UFRRJ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO

A utilização dos jogos lotéricos para o ensino de Probabilidade no Ensino Médio

Victor Arantes Nunes

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

A UTILIZAÇÃO DOS JOGOS LOTÉRICOS PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO

VICTOR ARANTES NUNES

Sob a Orientação do Professor

Orlando dos Santos Pereira

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção de grau de **Mestre em Matemática**, no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática.

Seropédica, RJ

Julho de 2015

Ficha Catalográfica

519.2
N972u
T

Nunes, Victor Arantes, 1984-
A utilização dos jogos lotéricos para o ensino de probabilidade no ensino médio / Victor Arantes Nunes. – 2015.
102 f.: il.

Orientador: Orlando dos Santos Pereira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Bibliografia: f. 101-102.

1. Probabilidades - Teses. 2. Probabilidades – Estudo e ensino (Ensino médio) - Teses. 3. Jogos no ensino de matemática – Teses. I. Pereira, Orlando dos Santos, 1976- II. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

VICTOR ARANTES NUNES

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 30/07/2015

Orlando dos Santos Pereira
____
Orlando dos Santos Pereira. Dr. UFRRJ
(Orientador)

Josiane S. Cordeiro Coelho.
____
Josiane da Silva Cordeiro Coelho. Dr.ª UFRRJ

Gladson O. Antunes
____
Gladson Octaviano Antunes. Dr. UNIRIO

Dedico este trabalho à minha mãe, por todo carinho e dedicação que teve em vida comigo. Foi ela que me deu, em alguns momentos, a esperança para seguir. Não chegaria até aqui se não fosse por ela. Muitas saudades!

Agradecimentos

Primeiramente aos meus pais, José Antônio e Tânia (*in memoriam*), por investirem em mim e nunca medirem esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

Ao meu irmão Davi, minha namorada Paula e a toda minha família, por todo apoio, carinho e torcida que sempre tiveram por mim.

Aos meus colegas de turma do Mestrado, pelo companheirismo e parceria nesses anos.

Aos companheiros de horas e horas de estudo, José Carlos, Helen e Alessandro, pela troca de experiências. Entre um exercício e outro, uma piada pra descontrair. Farão sempre parte da minha vida. Todo o sacrifício valeu a pena.

Ao meu orientador Prof. Dr. Orlando dos Santos Pereira, pelas ideias e pela competência científica. Quando “crescer”, quero ser como você.

Ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, pela oportunidade de realizar o curso.

A CAPES, pelo incentivo financeiro.

A todos os meus professores durante o curso, André, Wanderson, Aline, Pedro e Eulina, que foram tão importantes na minha vida acadêmica e no desenvolvimento deste trabalho.

Aos amigos e colegas, pelos incentivos e apoio constantes.

A todos aqueles que de alguma forma estiveram e estão próximos de mim, fazendo esta vida valer cada vez mais a pena.

Com vocês, queridos, divido a alegria dessa experiência.

"Quando não souberes para onde ir, olha para trás e sabe pelo menos de onde vens"

(Provérbio africano)

RESUMO

NUNES, Victor Arantes. **A Utilização dos Jogos Lotéricos para o Ensino de Probabilidade no Ensino Médio**. 2015. 102p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2015.

Esse trabalho procura destacar a importância do ensino de Probabilidade no Ensino Médio, assunto no qual geralmente os professores tem certa dificuldade em transmitir o conteúdo aos seus alunos. É destacada a relevância da Probabilidade, dado seu vasto campo de aplicação, seja na Estatística, Física ou na Engenharia. Foi realizada uma revisão bibliográfica, onde abordou-se o lado histórico dos jogos de azar e também foram discutidos os aspectos teóricos da probabilidade básica, essencial para a boa compreensão do conteúdo. Em seguida, analisou-se minuciosamente as loterias federais, assim como suas características, regras básicas e probabilidades de se vencer em cada uma delas. Por fim, o presente trabalho sugere uma metodologia de ensino baseada nos jogos lotéricos, com atividades pedagógicas diferenciadas, com o objetivo de motivar e facilitar o entendimento dos alunos do Ensino Médio, bem como estimular os docentes, fugindo da forma tradicional de se lecionar.

Palavras-chave: Ensino, Probabilidade, jogos lotéricos.

ABSTRACT

NUNES, Victor Arantes. **The use of lotteries to Probability Teaching in High School**. 2015. 102p. Dissertation (Professional Master's in Mathematics in National Network – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2015.

This work seeks to highlight the importance of teaching probability in high school subject in which teachers usually have some difficulty in transmitting content to their students. It highlighted the relevance of probability, given its broad scope, either in Statistics, Physics or Engineering. A literature review, which approached the historical side of gambling and have also discussed the theoretical aspects of basic probability, essential for good understanding of the content was performed. Then analyzed thoroughly federal lotteries, as well as its characteristics, basic rules and odds of winning in each of them. Finally, this paper suggests a teaching methodology based on lotteries, with different educational activities, in order to motivate and facilitate the understanding of high school students and encourage teachers, escaping the traditional way of teaching.

Keywords: teaching, probability, lotteries.

LISTA DE QUADROS E FIGURAS

Lista de Tabelas

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Apresento a dissertação intitulada **“A Utilização dos Jogos Lotéricos para o Ensino de Probabilidade no Ensino Médio”**, que se insere na linha de pesquisa sobre formação de professores de matemática do programa de pós-graduação Stricto Sensu, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ) em parceria com a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

O interesse por esse objeto de estudo – O Ensino de Probabilidade – tem relação com a minha experiência profissional. Atuo como Professor de Matemática da Educação Básica e Ensino Superior, lecionando a cadeira de Probabilidade e Estatística (entre outras) para o curso de Engenharia.

