior. Inicialmente, os alunos deveriam resolver desafios gamificados retirados da própria plataforma para a implementação. A atividade consistia em alterar os parâmetros de uma função trigonométrica a fim de lançar bolas do alto para coletar estrelas. Mais adiante, neste artigo, apresentamos alguns dos desafios propostos nas tarefas do Desmos.

a. DESIGN DA AMBIÊNCIA

DO PERFIL DOS ESTUDANTES

Na primeira sequência de tarefas, os licenciandos foram convidados a acessar a plataforma Desmos a fim de se familiarizar com ela. Nesse momento, os alunos

⁴ A atividade pode ser acessada no endereço:
<https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/65da2ddab46943738ae839aa?lang=pt-BR>

cumpriram a atividade de forma assíncrona com interações por meio do Whatsapp para instruções e soluções de dúvidas ou dificuldades de manuseio.

Inicialmente, os graduandos foram perguntados sobre seu nome, idade e período da graduação no qual se encontravam. No Quadro 1 serão apresentadas as respostas e os nomes fictícios – a fim de preservar a real identidade dos graduandos –, gerados pela própria plataforma Desmos.

Figura 13: Tela Inicial da Primeira atividade na plataforma



Fonte: elaborada pelo autor

Quadro 1: Idade dos educandos e período do curso

Nome	Idade (anos)	Período
Ami Radunskaya	26	7º
Abraham Nemeth	28	12º
Nalini Joshi	28	13º
Gladys West	29	6º
Erika Camacho	25	13º
Maryam Mirzakhani	27	13º
Karlie Noon	31	12º
MC Escher	24	10º

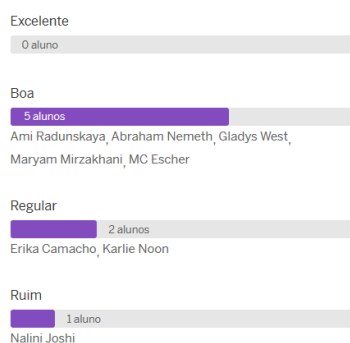
Fonte: elaborado pelo autor

Por meio dessas informações, podemos observar que todos os estudantes se encontram na etapa final da graduação, visto que a disciplina é uma disciplina alocada nos últimos períodos da graduação.

Em seguida, na Figura 14 mostramos as respostas dos alunos para a pergunta sobre o modo como avaliam sua trajetória acadêmica no ensino de matemática da educação básica.

Figura 14: Gráfico resultados trajetória acadêmica

Como você avalia sua trajetória na Matemática na educação básica?



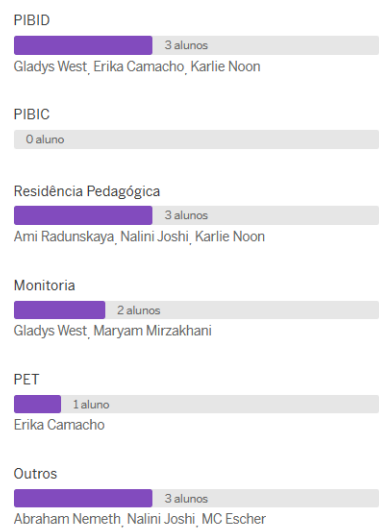
Fonte: elaborada pelo autor

Nessa análise, podemos ver que a maioria dos alunos (cinco alunos de oito no total) avalia que seu contato com a matemática foi bom.

Na Figura 15, organizamos as respostas dos alunos para a questão sobre sua participação em projetos, ao longo da graduação. Tal pergunta foi direcionada devido ao grande potencial de enriquecimento da prática docente que esses projetos possuem.

Figura 15: Gráfico resultados projetos acadêmicos

Durante o curso, participou de projetos? Selecione quais.



fonte: elaborado pelo autor

Foi possível observar a grande adesão dos alunos aos projetos de extensão e de docência. Em seguida os alunos descreveram como foi essa participação. Organizamos essas respostas no Quadro 2, a seguir.

Quadro 2: Depoimentos dos educandos referentes à participação em projetos

Durante o curso, participou de projetos? Caso tenha participado, descreva como contribuiu para sua formação.	
Nome	Resposta

Ami Radunskaya	No momento eu estou participando da Residência Pedagógica e este é o meu primeiro semestre na escola. Acredito que tem contribuído por poder acompanhar o professor e fazer o planejamento de algumas atividades que ele sugere para aplicarmos.
Abraham Nemeth	Não cheguei a participar de projetos da universidade, como aluno precisei dar aulas particulares e trabalhar aos finais de semana para poder complementar minha renda familiar e logo cedo tive que entrar para o mercado de trabalho.
Nalini Joshi	Foi simplesmente enriquecedor.
Gladys West	A monitoria foi fundamental para que eu percebesse que me sentia bem fazendo parte do aprendizado de outras pessoas Com o PIBID, tenho aprendido muito sobre os deveres e responsabilidades de um professor, e também sobre como é importante planejarmos bem nossa atuação dentro de sala de aula
Erika Camacho	PET me ajudou a desenvolver atividades e pensar como usá-las nas escolas, pibid está me ajudando a perder o medo da sala de aula, testar meus conhecimentos como professor
Maryam Mirzakhani	A monitoria a qual eu participei de maneira formal foi da disciplina de Desenho Técnico, do departamento de Arquitetura e Urbanismo, o que não tem diretamente a ver com o nosso curso, mas que posso afirmar com toda a certeza que muito me ajudou a melhorar minhas habilidades de ensino e aprendizagem, e posso dizer que a matemática me ajudou muito nessa disciplina. De maneira não oficial eu ofereci por conta própria, monitorias de Matemática 1 e 2, e Cálculo 1 para alguns alunos que apresentavam dificuldades nas disciplinas, alunos esses que eu acabei conhecendo durante as monitorias de Desenho Técnico.
Karli e Noon	Esses dois programas me permitiram desenvolver uma visão mais delicada em relação ao ensinar. Aprendi que há outras ferramentas úteis além do quadro e giz que podem

	contribuir para um bom entendimento.
MC Escher	Bolsista ProExt de Audiovisual. Para Matemática não muita coisa, mais para o meu trabalho atual onde tiro meu sustento

Fonte: elaborado pelo autor

Nessa etapa da pesquisa, foi possível constatar o modo como os projetos de extensão (PET) e de docência – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), Residência Pedagógica e Monitoria – contribuem para a formação inicial dos professores; e como o contato próximo com a rotina mais direta dos(as) professores(as) de matemática também possibilita que redescubram sua paixão por ensinar e contribuir para o aprendizado de terceiros.

A pergunta seguinte tinha como objetivo verificar as dificuldades dos alunos nas disciplinas de matemática da graduação. Ao serem questionados sobre a participação em projetos e a contribuição dessas ações, relataram que participaram de PIBID, Residência Pedagógica e PET – essas ações trazem em comum a aproximação dos licenciandos às práticas docentes. O Quadro 3 mostra os depoimentos dos educandos sobre as dificuldades nas disciplinas.

Quadro 3: Depoimentos dos educandos sobre as dificuldades nas disciplinas

Ao ingressar na graduação, quais foram as dificuldades encontradas no curso em relação às disciplinas? Escreva ou mande seu áudio.	
Nome	Resposta
Ami Radunskaya	Além de algumas dificuldades em matemática básica, acredito que por ter visto a matemática como "calcule isso" e ter sempre um padrão de resolução, existiram certas disciplinas que exigiram o contrário disso e tive dificuldade.
Abraham	Acho que realmente o que foi mais difícil foi lidar com as regras de matemática básica no cálculo 1, saber como lidar com

Nemeth	as equações em geral sem negligenciar os fundamentos.
Nalini Joshi	Como vim de escola pública, meu conhecimento era bem diferente dos meus colegas e isso acabou me deixando bastante frustrada.
Gladys West	Principalmente o fato de que todas as matérias demandam muito tempo de dedicação, o que dificultava o planejamento para o estudo das mesmas. Optei por puxar menos matérias por período para tentar equilibrar esse problema, mas nunca foi fácil.
Erika Camacho	Matemática básica , gráficos , muitas coisas eu não vi pois meu curso técnico era voltado para dança
Maryam Mirzakhani	Como eu disse anteriormente, ao entrar na universidade eu percebi que eu não sabia matemática básica, pelo menos não da maneira que eu achava que sabia, então as maiores dificuldades que encontrei no curso em relação às disciplinas, tinham relação direta com a matemática básica.
Karlie Noon	Não tive um ensino médio de muita qualidade, e só entrei na graduação 8 anos depois de me formar no ensino médio, sem nenhum cursinho preparatório ou algo do tipo. Então por esse motivo tenho muita insegurança mesmo com a matemática básica e isso influencia diretamente em muita coisa ao longo do curso.
MC Escher	As de educação foram muito boas e reflexivas de se fazer. Para realizá-las tínhamos que ler e estar bastante envolvido com a matéria, inclusive era um esforço dos professores. As matérias específicas foram num cenário completamente oposto. Algumas matérias com a maioria esmagadora de reprovados. (Me lembrou a matéria de Álgebra Linear B em que resultou em quase 90% da turma reprovada)

Muitas defasagens surgem na fala dos alunos nesse momento – a grande maioria pode ser discutida com base no fenômeno da dupla descontinuidade, publicado por Félix Klein, em 1908. Nesse mesmo contexto, observamos

O referido pesquisador criticava os professores universitários que se preocupavam exclusivamente com a Matemática Acadêmica, sem considerarem as necessidades das escolas, e a Matemática Escolar. Klein identifica essa ruptura como uma dupla descontinuidade, que se estabelece na falta de conexão entre a Matemática aprendida na escola básica e a Matemática que determina os cursos de formação de professores (Rodrigues *et al.*, 2021, p. 193).

A dupla descontinuidade é uma realidade na formação inicial de professores e acaba gerando dificuldade nas disciplinas da graduação e até mesmo abandono do curso de graduação. Nos depoimentos, podemos verificar que os alunos entendem que na educação básica a matemática se dedicava a cálculos e reprodução de fórmulas, e na graduação o pensamento parece ser o oposto. Além disso, comentaram também sobre o fato de o tempo de dedicação e estudos para obter bom aproveitamento nas disciplinas ser diferente da educação básica.

Quando perguntados sobre as disciplinas que mais contribuíram para o exercício da profissão, os acadêmicos dissertam da forma como mostramos no Quadro 4, a seguir.

Quadro 4: Depoimentos dos educandos sobre experiências na graduação

Durante a Graduação quais experiências ou disciplinas mais contribuíram (ou contribuem) para o exercício da sua profissão? Escreva no quadro ou clique no ícone para mandar um áudio	
Nome	Resposta
Ami Radunskaya	As disciplinas de Lab I, Lab II, os NEPES e Didática, pois nelas vi algumas atividades que podem ser usadas como algo complementar a aula e exemplos de abordagem.

Abraham Nemeth	Atualmente atuo como desenvolvedor, então as disciplinas que mais contribuíram foram linguagem de programação, álgebra 1 e seus fundamentos de lógica, álgebra linear em seus fundamentos de vetores e matrizes, assim como os cálculos em geral, em especial o numérico.
Nalini Joshi	As de educação foram as que mais me encontrei e me encaixei.
Gladys West	Acredito que todas, pois cada uma me ensinou uma forma diferente de estudar matemática. Também gosto do aprofundamento político e das formas diferentes de ensinar matemática que as matérias da educação trazem.
Erika Camacho	As disciplinas de educação, desenvolvimentos
Maryam Mirzakhani	As disciplinas de NEPE, os LabMat e a disciplina de Ensino 1 contribuíram muitíssimo, além da monitoria, tanto a de matemática propriamente dita, quanto a de Desenho Técnico, que foi o que mais me ajudou a me comunicar com os alunos.
Karlie Noon	A disciplina de Didática 1, com a professora Adriana, pra mim foi a que mais conseguiu trazer uma questão mais humanizada. Aprendi a observar o lado humano do aluno, a questão de como o emocional influencia na aprendizagem. A professora fez uma espécie de "regressão" onde voltamos às lembranças da infância no ambiente escolar/familiar e pude associar minhas dificuldades e/ou qualidades a partir dessas lembranças.
MC Escher	Introdução à Estatística, Cálculo I, Álgebra I.

Fonte: elaborado pelo autor

De certa forma, o público-alvo da pesquisa está bem definido. Sendo assim, convém questionar os alunos daqui para frente sobre os objetivos da pesquisa. Como primeiro questionamento, está o uso de tecnologias digitais no ensino de matemática.

DO USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A seguir, no Quadro 5, apresentamos os depoimentos dos educandos sobre as contribuições das tecnologias digitais para o aprendizado de matemática.

Quadro 5: Depoimentos dos educandos sobre as contribuições das tecnologias digitais

De que forma você considera que as Tecnologias Digitais (Softwares, apps, programas, etc.) contribuem ou não para o seu aprendizado em Matemática? Escreva no quadro ou envie um áudio	
Nome	Resposta
Ami Radunskaya	Contribuem sim para o meu aprendizado em Matemática, pois dependendo do aplicativo ajuda na visualização de alguns conceitos, como por exemplo eu gosto de usar para visualização das formas geométricas.
Abraham Nemeth	Uma das maiores dificuldades e barreiras que tive era poder visualizar toda a álgebra que praticamos no dia a dia, então o uso de softwares foi importantíssimo para esse processo, acredito que a memória visual seja uma fato crucial para nós também, dessa forma poder entender como se comportam as funções em geral, com o auxílio do GeoGebra por exemplo, foi um divisor de águas em questão de sair do abstrato para o concreto.
Nalini Joshi	Com a Tecnologias tivemos um avanço muito satisfatório principalmente em geometria que podemos ver as figuras com mais riqueza e detalhes.
Gladys West	Me ajudam muito como ferramentas para estudo em si. Muitas vezes me pego conferindo gráficos no GeoGebra, consultando formas diferentes de resoluções de questões de

	matemática pura, etc.
Erik a Camacho	Eu sou mt ruim em lidar com tecnologia , preferi-o mt mais um trabalho escrito ou algo assim
Mar yam Mirzakhani	Eu acredito que as tecnologias digitais contribuem muito para o aprendizado de matemática, e acredito que desde os anos iniciais elas deveriam ser implementadas nas aulas.
Karli e Noon	As tecnologias digitais por si só não podem trazer benefício algum, a não ser que sejam utilizadas de maneira coerente, com planejamento e objetivos definidos, considerado é claro, a realidade dos alunos.
MC Escher	Contribui mas tem que ser muito bem elaborado pois caso contrário, atrapalha mais do que ajudaria no sentido de aprendizado. A boa elaboração seria para agir de uma forma mais lúdica e esclarecedora onde certas perspectivas no quadro não seriam possíveis.

Fonte: elaborado pelo autor

Inicialmente, nas respostas sobre a utilização de tecnologias digitais no ensino de matemática, já emergem características como a visualização. Para os alunos, alguns aplicativos se mostraram de extrema importância para visualizarem gráficos, comportamentos de funções e formas geométricas; e compreenderem certos resultados e conceitos matemáticos. Por fim, vale destacar a fala de Karlie Noon, que ressalta a importância da intencionalidade alinhada à utilização de tecnologias digitais.

A seguir, no Quadro 6, mostramos os depoimentos dos educandos sobre o modo como as tecnologias digitais minimizam dificuldades.

Quadro 6: Depoimentos dos educandos sobre o modo como as tecnologias digitais minimizam dificuldades

Na graduação, quais disciplinas você acha que o uso de Tecnologias Digitais minimizam suas dificuldades de aprendizado? Caso queira, comente a partir de um conteúdo estudado.

Nome	Resposta
Ami Radunskaya	As disciplinas de Tópicos de Geometria Espacial e Equações Diferenciais II, sendo esta última poderia ser usada para o estudo do comportamento de algumas soluções.
Abraham Nemeth	Apesar de ter tido disciplinas que aprofundaram bastante o uso do GeoGebra para o ensino, a experiência que tive em cálculo numérico onde o professor transformava o conteúdo aprendido em códigos Python, foi simplesmente sensacional. Me senti estimulado e pude ver na prática que o conteúdo aprendido impactava diretamente meu dia a dia.
Nalini Joshi	Com Tecnologias pude expressar mais meus conhecimentos.
Gladys West	Praticamente todas. Em topologia foi fundamental consultar diferentes fontes para descobrir propriedades que eu poderia usar para fazer as questões.
Erika Camacho	Nepe , geometria espacial , GeoGebra.
Maryam Mirzakhani	Acredito que sem o uso das Tecnologias Digitais, os cursos de Cálculos se tornem ainda mais complicados, principalmente a parte geométrica, apps como o GeoGebra por exemplo nos dão uma outra perspectiva a respeito de funções que em outro momento eram inimagináveis para a maioria dos alunos.
Karlie Noon	As tecnologias digitais me ajudaram bastante principalmente no modo de visualização de gráficos, observar comportamentos. Utilizei muito em Cálculo 2 e 3, foram indispensáveis para minha compreensão. Em Geometria Analítica poderia ter me ajudado, porém no início da graduação, quando cursei essa disciplina, não havia conhecido nenhuma dessas tecnologias digitais, tive certa dificuldade que poderia ter sido evitado com o uso do GeoGebra por exemplo
MC Escher	Cálculo I, II, III e IV Matemática Plana e Espacial Álgebra Linear A e B Função de Variável Complexa

Fonte: elaborado pelo autor

Sobre a utilização de tecnologias para minimizar as dificuldades de aprendizado, os alunos demonstram que diversas tecnologias são essenciais em sua trajetória acadêmica, tanto para fazer uma busca quanto para utilizar calculadoras gráficas e Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD).