A probabilidade não é unanimidade na preferência dos discentes do Ensino Médio no momento em que se deparam com esse assunto em sala de aula. Seja pela forma como o professor passa o conteúdo, seja pela maneira mecânica como os livros abordam o tema, a verdade é que a maioria dos alunos têm muito pouco interesse e extrema dificuldade em aprender probabilidade. O fato é preocupante se for considerado o vasto campo de suas aplicações, tanto as clássicas, como os cálculos atuariais e jogos de azar, quanto as modernas, como probabilidades na Física, Estatística e Engenharia.

Em vista do que foi apresentado, o presente estudo tem o intuito de elaborar uma metodologia diferenciada de ensino, com base na análise das loterias federais. A escolha do tema loteria foi estratégica, pois apostas em jogos de azar, como por exemplo a MegaSena, é costume do brasileiro e está enraizado em nossa cultura. O objetivo é cativar o aluno com situações do cotidiano e despertar nele o interesse pela probabilidade e assim facilitar seu aprendizado.

O trabalho foi estruturado de forma que visa facilitar a leitura e o entendimento do leitor. No capítulo 1, é realizada uma abordagem histórica dos jogos de azar desde os primórdios da civilização, incluindo curiosidades em relação aos principais jogos conhecidos nos dias de hoje. É destacada a criação da loteria no Brasil e no mundo. Também no primeiro capítulo, foi abordado o surgimento dos primeiros conceitos de probabilidade, com destaque para os matemáticos envolvidos. No capítulo 2, é exposto o lado conceitual da Teoria das Probabilidades, fornecendo ao leitor recursos mínimos necessários para o bom entendimento deste trabalho. É bom que se enfatize que a abordagem conceitual limitou-se aos tópicos de probabilidade, uma vez que os conhecimentos relacionados à análise combinatória (conteúdo essencial para o entendimento de probabilidade) não são o foco do trabalho. No capítulo 3, é feita uma apresentação das loterias federais de prognósticos do Brasil, dando ao leitor informações sobre arrecadação por parte do governo, preço dos bilhetes e formas de apostar. É realizado também os cálculos das probabilidades de ganhar em cada uma das loterias, com todos os tipos de apostas possíveis. Por fim, no capítulo 4, foi proposta uma atividade pedagógica chamada “Quem quer ser um milionário?”, dividida em quatro etapas, envolvendo as loterias federais. O objetivo final é estimular o aluno e promover seu aprendizado de forma mais dinâmica, e ao mesmo tempo, fazer com que o professor se recicle e se torne um verdadeiro agente de mudanças.

CAPÍTULO I

FATOS HISTÓRICOS

1.1 A História dos jogos de azar

Segundo o dicionário Aurélio, jogo é "atividade física ou mental fundada em sistema de regras que definem a perda ou ganho" e azar é "casualidade, acaso". Assim, jogos de azar seriam os jogos nos quais a possibilidade de ganhar ou perder independe da destreza do jogador, sendo unicamente a sorte (ou azar) o fator responsável pelo resultado.

Os jogos de azar exercem um grande fascínio no homem e talvez por essa razão sempre estiveram presentes na história da humanidade. Temos alguns exemplos clássicos em que, segundo Breinstein (1997, p.12), os soldados de Pôncio Pilatos sortearam o manto de Cristo enquanto ele padecia na cruz e o conde de Sandwich inventou a refeição que tem seu nome (sanduíche) para não precisar se afastar da mesa de jogo para comer. Até mesmo a grande explosão que deu origem ao mundo, o que a ciência chama de *Big Bang*, já foi explicada de forma diferente. De acordo com a mitologia grega, houve um enorme jogo de dados entre três irmãos: Zeus, Poseidon e Hades. O primeiro ganhou os céus, Poseidon ficou com os mares e Hades, o perdedor, acabou por tornar-se o senhor dos infernos.

Os primeiros registros de jogos de azar conhecidos são extremamente antigos.

> O jogo de azar mais antigo que se conhece foi uma espécie de jogo de dados com o chamado astrálago ou osso metatársico. Este antigo ancestral dos dados atuais era um osso quadrado retirado do tornozelo de carneiros ou veados, sólido, sem tutano e duro a ponto de ser praticamente indestrutível. Astrálagos apareceram em escavações arqueológicas em várias partes do mundo. Pinturas de tumbas egípcias retratam jogos com o astrálago datando de 3500 a.C. e vasos gregos mostram jovens atirando os ossos para dentro de um círculo. Embora o Egito punisse os jogadores compulsivos, forçando-os a polir pedras para as pirâmides, as escavações mostram que os próprios faraós usavam dados chumbados em seus jogos. O jogo de dados (craps), um invento norte americano, deriva de diferentes jogos de dados trazidos da Europa pelos cruzados. Esses jogos costumavam ser chamados de jogos de "azar", de *al zahr*, a palavra árabe para dados (BERNSTEIN, 1997, p.12).

Historicamente, nos países de origem judaico-cristã, os jogos de azar eram considerados proibidos. Apesar disso, houve um bispo belga chamado Wibold, por volta de 960 d.C., que criou um jogo de dados moral. Ele enumerou 56 virtudes e atribuiu cada uma delas aos possíveis resultados do lançamento de três dados (VILALI, 2008).

Em relação aos jogos de cartas, há indícios de que tenham surgido na Ásia. Porém, sua popularização se deu na Europa nos séculos XIV e XV, com o desenvolvimento dos processos de impressão. Um dos jogos de cartas mais famosos, o pôquer, na forma como conhecemos hoje em dia, começou a ser jogado nos Estados Unidos por volta de 1800, e seu desenvolvimento sempre esteve ligado à evolução do "jogo comercial". A figura abaixo retrata uma partida de pôquer disputada no Estado de Mississipi no século XIX.