Posteriormente, foram colocados em questão dois AGD – o GeoGebra e o Desmos –, ambos com os mesmos propósitos: uso de ferramentas de visualização, exploração e manipulação de objetos matemáticos. Porém, existem grandes diferenças entre os AGD citados, embora seus propósitos sejam semelhantes. Quando perguntados sobre o GeoGebra e o Desmos, os alunos forneceram as respostas organizadas no Quadro 7.

Quadro 7: Depoimentos dos educandos sobre experiências com o Desmos e o Geogebra

Conhece e já teve experiências com a plataforma Desmos? E com o GeoGebra? Comente.	
Nome	Resposta
Ami Radunskaya	Sim. Eu conheço as duas plataformas, mas o GeoGebra é a que mais utilizo nas disciplinas da graduação.
Abraham Nemeth	Como comentado anteriormente, tive ótimas experiências com o GeoGebra, mas ainda não conhecia a plataforma Desmos.
Nalini Joshi	Desmos ainda não.
Gladys West	Nunca tive com o Desmos. GeoGebra já tive bastante. Muitos professores e disciplinas utilizam o GeoGebra como ferramenta fundamental.
Erika Camacho	Só com GeoGebra
Maryam Mirzakhani	Conheço melhor o GeoGebra, a plataforma Desmos tive pouco contato em um período conturbado que acabei trancando, então acabei não fazendo muito proveito de suas funcionalidades.
Karlie Noon	Com a Desmos ainda não, nem conhecia. Já o GeoGebra usei, bastante em alguns momentos, excelente plataforma

MC Escher	Apenas GeoGebra, onde foi usado em todas as matérias da professora XXXX.
-----------	--

Fonte: elaborado pelo autor

Em relação ao uso do GeoGebra e do Desmos, a maioria dos alunos utiliza ou conhece o GeoGebra, por ser uma plataforma amplamente consolidada e popular. Já o Desmos é pouco conhecido pelos alunos e nenhum deles o utiliza com frequência. Esse resultado torna oportuno que as atividades propostas sejam realizadas no Desmos, de forma que contribuam para a formação inicial de professores.

04. Dos Conceitos de Trigonometria

Nessa etapa, os participantes foram questionados sobre suas percepções de complexidade dos conteúdos e responderam a todas as questões para posterior análise. A Figura 16 mostra a atividade de ordenar conteúdos pelo grau de dificuldade.

Figura 16: Atividade na plataforma: ordenar conteúdos pelo grau de dificuldade

Arraste as sentenças para ordenar a lista abaixo da forma que achar melhor

MENOS COMPLEXO



Trigonometria no Triângulo



Trigonometria no Círculo



Equações Trigonométricas



Inequações Trigonométricas



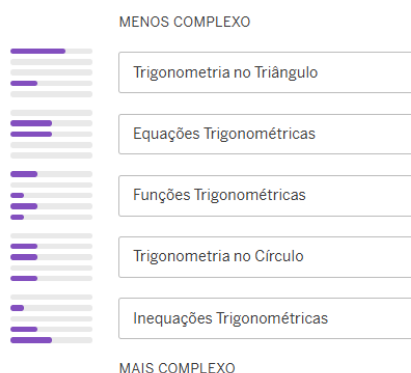
Funções Trigonométricas

MAIS COMPLEXO

Fonte: elaborado pelo autor

Na atividade seguinte, os alunos poderiam arrastar as fichas como achassem melhor, para ordenar os conteúdos do menos complexo ao mais complexo. Os resultados estão mostrados na Figura 17.

Figura 17: Resultados dos estudantes para a ordenação dos conteúdos



Fonte: elaborado pelo autor

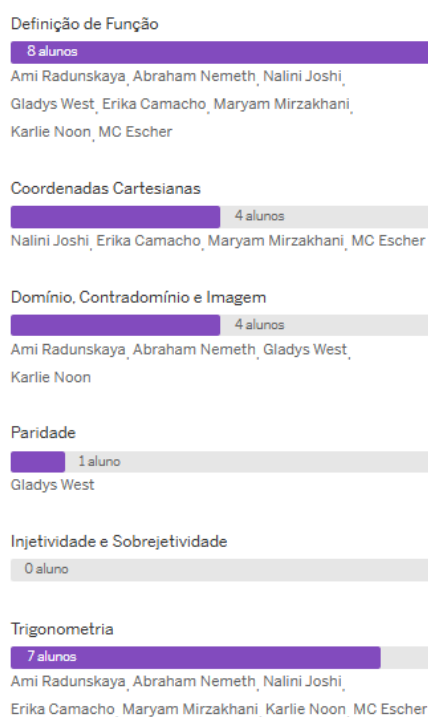
Observamos que, para conclusões iniciais, os estudantes acreditam que os conceitos de trigonometria no triângulo retângulo são menos complexos, de forma geral. Em seguida, as equações trigonométricas foram posicionadas entre a segunda e terceira posição. Em relação à trigonometria no círculo, foi evidenciado que houve um impasse sobre o referido conteúdo – alguns educandos alocaram a trigonometria na terceira, outros na quarta e outros, ainda, na quinta posição.

Por outro lado, a percepção dos licenciandos sobre os conceitos de funções trigonométricas – foco da pesquisa – e de inequações trigonométricas mostrou-se bastante dividida: há alunos que os julgam menos complexos entre os demais, mas também há alunos que afirmam que esses conteúdos são os mais complexos.

Sucedendo os questionamentos sobre os conceitos de trigonometria, os alunos também foram convidados a refletir sobre quais seriam os pré-requisitos para um estudante compreender bem os conceitos de funções trigonométricas, e os resultados estão dispostos na Figura 18.

Figura 18: Resultados dos educandos sobre conteúdos importantes

Para o estudo de Funções Trigonômétricas, selecione APENAS TRÊS pré-requisitos que julga mais importante



Fonte: elaborada pelo autor

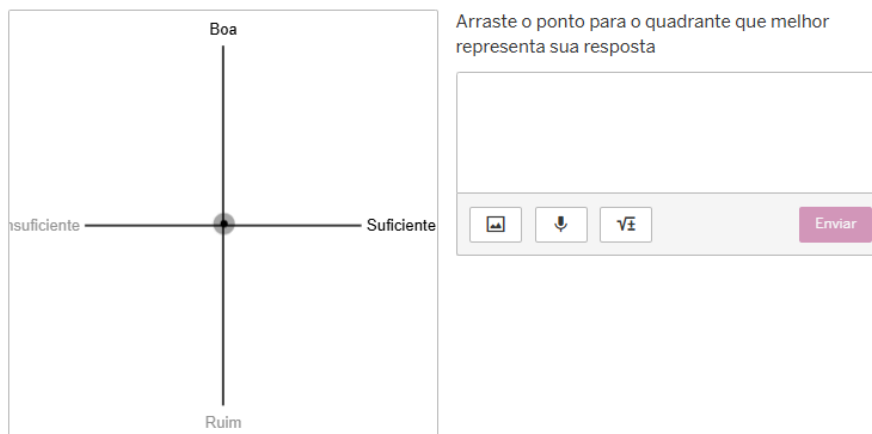
Ao visualizarmos os resultados, foi possível perceber que, como apontam os resultados de Vergilio (2023), para os participantes, o pré-requisito mais importante

entre os demais seria conhecer a definição de função – de fato, para compreender o comportamento de qualquer função no campo da matemática, faz-se necessário compreender o conceito e a definição de função de maneira geral.

Em seguida, outro pré-requisito determinado como de maior importância foi compreender os conceitos de trigonometria. Por fim, como terceiro pré-requisito mais importante no estudo de funções trigonométricas, os alunos se dividiram entre o conhecimento das coordenadas cartesianas e a compreensão sobre domínio, contradomínio e imagem.

O levantamento seguinte teve o intuito de entender o modo como os participantes julgam seu próprio aprendizado em relação às funções trigonométricas. Inicialmente os alunos deveriam manipular um ponto no plano cartesiano e posicioná-lo de acordo com sua resposta. A Figura 19 mostra o gráfico a ser manipulado pelos educandos.

Figura 19: Atividade – gráfico sobre a experiência acadêmica dos educandos



Fonte: elaborada pelo autor

Em seguida, os alunos registraram suas respostas escritas, que estão mostradas no Quadro 8, a seguir.

Quadro 8: Depoimentos dos educandos sobre seu grau de aprendizado de funções trigonométricas

Movendo o ponto entre os quadrantes, utilize o espaço abaixo para classificar o seu aprendizado sobre funções trigonométricas ($f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \tan(x)$). Você os julga suficientes, teve boas experiências? Comente no quadro.	
Nome	Resposta
Ami Radunskaya	Eu classifico meu aprendizado como suficiente.
Abraham Nemeth	Julgo minhas experiências mais suficientes do que boas, acredito que o medo da trigonometria vem realmente da matemática básica, onde a visualização do aprendizado sempre foi ruim tanto no ensino fundamental quanto no médio.
Nalini Joshi	Imparcial.
Gladys West	Não considero suficiente pois sempre me pego me embolando ou consultando materiais, mas me dou bem com o conteúdo em geral.
Erika Camacho	Ainda esqueço coisas básicas , porém consigo anotar e seguir
Maryam Mirzakhani	Julgo que meu aprendizado nas funções trigonométricas seja bem ruim e insuficiente, o pouco que sei posso dizer que aprendi na universidade, pois dificilmente tive algum contato com elas no ciclo básico. Percebo que ainda faço muita confusão com as 3 principais (com as outras então, nem se fala, hahahahaha) e por muitas vezes preciso recorrer ao círculo para conseguir me orientar melhor.
Karlie Noon	Não domino o assunto, então não considero meu aprendizado bom.
MC Escher	Aprendi depois de velho mas já tinha ideia de Trigonometria.

Fonte: elaborado pelo autor

Podemos relacionar o aprendizado como suficiente quando o participante de fato compreende os conceitos abordados na trigonometria, porém classificamos o aprendizado como bom ou ruim de forma afetiva, verificando se o aluno de fato gostou de se debruçar sobre os conteúdos e aprendê-los ou se sua transposição didática foi eficiente para sua aprendizagem na educação básica. Portanto, dizer se o aprendizado foi suficiente ou insuficiente é uma análise de desempenho, mas entender a experiência como boa ou ruim significa analisar se o aluno teve boas experiências do ponto de vista pessoal.

Dessa forma, cinco participantes localizaram o ponto no primeiro quadrante, ou seja, classificaram seu aprendizado como bom e suficiente. Uma estudante mostrou-se imparcial e fixou o ponto na origem. Por fim, um participante localizou o ponto no terceiro quadrante e outro no quarto quadrante, informando assim que suas experiências foram ruins – porém uma foi classificada como ruim e suficiente e outra como ruim e insuficiente.

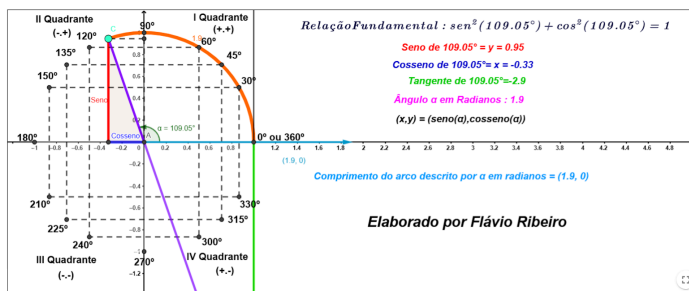
Para finalizar o primeiro encontro, os alunos deveriam solucionar três questões do Enem, a fim de observar o modo como esses conteúdos são exigidos na educação básica. As questões do Enem foram incorporadas em todos os encontros, com o objetivo de validar os conteúdos explorados.

Primeiro Encontro

Na **primeira implementação**, os participantes foram convidados a interagir com o *applet* intitulado “Atividade 1 - O ciclo trigonométrico”⁵, elaborado por Júnior (2018). Para a realização dessa atividade, os participantes contaram com folhas de papel ofício para registrar suas respostas; e com seus próprios *smartphones*, preferidos por eles, para manipular a construção. A Figura 12 mostra o *design* do primeiro *applet*.

Figura 12: *Design* do primeiro *applet* utilizado no GeoGebra

⁵ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/afE3rGeF#material/AeTdy8jX> Acesso em: 03/02/2024



Fonte: Júnior (2018)

O *applet* possibilita que os participantes compreendam os conceitos explorados a partir da observação, da manipulação e do registro do que de fato está sendo alterado na construção. Assim, o objetivo da tarefa era que os estudantes, apenas deslizando o ponto azul sobre a circunferência trigonométrica, respondessem às tarefas propostas.

Quando questionados sobre o raio do ciclo trigonométrico ser unitário, os participantes fizeram os seguintes comentários:

Gladys West: *Sim, podemos observar que a borda do círculo passa no +1 e -1 nos dois eixos. Como o centro é na origem e a borda é sempre equidistante do centro, temos que o raio é 1.*

Karlie Noon: *Sim, $R = \cos(0)$*

MC Escher: *Considerando que o seno e cosseno dos ângulos representados no círculo só podem atingir seu valor máximo em 1, então o raio será unitário.*

A partir dessas observações, destacamos que o primeiro estudante tirou suas conclusões de forma visual, enquanto os dois outros estudantes utilizaram noções anteriores que possuíam sobre o conteúdo. Notamos uma certa preferência pelo conhecimento que já está estabelecido e assimilado na mente dos estudantes.

Em seguida, quando perguntados sobre a circunferência trigonométrica ser orientada, todos os participantes da pesquisa comentaram que o sentido positivo seria o anti-horário e o sentido negativo o horário. Também apresentaram que os eixos que

representam numericamente o seno e o cosseno são respectivamente os eixos y e x; e observaram que o eixo que representa numericamente a tangente seria a reta $x=1$. Nesse ponto, verificamos que os estudantes possuem uma noção dos conteúdos explorados.

Quando indagados sobre o estudo de sinal do seno, do cosseno e da tangente, foi perceptível a utilização de tabelas pelos três estudantes – característica que pode ser destacada como um recurso útil quando estamos fazendo estudo de sinais ou funções. Apesar de a atividade ter sido realizada de maneira individual, com discussões e trocas entre os estudantes, nesse quesito os alunos não conversaram e ainda assim seguiram uma mesma estratégia de resolução. É possível concluir, inicialmente, que a tabela pode ser o recurso por meio do qual aprenderam esses conteúdos – além disso, a tabela também é um recurso que auxilia a organizar os pensamentos e ter uma visualização mais direta. No Quadro 9, mostramos um exemplo de tabela feita pelos estudantes.

Quadro 9: Exemplo de tabela feita pelos estudantes

Quadrantes	Seno	Cosseno	Tangente
1	+	+	+
2	+	-	-
3	-	-	+
4	-	+	-

Fonte: elaborado pelo autor a partir dos registros dos educandos

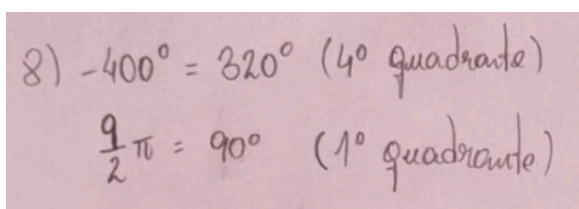
Os participantes deveriam assinalar os ângulos marcados na circunferência, em radianos. Para executar essa tarefa, a proposta inicial seria que os alunos, apenas deslizando o ponto azul sobre os ângulos, constatassem que a marcação em azul da

construção já apresentava os valores dos arcos em radianos – assim, eles deveriam apenas deslizar sobre os pontos e fazer os registros.

Dos estudantes observados, apenas um seguiu essa estratégia, utilizando o valor decimal aproximado dos ângulos em radianos. Os outros dois alunos utilizaram a notação com pi. Ambas as estratégias estão corretas, porém na segunda estratégia não foi utilizada a construção, mas sim conhecimentos prévios.

Em relação à localização de alguns ângulos e seus respectivos quadrantes, os alunos responderam da forma como aparece na Figura 13, na Figura 14 e na Figura 15, a seguir.

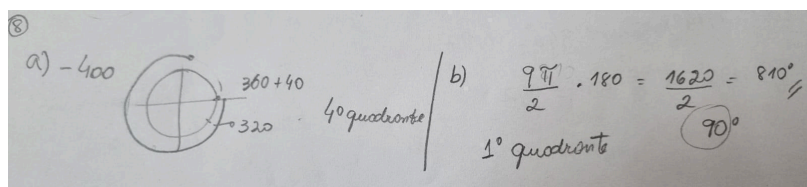
Figura 13: Resposta do aluno Gladys West



Handwritten student work for Gladys West. It shows two calculations: $8) -400^\circ = 320^\circ$ (4º quadrante) and $\frac{9}{2}\pi = 90^\circ$ (1º quadrante).

Fonte: elaborada pelo autor

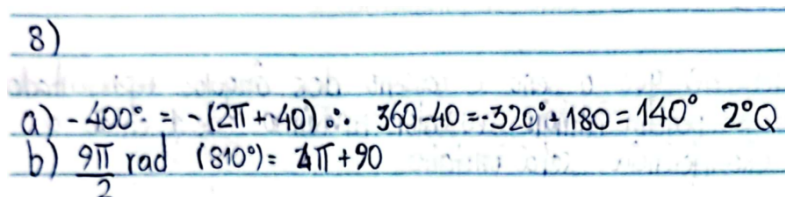
Figura 14: Resposta do aluno Karlle Noon



Handwritten student work for Karlle Noon. It includes a diagram of a unit circle with an angle of -400° indicated. The calculation $360 + 40 = 320$ is shown, leading to the conclusion "4º quadrante". To the right, the calculation $b) \frac{9\pi}{2} \cdot 180 = \frac{1620}{2} = 810^\circ$ is shown, which is then reduced to 90° and labeled "1º quadrante".