Figura 1. Jogo de pôquer no Mississipi no século XIX

(http://www.historiadopoker.pokersemdeposito.com/)

A roleta, que nos cassinos é um dos jogos prediletos, originou-se na França no século XVIII. É formada por 36 elementos organizados em 3 colunas de 12 números e um espaço separado para o zero. As chamadas apostas simples são: tirar números pares ou ímpares, tirar vermelho ou preto, e tirar números menores (de 1 a 18) ou números maiores (de 19 a 36).

Umas das modalidades mais populares de jogos de azar, a loteria (principal foco desse trabalho), consiste no sorteio, geralmente de números, em troca de um prêmio. Formas primitivas de sorteio já existiam entre povos como romanos, chineses e egípcios. Porém, apenas em 1538, na França, o Estado teve a iniciativa de regulamentar os concursos em benefício dos cofres públicos.

No Brasil, a loteria surgiu em 1784. A primeira que se tem conhecimento aconteceu em Vila Rica (atual Ouro Preto - MG). Com a quantia arrecadada, foi possível construir o prédio da Câmara dos Vereadores e da Cadeia Pública. Com o sucesso imediato, a prática das loterias espalhou-se por todo o país. O primeiro regulamento sobre o funcionamento das loterias no Brasil foi criado pelo imperador D. Pedro II, através do decreto nº 357, de 27 de abril de 1844.

Até 1961, a administração das loterias era feita por particulares, quando o então presidente Jânio Quadros criou a loteria federal e determinou que apenas o Estado teria a autonomia para legislar sobre o sistema de sorteios. Atualmente, os jogos de azar são proibidos no Brasil, exceto os regularizados e controlados pela União, que desde então, detém seu monopólio através da Caixa Econômica Federal.

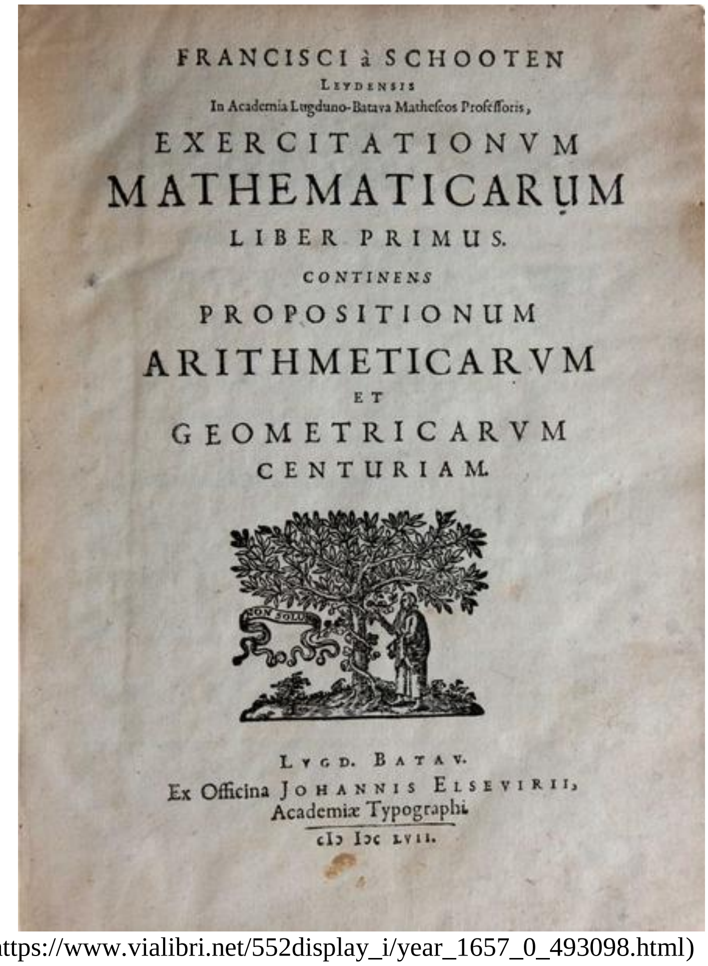
1.2 O Surgimento da Probabilidade

Vários são os fatos históricos relatados que deram início ao surgimento e uso das probabilidades. A verdade é que a probabilidade surgiu do interesse do homem em estudar os fenômenos que envolviam determinadas possibilidades. Um dos mais conhecidos problemas, e que marcou o início da análise sistemática da probabilidade, foi o proposto pelo monge Paccioli em 1494, conhecido como o Problema dos Pontos, que consiste em determinar como deverá ser feita a divisão das apostas quando um jogo é interrompido antes do término. Mais precisamente, suponhamos uma partida entre dois jogadores, na qual o vencedor será aquele que conseguir fazer seis pontos primeiro. A partida é interrompida quando o jogador A tem 5 pontos e o jogador B, 3 pontos. Sendo assim, como deveriam ser divididas as quantias apostadas? A solução sugerida é dividir as apostas proporcionalmente às chances de cada jogador sair vitorioso da partida. Obviamente, o jogador A tem mais chances de vencer em relação ao jogador B. Mas quão maiores são as chances e quão pequenas são as chances do B?

Em 1654, o Problema dos Pontos foi colocado para Pascal por um intelectual francês apaixonado por jogos, Chevalier de Méré, que ficou imortalizado por essa participação no nascimento da teoria da probabilidade. Esse fato deu início a uma série de troca de cartas entre Pascal e Fermat, publicadas em 1679, onde estabeleceram uma forma para se calcular probabilidades e resolveram o problema proposto por Paccioli (GADELHA, 2004).