Fonte: elaborada pelo autor

Figura 15: Resposta do aluno MC Escher



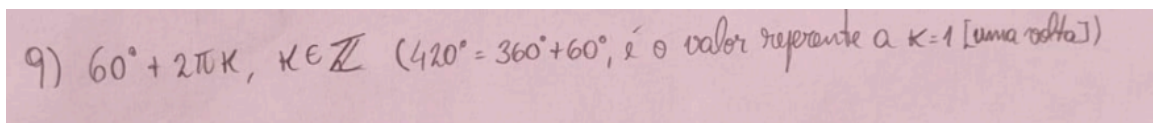
Handwritten student work for MC Escher. It shows two calculations: $a) -400^\circ = -(2\pi + 40)^\circ \therefore 360 - 40 = -320^\circ + 180 = 140^\circ$ 2ºQ and $b) \frac{9\pi}{2} \text{ rad } (810^\circ) = 4\pi + 90$.

Fonte: elaborada pelo autor

De maneira mais direta, Gladys West chegou à conclusão de que os ângulos correspondiam a 320° e 90° respectivamente, pertencendo assim ao 4.º e ao 1.º quadrante. Karlie Noon seguiu por uma demonstração mais didática, desenhando o ciclo trigonométrico e chegando às mesmas conclusões. Por fim, MC Escher acabou cometendo alguns equívocos em seus cálculos, errando assim o primeiro item e acertando o segundo. Podemos observar também que o ângulo de 90° foi classificado como 2.º quadrante, a mesma discussão que emergiu anteriormente.

Para caminharmos para os objetivos desta pesquisa em relação à investigação dos eventos críticos, faz sentido destacarmos uma última percepção dos alunos sobre a seguinte solicitação: determinar os arcos congruentes a 420° . É o que está mostrado na Figura 16, na Figura 17 e na Figura 18.

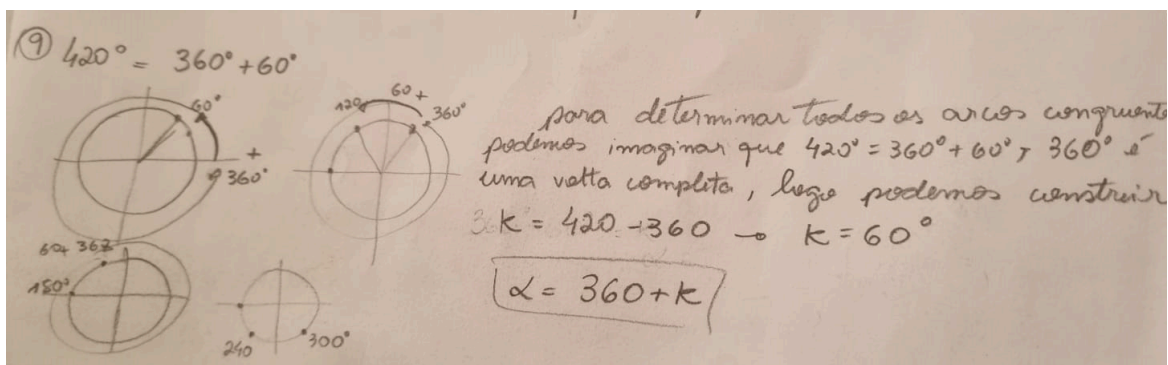
Figura 16: Resposta do aluno Gladys West



9) $60^\circ + 2\pi K$, $K \in \mathbb{Z}$ ($420^\circ = 360^\circ + 60^\circ$, é o valor referente a $K=1$ [uma volta])

Fonte: elaborada pelo autor

Figura 17: Resposta do aluno Karlie Noon



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 18: Resposta do aluno MC Escher

$$9) 420^\circ = \frac{7\pi}{3} = \frac{7k\pi}{3}$$

Fonte: elaborada pelo autor

Quando solicitados a escrever expressões que generalizam um conjunto de ângulos congruentes, foi possível notar certa dificuldade por parte dos estudantes. Primeiro, é preciso tomar uma série de cuidados em relação à notação utilizada.

Gladys West concluiu que o ângulo 420° reduzido à primeira volta positiva equivale a 60° . Assim, na tentativa de generalizar essa ideia, ele determina que os ângulos congruentes devem respeitar a lei expressa por $60^\circ + 2k\pi$, com k inteiro. Para essa solução vale destacar o cuidado que se deve ter em relação a expressar ângulos em graus e em radianos em uma mesma expressão. Para não gerar essa confusão, é possível escrever 60° como $\pi/3$.

Já Karlie Noon propõe que o ângulo 420° nada mais é que $360^\circ + 60^\circ$ – assim, para construir uma generalização, ele pode considerar o ângulo 60° . Em seguida, esse aluno escreve a generalização $\alpha = 360 + k$. Essa é uma generalização possível para o aluno entender o primeiro ângulo congruente após a primeira volta, porém ela não dá conta de todos os ângulos congruentes.

Por fim, MC Escher propõe o seguinte raciocínio: converter o ângulo de graus para radianos e em seguida multiplicar por k , sem situar ao leitor o significado de k .

Os estudantes compreenderam a pergunta e entenderam que os ângulos congruentes são aqueles obtidos ao completar $+360^\circ$ a partir da sua primeira determinação positiva.

Portanto, podemos inferir que a dificuldade por parte dos estudantes consiste na representação matemática desta generalização. Com o fim de sanar essas dificuldades,

na implementação seguinte, os alunos tiveram contato justamente com a generalização dos arcos congruentes, de forma iterativa e interativa.

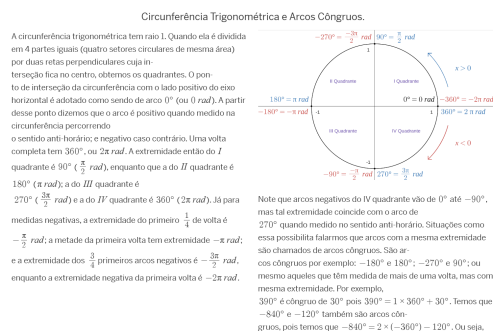
A seguir, esta pesquisa se dedica a descrever e destacar pontos importantes da segunda implementação, que aconteceu no Desmos Sala de Aula. Para adentrar no ambiente do Desmos, entre a primeira e a segunda implementação, aos alunos foram propostas as atividades criadas por Júnior (2018) por meio dos *applets*. Eles fizeram as atividades 2, 3, 4 e 5, que trabalhavam os conceitos de função seno, função cosseno e a alteração dos parâmetros delas.

A **segunda implementação** concentrou-se em uma sequência de atividades interativas, que possuíam construções interativas juntamente de explicações teóricas dos conteúdos de ciclo trigonométrico e funções trigonométricas (seno e cosseno). Para a realização da atividade, os estudantes utilizaram unicamente *tablets*, uma vez que a própria plataforma Desmos já disponibiliza espaço apropriado para registrarem suas respostas.

A escolha dos *tablets* se deu por conta da visualização mais clara das construções – a visualização foi prejudicada na primeira implementação, quando os estudantes utilizaram seus próprios *smartphones*. Após interagirem com essas construções, os alunos deveriam resolver tarefas e podiam utilizar as próprias construções como material de apoio.

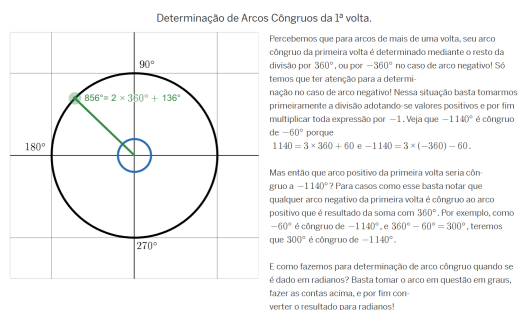
Para situar o leitor, a primeira página da tarefa consistia em uma explicação sobre o ciclo trigonométrico. A Figura 20, a seguir, mostra o *design* da segunda atividade na plataforma Desmos. A Figura 21 mostra a atividade de determinação de arcos realizada na plataforma Desmos.

Figura 20: *Design* da segunda atividade na plataforma Desmos



Fonte: Cândido (2023)⁶

Figura 21: Atividade na plataforma Desmos sobre determinação dos arcos



Fonte: Cândido (2023)

Essas atividades mais explicativas vieram da necessidade – sinalizada pelos alunos participantes da pesquisa – de retomar os conteúdos formais relacionados aos estudos.

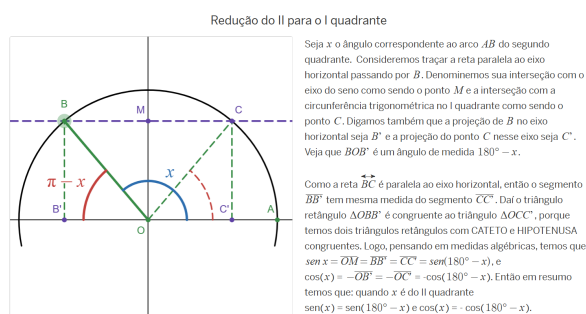
Essa próxima página mostra um exemplo de construções propostas de forma interativa. Além de ter acesso à explicação, o aluno é capaz de manipular o ponto sobre a circunferência a fim de entender o modo como são generalizados os ângulos em graus após a primeira volta completa.

Por fim, mostramos, na Figura 22, uma construção apresentada aos alunos sobre as reduções para o primeiro quadrante. Novamente os alunos podem manipular a

⁶ As atividades apresentadas por Cândido (2023) em sua dissertação podem ser acessadas em: <https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/63bc3229b8c091975c778927?lang=pt-BR&collections=63bbfbab89f5f4e83f593e2f>

construção e visualizar os ângulos do segundo quadrante e seus correspondentes no primeiro quadrante. Nesse momento, foi chamada a atenção para a possível variação do sinal nessa redução. Assim, o professor mediador deve estar atento às considerações que devem ser feitas para a melhor compreensão da atividade.

Figura 22: Atividade de redução do segundo para o primeiro quadrante



Fonte: Cândido (2023)

Além das construções interativas acerca dos conteúdos de ciclo trigonométrico, arcos côngruos e redução dos arcos para o primeiro quadrante, a atividade também trabalha os conteúdos de arcos notáveis da primeira volta positiva, finalizando com atividades avaliativas, mostradas na Figura 23 e na Figura 24.

Figura 23: Atividade expressões trigonométricas

Avalie o seu conhecimento a respeito dos conteúdos das páginas anteriores!

1 - O valor de $Y = \sin 90^\circ + \cos 360^\circ - \sin 270^\circ - \cos 180^\circ + \sin 180^\circ + \cos 90^\circ$ é:

- ☐ 1
- ☐ -1
- ☐ 2
- ☐ -2
- ☐ 4

Fonte: Cândido (2023)

Figura 24: Atividade expressões trigonométricas

2 - Encontre o valor de: $\cos 120^\circ + \sin 210^\circ$

- ☐ 1
- ☐ -1
- ☐ 0
- ☐ $\frac{1}{4}$
- ☐ $-\frac{1}{4}$

Fonte: Cândido (2023)

Nas atividades 1 e 2, mostradas na Figura 25 e na Figura 26, todos os alunos observados assinalaram a resposta correta, respectivamente, 4 e -1.

Figura 25: Atividade de multiplicação de arcos

3 - Qual o valor da expressão $\cos\left(\frac{35\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{-13\pi}{3}\right)$?

- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ $-\frac{1}{2}$
- ☐ 1
- ☐ $\frac{3}{4}$
- ☐ $-\frac{3}{4}$

Fonte: Cândido (2023)

Figura 26: Atividade de imagem da função

4 - Dada a função $f(x) = 3 - 2 \sin(2x)$, qual o valor de $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$?

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5

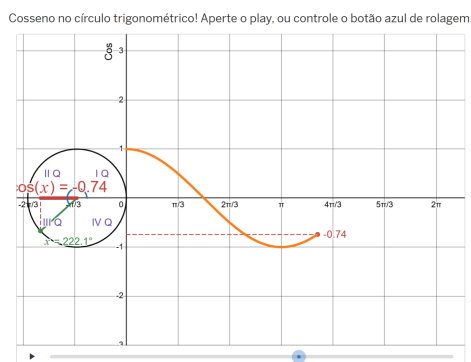
Fonte: Cândido (2023)

Na segunda metade da implementação em questão, o assunto abordado é o de funções trigonométricas, seguindo o mesmo modelo de construção. Nesse momento, os

alunos foram colocados para interagir com construções sobre funções trigonométricas; investigar seus aspectos periódicos, seu domínio, contradomínio e imagem; e efetuar quando necessário o cálculo de suas imagens ou seus pontos máximos e mínimos.

Além disso, para os educandos existem construções referentes aos parâmetros das funções trigonométricas – e, manipulando essas construções, eles podem verificar o modo como cada parâmetro é responsável por alterar a função em si. A Figura 27 mostra a atividade rastro da função cosseno.

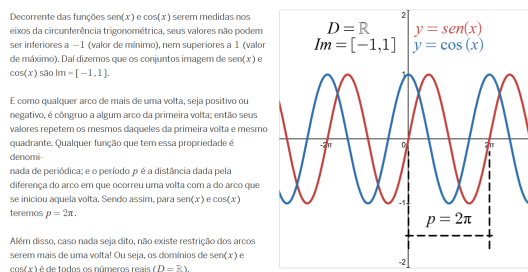
Figura 27: Atividade rastro da função cosseno



Fonte: Cândido (2023)

Inicialmente, os alunos são convidados a dar *play* no objeto de interação ou arrastá-lo para observar o modo como os valores do cosseno, calculados no ciclo trigonométrico, se projetam no eixo plano cartesiano, formando assim a função $f(x) = \cos(x)$ de forma contínua. A Figura 28 mostra a atividade com a explicação sobre o período das funções seno e cosseno.

Figura 28: Atividade com explicação sobre o período das funções seno e cosseno



Fonte: Cândido (2023)

Por conseguinte, são trabalhados a partir de considerações textuais com o apoio de imagens os conceitos de imagem, periodicidade e período das funções $f(x) = \text{Sen}(x)$ ou $f(x) = \text{Cos}(x)$, além de atividades avaliativas sobre os máximos e os mínimos e o período de funções derivadas da função seno e cosseno. A Figura 29 mostra a atividade para avaliação do máximo da função f ; a Figura 30 apresenta a atividade para avaliação do mínimo da função f ; a Figura 31 expõe a avaliação sobre o período da função f e a Figura 32 exhibe a avaliação sobre a imagem da função f .

Figura 29: Atividade Máximo da função f

Avalie o seu conhecimento a respeito dos conteúdos!

1 - Dada a função $f(x) = 5 - 3 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right)$, o máximo valor que ela tem é:

- ☐ 8
- ☐ 10
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4

Fonte: Cândido (2023)

Figura 30: Atividade mínimo da função f

2 - Com relação à função $f(x) = \frac{6}{2 + \cos(3x)}$, o mínimo valor que ela possui é:

- ☐ 4
- ☐ 8
- ☐ 6
- ☐ 3
- ☐ 2

Fonte: Cândido (2023)

Figura 31: Atividade período da função f

3 - Dada a função $f(x) = 5 - 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right)$, seu período é:

- ☐ 4
- ☐ 3
- ☐ 2
- ☐ 6
- ☐ 8

Fonte: Cândido (2023)

Figura 32: Atividade imagem da função f

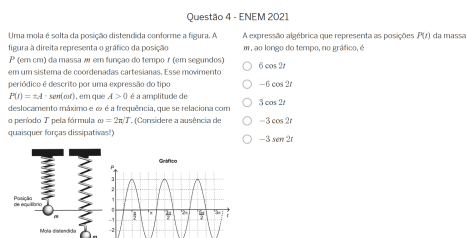
4 - Dada a função $f(x) = 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, qual o valor de x abaixo satisfaz $f(x) = \frac{5}{2}$?

- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{1}{3}$
- ☐ 0
- ☐ $\frac{1}{6}$
- ☐ $\frac{2}{3}$

Fonte: Cândido (2023)

Ao final das situações exploratórias e das tarefas envolvendo os conteúdos de imagem e domínio das funções trigonométricas seno e cosseno, apresentamos duas questões do Enem, para avaliar o que foi compreendido pelos estudantes. A primeira questão está mostrada na Figura 33; e a segunda, na Figura 34.

Figura 33: Atividade com a questão do Enem



Fonte: Cândido (2023)

Figura 34: Atividade com a questão do Enem**Questão 5 - ENEM 2015**

Um técnico precisa consertar um termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T , em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função $T(h) = A + B \sin\left[\frac{\pi}{12}(h - 12)\right]$, sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite ($0 \leq h \leq 24$) e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26 °C, a mínima 18 °C, e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã.

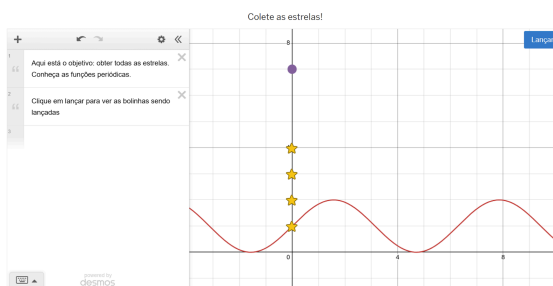
Quais devem ser os valores de A e de B para que o pedido dos funcionários seja atendido?