O primeiro trabalho publicado sobre teoria da probabilidade foi, segundo Gadelha (2004, p.5), um pequeno livro intitulado *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, escrito em 1657 por Christiaan Huygens. Essa obra foi inicialmente publicada como apêndice no livro *Exercitationum Mathematicarum* de Frans van Schooten. A figura abaixo ilustra a capa do referido livro.

Figura 2. Livro *Exercitationum Mathematicarum* de Frans van Schooten



FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS
In Academia Lugduno-Batava Matheſeos Profeſſoris,
EXERCITATIONVM
MATHEMATICARUM
LIBER PRIMUS.
CONTINENS
PROPOSITIONUM
ARITHMETICARVM
ET
GEOMETRICARVM
CENTURIAM.

NON SOLUS

LUGD. BATAV.
Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,
Academiæ Typographi.
CIↃ IↃC LVII.

(https://www.vialibri.net/552display_i/year_1657_0_493098.html)

O livreto de Huygens era composto por uma série de 14 problemas resolvidos envolvendo jogos de azar e se tornou bastante famoso, sendo utilizado até o século 18 como livro de introdução à teoria da probabilidade. Ele provavelmente foi o primeiro a enxergar claramente o aparecimento de uma nova e importante teoria matemática quando escreveu que "...não estamos tratando apenas com jogos mas com os fundamentos de uma nova teoria, tanto profunda como interessante."

Nos dias de hoje, a teoria das probabilidades tem grande utilização em outras áreas da Matemática (como por exemplo Cálculo e Estatística), da Biologia (como a Genética), da Física, da Engenharia, da Economia, da Sociologia, das Ciências Atuariais, da Informática, etc.

CAPÍTULO II

PROBABILIDADE: ASPECTOS CONCEITUAIS

Neste capítulo trataremos de forma concisa alguns conceitos importantes para o desenvolvimento da atividade proposta, sempre com a utilização de exemplos práticos, de forma a propiciar ao leitor os recursos mínimos necessários para o bom entendimento deste trabalho. Não será abordado o estudo de Análise Combinatória, pré-requisito indispensável para o aprendizado de probabilidade, uma vez que o objetivo desse trabalho é apresentar uma proposta pedagógica para o ensino de probabilidade a alunos que já possuem tal conhecimento. Sendo assim, sugerimos um estudo prévio de tais conceitos.

2.1 Experimento Aleatório

Para Morgado (2006, p.113), "experiências que repetidas sob as mesmas condições produzem geralmente resultados diferentes são chamadas de aleatórias." Um experimento aleatório é aquele que possui variabilidade em seus resultados, ou seja, ao se repetir o mesmo experimento sob as mesmas condições, os resultados são imprevisíveis. Experimentos aleatórios são o objeto de estudo do cálculo de probabilidades. Alguns exemplos:

- lançar um dado e obter a face 2;

- retirar uma bola azul de uma urna na qual se encontram 5 bolas verdes e 6 bolas azuis;

- apostar 6 números num jogo de loteria e acertar a quadra.

2.2 Espaço Amostral

O espaço amostral de um experimento aleatório é o conjunto dos resultados possíveis para aquele experimento. São exemplos de espaço amostral:

- quando lançamos uma moeda, existem duas possibilidades: obter cara (c) ou obter coroa (k). Logo, o espaço amostral do experimento é o conjunto: S = {c,k}.

- lançando um dado com 6 faces e verificando a face voltada pra cima, teremos o seguinte espaço amostral: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

- lançando um dado e uma moeda, o espaço amostral seria o conjunto: S = {(1,c), (1,k), (2,c), (2,k), (3,c), (3,k), (4,c), (4,k), (5,c), (5,k), (6,c), (6,k)}

2.3 Evento de um experimento aleatório

Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de evento. Por exemplo:

Jogando um dado ideal com 6 faces e anotando a face voltada pra cima, já sabemos que teremos o seguinte espaço amostral: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Desse experimento, podemos citar alguns eventos:

a) a face voltada pra cima ser um número par: E = {2, 4, 6};

b) a face voltada pra cima ser um número ímpar: E = {1, 3, 5};

c) a face voltada pra cima ser um número maior que 3: E = {4, 5, 6};

d) a face voltada pra cima ser um número que pertença ao intervalo de 1 a 6: E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} **(Evento certo);**

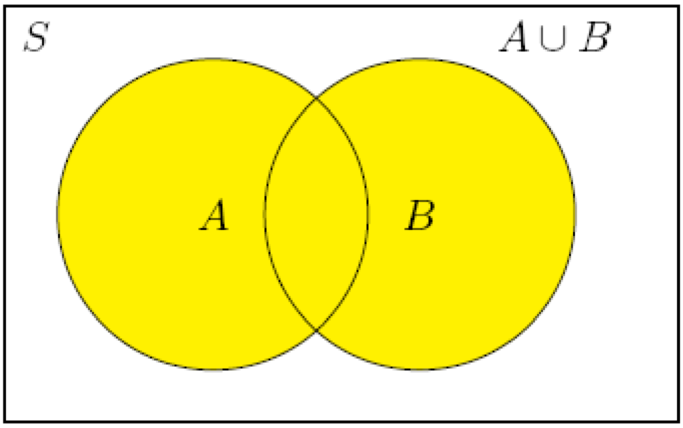
e) a face voltada pra cima ser um número negativo: E = { } **(Evento Impossível).**

2.4 Operações com eventos aleatórios: União, Interseção e Complementar

- **União:**

Se A e B são dois eventos quaisquer, então a união de A e B gera um novo evento que corresponde à ocorrência de pelo menos um deles. Isso quer dizer que pode ocorrer apenas o evento A, apenas o evento B ou ambos simultaneamente. Representamos esse evento da seguinte forma: $A \cup B$.

Figura 3. União de dois eventos: $A \cup B$



Exemplo:

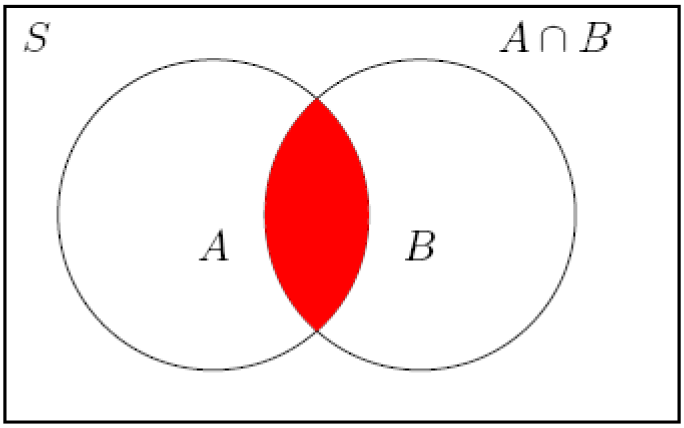
Consideremos uma urna que contém 10 bolas, numeradas de 1 a 10. Retira-se uma bola ao acaso. Assim teríamos o seguinte espaço amostral: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Sejam os eventos A = "ser retirada uma bola com número par" e B = "ser retirada uma bola com número maior que 4". Então: A = {2, 4, 6, 8, 10} e B = {5, 6, 7, 8, 9, 10}. Logo:

$A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

- **Interseção**

Se A e B são dois eventos quaisquer, então a interseção de A e B é equivalente a ocorrência simultânea de ambos. Representamos esse evento da seguinte forma: A ∩ B.

Figura 4. Interseção de dois eventos: A ∩ B



Exemplo:

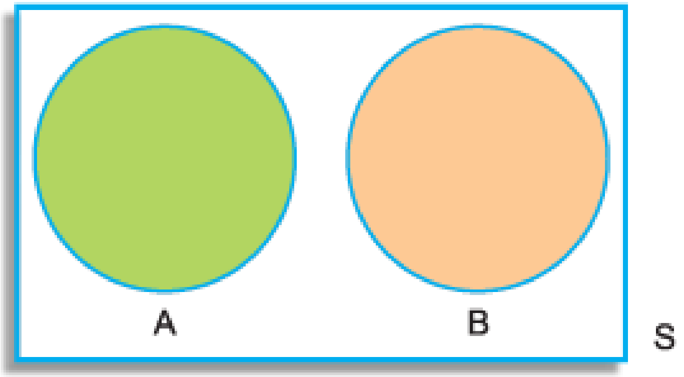
Utilizaremos o exemplo anterior em que uma urna contém 10 bolas, numeradas de 1 a 10 e uma bola é retirada ao acaso. Teríamos o mesmo espaço amostral: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Usaremos também os mesmos eventos A = "ser retirada uma bola com número par" e B = "ser retirada uma bola com número maior que 4". Então: A = {2, 4, 6, 8, 10} e B = {5, 6, 7, 8, 9, 10}. Assim, temos que o evento A ∩ B deverá ser "uma bola com número par" e "uma bola com número maior que 4" simultaneamente. Assim:

A ∩ B = {6, 8, 10}

- **Exclusão**

Se A e B são dois eventos quaisquer, então eles serão mutuamente exclusivos quando não puderem ocorrer simultaneamente, ou seja, quando não possuírem elementos em comum. Então a interseção entre eles será o conjuntos vazio, isto é, A ∩ B = ∅.

Figura 5. Eventos mutuamente exclusivos: A ∩ B = ∅



Exemplo:

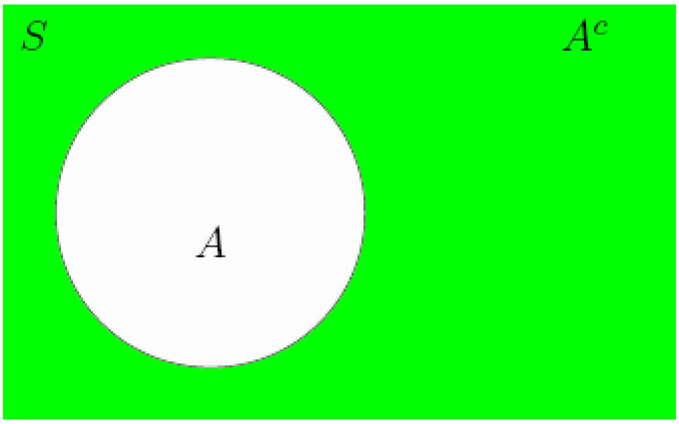
Vamos considerar dessa vez o experimento "lançamento de dois dados". Sejam os eventos A = "soma das faces é um número primo" e B = "soma das faces é um número maior que 11". Então A = {2, 3, 5, 7, 11} e B = {12}. Logo, A e B são mutuamente exclusivos, pois:

A ∩ B = ∅.

- **Complementar**

O complementar de um evento qualquer A, representado por $\overline{A}$ ou A^c, é a negação de A. Sendo assim, o complementar de A é, portanto, formado pelos elementos que não fazem parte do evento A. Logo, S = A ∪ A^c.

Figura 6. Complementar de um evento A: A^c



Exemplo:

Vamos considerar o experimento do lançamento de um dado com 6 faces e o evento A = “face ímpar”. Dessa forma, teremos A^c como sendo o evento “face par”. Assim, A = {1, 3, 5} e A^c = {2, 4, 6}. Notemos que S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} = A ∪ A^c.