- ☐ $A = 26$ e $B = 8$
- ☐ $A = 22$ e $B = -4$
- ☐ $A = 18$ e $B = 8$
- ☐ $A = 26$ e $B = -8$
- ☐ $A = 22$ e $B = 4$

Fonte: Cândido (2023)

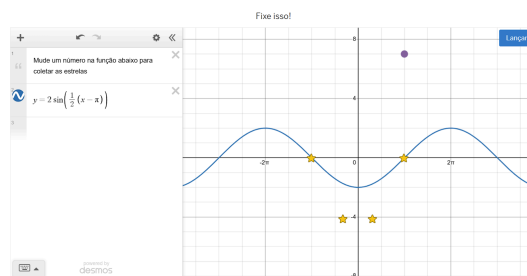
Em relação às questões do Enem, todos os estudantes acertaram a primeira. Já a segunda questão, dos sete estudantes que a responderam, três acertaram a resposta e outros dois erraram – assinalaram a alternativa correta, porém com sinal oposto.

Na **terceira implementação**, foram propostas atividades gamificadas e atividades sobre a alteração dos parâmetros, caracterizando assim a implementação como mais prática do que a anterior. Inicialmente, os alunos deveriam resolver desafios gamificados retirados da própria plataforma para a implementação. A atividade consistia em alterar os parâmetros de uma função trigonométrica a fim de lançar bolas do alto para coletar estrelas. A Figura 35, a Figura 36, a Figura 37 e a Figura 38 apresentam alguns dos desafios propostos.

Figura 35: Atividade gamificada

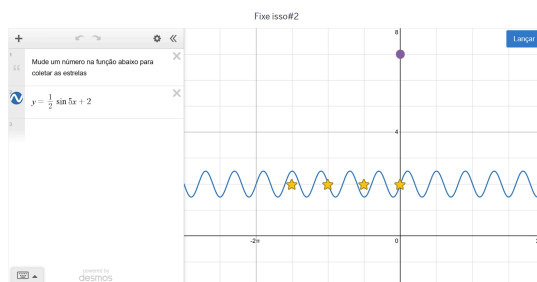
Fonte: Desmos

Figura 36: Atividade gamificada



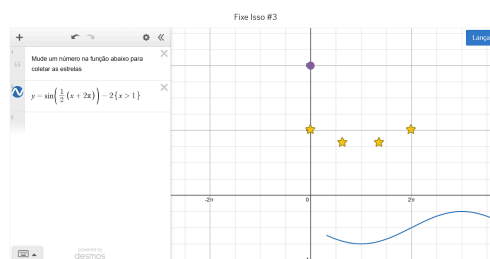
Fonte: Desmos

Figura 37: Atividade gamificada



Fonte: Desmos

Figura 38: Atividade gamificada

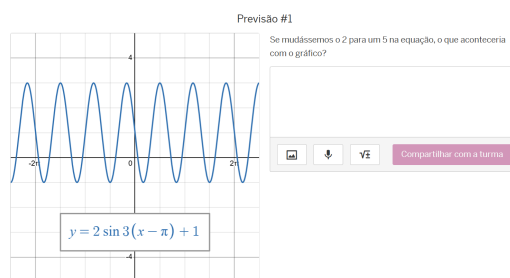


Fonte: Desmos

Os alunos mostraram-se bastante interessados na resolução desses desafios. Durante a discussão final da terceira implementação, um aluno sugeriu uma alteração na sequência de atividades, de modo que os desafios fossem para o início dos encontros, pois, segundo ele, são desafios que despertam o interesse dos estudantes. Ainda segundo esse mesmo estudante, os alunos – mesmo que não compreendam ainda as funções trigonométricas seno e cosseno e a alteração de seus parâmetros – veem-se

desafiados e engajados a participar da atividade devido a seus aspectos gamificados. A Figura 39 mostra uma atividade gamificada. Em seguida, apresentamos as respostas dos alunos.

Figura 39: Atividade gamificada



Fonte: Desmos

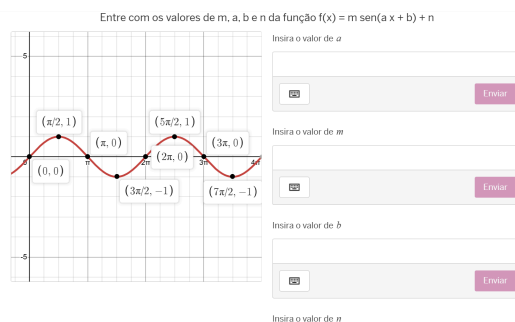
Gladys West: *Aumentaria o valor máximo e mínimo atingido pela função (de -1 a 3 para -4 a 6)*

Karlie Noon: *Vai aumentar a amplitude vertical da curva, os pontos de máximos e mínimos ficam mais distantes entre si.*

MC Escher: *Aumentaria a amplitude entre o máximo e mínimo.*

Ao observarmos as respostas desses alunos, podemos ver que o conceito da alteração desse parâmetro foi assimilado por eles. Alguns responderam de forma mais completa, porém todos entenderam quais seriam as implicações da alteração do parâmetro na função em questão. A Figura 40 mostra a atividade de alteração de parâmetros.

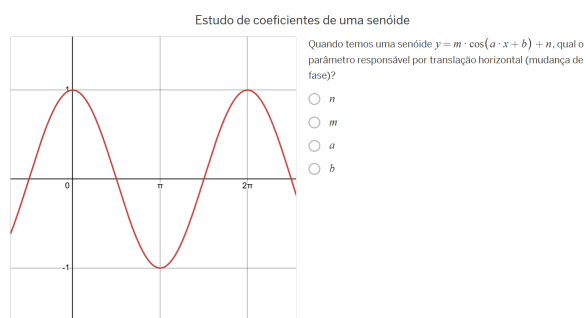
Figura 40: Atividade de alteração de parâmetros



Fonte: Cândido (2023)

Quando questionados sobre os coeficientes da função, a maioria dos alunos assinalou que os coeficientes a e m eram iguais a 1 e b e n eram iguais a zero. A Figura 41 mostra outra atividade de alteração de parâmetros.

Figura 41: Atividade de alteração de parâmetros



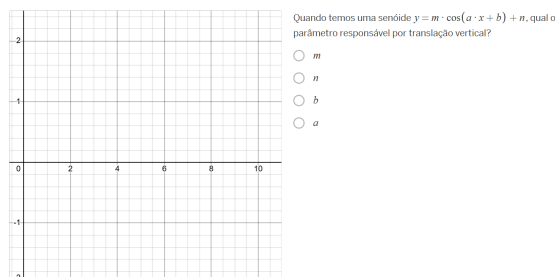
Fonte: Cândido (2023)

No estudo dos coeficientes da senoide, os alunos deveriam observar o gráfico da função e, em seguida, assinalar o parâmetro que era responsável pela translação horizontal. Nesse sentido, todos os alunos conseguiram chegar à conclusão de que o parâmetro b seria a resposta. Vejamos a seguir algumas respostas dos alunos.

Gladys West: O parâmetro b adiciona unidades ao valor de x , o que "adianta" ou "atrasa" o ciclo da cossenoide.

MC Escher: A letra b que faz essa função pois ela que vai decidir o primeiro ponto de origem da onda no eixo x . O aluno Karlie Noon assinalou a alternativa correta, porém não fez comentários sobre.

A partir dos comentários dos alunos, podemos observar que há o entendimento dos estudantes sobre a variação do parâmetro b . Ainda podemos observar que, intuitivamente, eles tendem a partir da construção da função $f(x) = \sin(x)$ para daí observarem como esse valor irá alterar a função original. Para realizarmos essas conjecturas, notamos então a importância da compreensão das funções originais e suas características. A Figura 42 mostra atividade de alteração de parâmetros.

Figura 42: Atividade de alteração de parâmetros

Fonte: Cândido (2023)

Em relação ao parâmetro responsável pela translação vertical, todos os alunos entendem que o coeficiente n seria a resposta, como aparece nas respostas apresentadas a seguir.

Gladys West: *A função seno atinge apenas valores entre -1 e 1, e o parâmetro n altera o conjunto imagem da função para $[-1+n, 1+n]$.*

MC Escher: *O parâmetro n mostrará onde a função cruzará o eixo y , determinando a amplitude dos ciclos.*

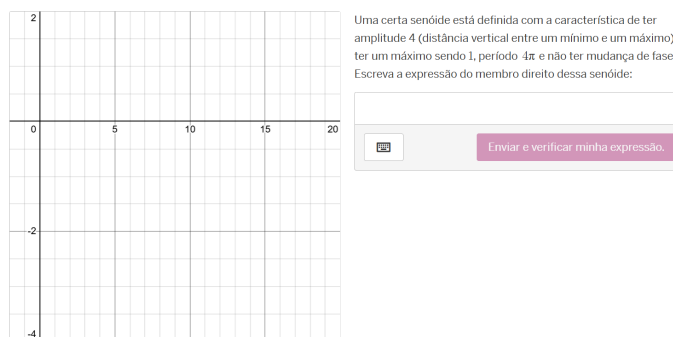
O aluno Karlie Noon assinalou a alternativa correta, porém não fez comentários sobre sua resposta.