Finalmente, definimos abaixo o conceito de probabilidade quando temos um espaço amostral finito e com elementos equiprováveis.

2.5 Definição Clássica de Probabilidade

Seja A um evento de um espaço amostral S finito, de resultados equiprováveis. A fórmula matemática para o cálculo da probabilidade desse evento A, denotado por P(A), é dada por:

$$P(A) = \frac{total\ de\ casos\ favoráveis}{total\ de\ casos\ possíveis} = \frac{n(A)}{n(S)}.$$

Sendo $n(A)$ e $n(S)$ as quantidades de elementos de A e de S, respectivamente.

A probabilidade, assim definida, sempre é um número em $[0,1]$, com $P(S) = 1$ e $P(\emptyset) = 0$.

Exemplos:

1) No lançamento de dois dados distintos, qual a probabilidade de que a soma dos dois números tirados seja 5?

Solução:

Como temos 6 possibilidades em cada dado, o espaço amostral seria representado por 36 pares possíveis: 6 x 6. Vamos representá-lo numa tabela de dupla entrada:

Tabela 1. Tabela de dupla entrada

Dados	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Observamos que os 4 pares assinalados na tabela acima atendem ao proposto no problema, pois 1 + 4 = 5, 2 + 3 = 5, 3 + 2 = 5 e 4 + 1 = 5. Portanto a probabilidade pedida será:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \cong 11{,}11\%.$$

2) Em uma urna existem 20 fichas numeradas de 1 a 20. Retirando-se uma ficha dessa urna, determine a probabilidade do número retirado ser:

a) primo.

Antes de mais nada, vamos definir o espaço amostral desse experimento em questão. Como existem 20 fichas e retiraremos apenas uma, o espaço amostral é facilmente encontrado: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}. Logo, $n(S)$ = 20.

O evento A "ficha retirada ser um número primo" é {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}. Então, $n(A)$ = 8.

Portanto a probabilidade $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 40\%$.

b) múltiplo de 6.

O evento A "ficha retirada ser um número múltiplo de 6" é {6, 12, 18}. Então, $n(A)$ = 3.

Portanto a probabilidade $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{20} = 15\%$.

c) par.

O evento A "ficha retirada ser um número par" é {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}. Então, $n(A)$ = 10.

Portanto a probabilidade $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{20} = 50\%$.

d) menor que 7.

O evento A "ficha retirada ser um número menor que 7" é {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Então, $n(A)$ = 6.

Portanto a probabilidade $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{20} = 30\%$.

e) ímpar maior que 7.

O evento A "ficha retirada ser um número ímpar maior que 7" é {9, 11, 13, 15, 17, 19}. Então $n(A)$ = 6.

Portanto a probabilidade $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{20} = 30\%$.

2.6 Probabilidade da União de Eventos

Considerando dois eventos quaisquer, A e B, de um mesmo espaço amostral S, então $n(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = n(\mathrm{A}) + n(\mathrm{B}) - n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$. Devemos retirar o número de elementos da interseção $n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ apenas uma vez, pois ele foi contado duas vezes (uma em A e uma em B).

Dessa forma, dividindo ambos os membros da igualdade por $n(\Omega)$, teremos:

$\frac{n(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})}{n(\Omega)} = \frac{n(\mathrm{A})}{n(\Omega)} + \frac{n(\mathrm{B})}{n(\Omega)} - \frac{n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{n(\Omega)}$, logo

$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

Exemplos:

1) Em uma sacola existem 10 bolas, numeradas de 1 a 10. Retira-se uma bola ao acaso. Qual a probabilidade de seu número ser par ou maior que 4?

Solução:

Ao analisar esse problema, vemos que ele é composto por dois eventos:

A - retirar um número par;

B - retirar um número maior que 4.

Portanto A={2, 4, 6, 8, 10} com $n(\mathrm{A}) = 5$ e B={5, 6, 7, 8, 9, 10} com $n(B) = 6$. Como o cálculo dessa probabilidade é exatamente o cálculo da probabilidade da união desses dois eventos, devemos também determinar o conjunto $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ = {6, 8, 10}, o que nos dá $n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 3$.

Dessa forma, temos que $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{5}{10} + \frac{6}{10} - \frac{3}{10} = \frac{8}{10}$.

2) Considere um baralho convencional de 52 cartas que possua 4 naipes: copas, ouro, paus e espadas, com 13 cartas cada naipe. Uma carta é retirada ao acaso desse baralho. Qual a probabilidade de que a carta retirada seja uma dama ou uma carta de copas?

Solução:

Identificamos, nesse problema, que temos que calcular a probabilidade da união de dois eventos. São eles:

A- obter-se uma dama;

B- obter-se uma carta de copas.

Há 4 damas e 13 cartas com o naipe copas no baralho: $n(A) = 4$ e $n(B) = 13$. Sabemos que uma das quatro damas existentes possui o naipe copas. Para calcularmos essa probabilidade temos também que determinar o conjunto $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ = {dama de copas}, com $n(A \cap \mathrm{B}) = 1$.

Portanto, $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$.

2.7 Probabilidade da União de Eventos Mutuamente Exclusivos

Dois eventos, A e B, de um experimento aleatório, são ditos mutuamente exclusivos quando não podem ocorrer simultaneamente. Em outras palavras, é quando não há interseção em seus conjuntos, ou seja, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$. Assim, temos que $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0$.

Portanto, $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)}$.

Exemplo:

1) Retira-se de um baralho de 52 cartas, uma carta ao acaso. Queremos determinar a probabilidade de ela ser de espadas ou de ouros.

Solução:

Nesse problema, temos a união dos seguintes eventos:

A – a carta retirada ser do naipe espadas, B – a carta retirada ser do naipe ouros

Notamos que não há a possibilidade de que esses dois eventos ocorram simultaneamente, portanto são mutuamente exclusivos e $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0$.

Como existem 13 cartas de cada naipe no baralho, temos que $\mathrm{P(A)} = \frac{13}{52}$ e $\mathrm{P}(B) = \frac{13}{52}$. Dessa forma, temos $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P(A)} + P(B) = \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$.

2.8 Probabilidade de não Ocorrer um Evento

Sabemos que um determinado evento A pode ocorrer (sucesso) ou não ocorrer (insucesso). Iremos representar por $\overline{A}$ a negação do evento A. Dizemos então que $\overline{A}$ é evento complementar de A, ou, em outras palavras, que A e $\overline{A}$ são eventos complementares.

Sabemos que como $\mathrm{A} \cup \overline{A} = S$, então podemos escrever $P(\mathrm{A} \cup \overline{A}) = \mathrm{P}(S)$. Como A e $\overline{A}$ são eventos mutuamente exclusivos, temos que $\mathrm{P}(S) = P(\mathrm{A} \cup \overline{A}) = P(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\overline{A})$, e como $\mathrm{P}(S) = 1$, temos $1 = P(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\overline{A})$, o que nos leva a $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - P(\mathrm{A})$.

Exemplo:

1) No lançamento de dois dados com 6 faces cada, qual a probabilidade da soma não ser um número primo?

Solução:

Temos a possibilidade de considerar esse evento como sendo o complementar do evento “a soma ser um número primo”.

Assim, vamos calcular a probabilidade de A: “a soma ser um número primo”. Como os números primos de 1 a 12 são 2, 3, 5, 7 e 11, temos que os pares cuja soma resulta num desses números são: (1,1), (1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3), (5,2), (5,6), (6,1) e (6,5).

Logo, $P(\mathrm{A}) = \frac{15}{36}$. Por consequência, temos que a probabilidade do evento complementar “a soma não ser um número primo” é:

$$\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - P(\mathrm{A}) = 1 - \frac{15}{36} = \frac{21}{36}.$$

Notemos que em várias situações é mais fácil calcular a probabilidade do complementar e usar essa regra.

2.9 Probabilidade Condicional

Chamamos de probabilidade condicional, a probabilidade de ocorrer um evento B, tendo ocorrido o evento A, e representamos por $P(\mathrm{A}/\mathrm{B})$. Notamos que, o número de casos favoráveis a realização de B, tendo ocorrido A, é $n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$. Assim, como já se sabe que ocorreu o evento A, a quantidade de resultados possíveis para determinado experimento reduz-se a $n(\mathrm{A})$ (JULIANELLI, 2009).

Dessa forma, temos que:

$$P(B/\mathrm{A}) = \frac{total\ de\ casos\ favoráveis}{total\ de\ casos\ possíveis} = \frac{n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{n(A)};$$

Se $n(\mathrm{A}) \neq 0$, podemos dividir numerador e denominador por $n(\Omega)$ e assim teremos:

$$P(B/\mathrm{A}) = \frac{\frac{n(\mathrm{A}\ \cap\ \mathrm{B})}{n(S)}}{\frac{n(\mathrm{A})}{n(S)}}.$$

Logo, chegamos a definição de probabilidade condicional:

$$P(B/\mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{A}\ \cap\ \mathrm{B})}{P(A)}, se\ P(A) \neq 0.$$

Exemplo:

1) Considere uma urna com 100 bolas, numeradas de 1 a 100. Sorteia-se uma bola e sabe-se que ela é par. Vamos calcular a probabilidade do número da bola sorteada ser múltiplo de 10.

Solução:

Temos nesse problema os eventos:

A – o número é par. Logo, $n(\text{A}) = 50$;

B – o número é múltiplo de 10. Logo, $n(\text{B}) = 10$.

E ainda:

A ∩ B – o número é par e múltiplo de 10. Logo, $n(A \cap \text{B}) = 10$

Portanto, a probabilidade do número sorteado ser múltiplo de 10, tendo conhecimento que a bola sorteada é par, é:

$$P(B/\text{A}) = \frac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(A)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{50}{100}} = \frac{1}{5}.$$

2.10 Eventos Independentes

Dois eventos são ditos independentes se a probabilidade de ocorrer um independe da ocorrência do outro. Nesse caso, $P(B/\text{A}) = \text{P}(\text{B})$.

Portanto, para dois eventos independentes, chegamos a conclusão que:

$$P(B/\text{A}) = P(B) = \frac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(A)}, logo$$

$$P(A \cap B) = P(A).P(B).$$

Exemplo:

1) Uma moeda e um dado são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de ocorrer coroa e número primo?

Solução:

Vamos primeiramente determinar o espaço amostral, que, considerando C igual a cara e K coroa, fica da seguinte forma:

Ω = {(1,c), (1,k), (2,c), (2,k), (3,c), (3,k), (4,c), (4,k), (5,c), (5,k), (6,c), (6,k)} ∴ $n(\Omega)$ = 12

Temos também os seguintes eventos:

A – ocorrer coroa. Logo, $P(\text{A}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$;

B – ocorrer número primo. Logo, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

É simples verificar no texto que esses dois eventos são independentes, pois a ocorrência de um não interfere na ocorrência do outro. Então, devemos usar a fórmula:

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Logo,

$P(A \cap B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\%$.

A seguir, discutiremos um modelo de probabilidade que abrange várias situações práticas.