A partir desses depoimentos, podemos observar que o primeiro aluno partiu do fato de que a função canônica $f(x) = \cos(x)$ tem sua imagem limitada no intervalo fechado $[-1, 1]$. Então, a partir desse fato, ele concluiu que, como o parâmetro n estava somando unidades à função original, esse fato alteraria seus extremos, realizando assim uma translação vertical.

O segundo estudante chegou à sua resposta a partir de uma constatação mais visual: ele apresenta a ideia de que o parâmetro “ n ” irá alterar a interseção do gráfico com o eixo das ordenadas, porém acaba se equivocando quando afirma que isso

determina a amplitude dos ciclos. A Figura 43 mostra uma atividade de alteração de parâmetros.

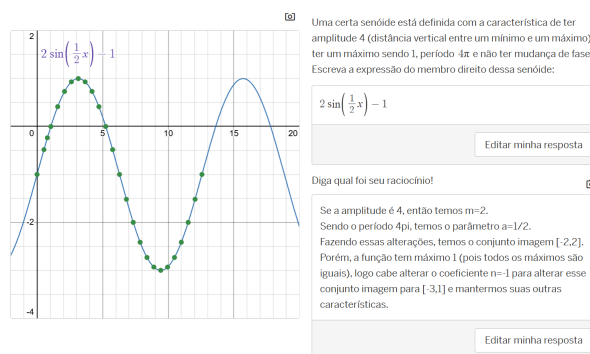
Figura 43: Atividade de alteração de parâmetros



Fonte: Cândido (2023)

Na tarefa mostrada na Figura 43, os alunos deveriam encontrar a expressão que representa a senoide de acordo com as características enunciadas. Vejamos a resolução dos alunos, na Figura 44, na Figura 45 e na Figura 46, seguidas pela transcrição das respostas.

Figura 44: Resolução de Gladys West

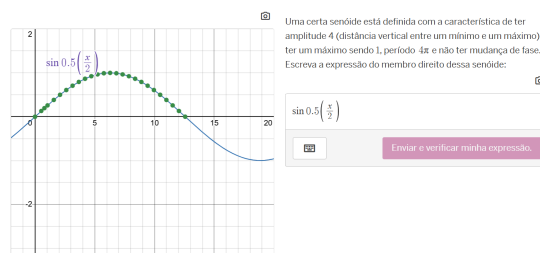


Fonte: registro dos educandos

Gladys West: *Se a amplitude é 4, então temos $m=2$. Sendo o período 4π , temos o parâmetro $a=1/2$. Fazendo essas alterações, temos o conjunto imagem $[-2,2]$. Porém, a função tem máximo 1 (pois todos os máximos são iguais), logo cabe alterar o coeficiente*

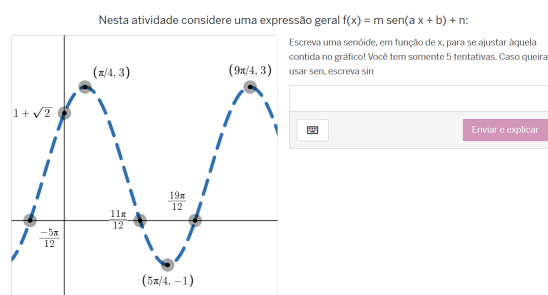
$n=-1$ para alterar esse conjunto imagem para $[-3,1]$ e mantermos suas outras características.

Figura 45: Resolução de Karlie Noon



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 46: Atividade: encontrar a senoide que intercepta os pontos



Fonte: Cândido (2023)

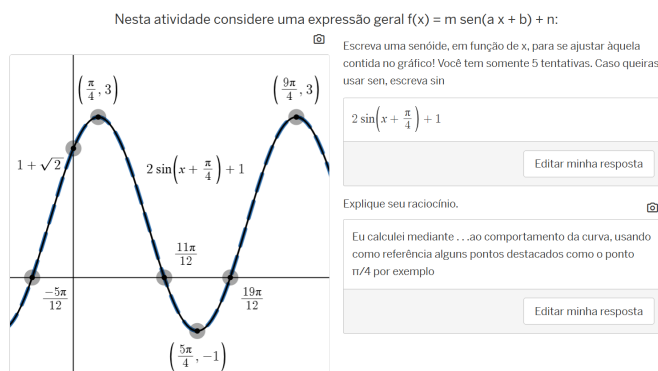
Gladys West: Não houve alteração no período da função, logo $a=1$. Temos que a função atinge seu máximo em $\pi/4$, sendo a função seno com máximo em $\pi/2$. Como $\pi/4 + \pi/4 = \pi/2$, tomamos $b=\pi/4$. Por último, temos que a amplitude é 4, logo temos $m=2$.

Karlie Noon: Eu calculei mediante ao comportamento da curva, usando como referência alguns pontos destacados como o ponto $\pi/4$ por exemplo.

MC Escher: *Eu calculei mediante aos valores dados nos máximos e mínimos e onde eles batiam o eixo X no par ordenado.*

A conclusão dos três licenciandos foi similar, embora tenham utilizado estratégias diferentes. A Figura 47 exibe um exemplo da resolução dos estudantes.

Figura 47: Exemplo da resolução dos estudantes



Fonte: elaborada pelo autor

Nas duas últimas questões do Enem propostas como fixação dos conteúdos, os alunos acertaram em maioria a primeira – a segunda foi respondida de maneira correta por apenas dois estudantes. A Figura 48 e a Figura 49 mostram as atividades do Enem.

Figura 48: Atividade do Enem

Questão 6 - ENEM 2015

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P , em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de Janeiro, $x = 2$ ao mês de Fevereiro e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de Dezembro.

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é:

- ☐ Junho
- ☐ Abril
- ☐ Julho
- ☐ Janeiro
- ☐ Outubro

Fonte: Cândido (2023)

Figura 49: Atividade do Enem

Questão 7 - ENEM 2010

Um satélite de comunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por

$$r(t) = \frac{5865}{1 + 0,15 \times \cos(0,06 t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para calcular o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores r , no apogeu e no perigeu, representado por S . O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de

- ☐ 11.730
- ☐ 5.865
- ☐ 10.965
- ☐ 12.765
- ☐ 12.000

Fonte: Cândido (2023)

05. Considerações Finais

Por meio desta pesquisa foi possível contribuir para o exercício docente com o apoio de tecnologias digitais de geometria dinâmica e interativa. A princípio foram exploradas algumas funcionalidades da plataforma Desmos, buscando assim dialogar com professores e futuros profissionais da educação matemática e instruí-los para manusearem esse recurso.

A plataforma Desmos mostrou-se um recurso com manuseio relativamente simples e o potencial de ser gratuita e intuitiva. Uma desvantagem da plataforma, mesmo com a tradução feita por intermédio do navegador, é a dificuldade de leitura de alguns recursos, visto que algumas partes estão em inglês. Porém, o ambiente do Desmos Sala de Aula apresenta inúmeras possibilidades de criação.

Como próximos passos da pesquisa, podemos destacar a importância do Painel de Controle vinculado ao Desmos, que necessita de uma exploração mais aprofundada.

O ambiente mostrou-se bastante útil no que se refere à avaliação e progresso dos educandos, assim como feedback imediato. Uma possibilidade então é um aprofundamento maior nesse recurso do Desmos Sala de Aula.

Outro destaque importante é a integração com os recursos Polypad, incluídos na plataforma. Tais recursos, se integrados ao Desmos Sala de Aula, permitem trabalhar conteúdos que vão muito além das funções e da geometria. Sendo assim, é de grande importância que o estudo e a análise desse recurso sejam levados em consideração nos próximos passos da pesquisa.

06. Referências

BAIRRAL, Marcelo Almeida. Discurso, interação e aprendizagem: matemática em ambientes virtuais a distância. Seropédica: Edur, 2018. 122 p.

CÂNDIDO, José Valério Moreira. Sala invertida de funções trigonométricas usando a camada de computação do Desmos. 2023. 38 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Pará, Castanhal, 2023.

COLINVAUX, Dominique. Aprendizagem: as questões de sempre, a pesquisa e a docência. Ciência em Tela, Rio de Janeiro, v. 1, n. 1, p. 1-11, jan. 2008. Disponível em: <http://www.cienciaemtela.nutes.ufrj.br/index.html> Acesso em: 13 abr. 2025.

JUNIOR, F. R. S. Ensino de Funções Trigonométricas com applets. 2018. 96 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, RJ, 2018.

RODRIGUES, Márcio Urel; MACEDO, Ediel Pereira; SILVA, Luciano Duarte; GONÇALVES, William Vieira. Dupla descontinuidade contínua na formação inicial de professores de matemática: compreensões dos professores de matemática em serviço nas escolas da educação básica. *Tangram - Revista de Educação Matemática*, [S. l.], v. 5, n. 3, p. 189-224, 30 set. 2022. DOI: <http://dx.doi.org/10.30612/tangram.v5i3.12532>

VALENTE, José Armando. A informática na educação no Brasil: análise e contextualização histórica. In: VALENTE, José Armando. *O computador na sociedade do conhecimento*. Campinas: NIED/Unicamp, 1999. p. 1-13.