2.10 Distribuição Binomial

Vamos considerar uma sequência de n realizações independentes de um experimento aleatório, com apenas dois possíveis resultados: um associado ao sucesso e outro ao insucesso (fracasso). Seja p a probabilidade de sucesso em cada realização e q a probabilidade de insucesso, ou seja, $q = 1 - p$. Desejamos calcular a probabilidade P, de ocorrer exatamente k

sucessos, dentre as n realizações. A probabilidade de ocorrer exatamente k sucessos em n realizações é dada pela seguinte fórmula:

$$P = \binom{n}{k} . p^k . q^{n-k}$$

Exemplos:

1) Um exame consta de 20 questões do tipo certo ou errado. Se um aluno "chutar" todas as respostas, qual a probabilidade de ele acertar exatamente 10 questões?

Solução:

O problema trata-se de uma distribuição binomial, onde cada realização será feito sob as mesmas condições, ou seja, há a independência das realizações. Sendo assim, temos que o número de realizações é $n = 20$, a probabilidade de sucesso em cada realização é $p = 0{,}5$ (acertar a questão) e, portanto, a probabilidade de fracasso é $q = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$. Aplicando a fórmula para $k = 10$, temos:

$$P = \binom{20}{10} . p^{10} . q^{20-0} = \frac{20!}{10!\,10!} . (0{,}5)^{10} . (0{,}5)^{10} \cong 17{,}62\%$$

2) Um dado é lançado 5 vezes. Qual a probabilidade de que o "4" apareça exatamente 3 vezes?

Solução:

Mais uma vez, o problema trata-se de uma distribuição binomial, onde cada realização será feito sob as mesmas condições, ou seja, há a independência das realizações. Nesse caso, temos que a probabilidade de sucesso em cada realização é dada por $p = \frac{1}{6}$, a probabilidade de insucesso é $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ e o número total de realizações é $n = 5$. Desejamos ter exatamente $k = 3$ sucessos. Portanto:

$$P = \binom{5}{3} . p^3 . q^{5-3} = \frac{5!}{3!\,2!} . \left(\frac{1}{6}\right)^3 . \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cong 3{,}22\%$$

CAPÍTULO III

LOTERIAS FEDERAIS

As loterias federais sempre despertaram interesse no brasileiro, em geral, pela chance de mudar de vida e crescer financeiramente. Por outro lado, têm sido uma importante fonte de arrecadação para o governo, conforme mostra o gráfico a seguir, extraído do site oficial da Caixa Econômica Federal:

Figura 7. Total arrecadado, em reais, pelas loterias da CAIXA nos últimos anos

Pode-se perceber que a arrecadação vem aumentando com o passar dos anos, atingindo a marca, em 2013, de quase 12 bilhões de reais. Tal fato apenas comprova a paixão do brasileiro por jogos de azar e mostra o crescimento desse interesse em jogos lotéricos.

Neste capítulo, conheceremos todas as loterias federais de prognósticos do Brasil, administradas pela Caixa Econômica Federal, bem como suas regras, características e as probabilidades de se vencer. Elas são divididas em Loterias de Prognósticos Numéricos (Mega Sena, Lotofácil, Quina, Dupla Sena, Loteca e Timemania) e Loterias de Prognósticos Esportivos (Lotogol e Loteca).

3.1 Loterias de Prognósticos Numéricos

As loterias de Prognósticos Numéricos são aquelas que utilizam números como fonte de aposta, entre os quais, o apostador deverá marcar aqueles que serão sorteados para se tornar vencedor.

3.1.1 Mega Sena

3.1.1.1 Como jogar

A Mega Sena, jogo de aposta mais famoso do Brasil, é a que normalmente paga os maiores prêmios aos ganhadores. Nela, são sorteados 6 números de um total de 60 disponíveis e o apostador deve marcar de 6 a 15 números. Para sair vitorioso, o apostador deve acertar 4, 5 ou 6 números. Hoje, a o valor da aposta mínima corresponde a R$ 3,50 (6 números) e a máxima a R$ 17.517,50 (15 números). Quanto mais números se apostar, maior o preço do bilhete e consequentemente, maior a probabilidade de vencer. Caso não haja vencedor, o prêmio fica acumulado para os próximos concursos.

O último sorteio da Mega Sena no ano é denominado “Mega da Virada”. Nela, diferente da Mega Sena tradicional, o prêmio não acumula. Não havendo vencedor com 6 números (sena), ganha quem acertar 5 números (quina). Não existindo apostas premiadas com 5 números, leva o prêmio quem acertar 4 (quadra), e assim sucessivamente.

3.1.1.2 Probabilidades

O número de elementos do espaço amostral, para qualquer aposta que se faça na Mega Sena, será sempre o mesmo. Vejamos, como não importa a ordem em que os números são sorteados, a quantidade de combinações possíveis de 6 números num total de 60 disponíveis será a combinação simples de sessenta elementos tomados 6 a 6:

$$n(S) = C_{60,6} = \frac{60!}{6!\,54!} = 50.063.860.$$

Vamos agora calcular as probabilidades de se fazer a sena (acertar 6 números), a quina (acertar 5 números) e a quadra (acertar 4 números).

- **Sena**

- Apostando 6 números:

Com uma aposta simples, a probabilidade seria:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{C_{6,6}}{C_{60,6}} = \frac{1}{50.063.860} \cong 2.10^{-8}$$

- Apostando 7 números:

Agora devemos ver quantas combinações de 6 números existem em 7 escolhidos. A probabilidade, nesse caso, ficaria:

$$\frac{C_{7,6}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{7!}{6!\,1!}}{50.063.860} = \frac{7}{50.063.860} = \frac{1}{7.151.980} \cong 1{,}4.10^{-7}$$

- Apostando 8 números:

De forma análoga ao cálculo anterior, seguiremos o mesmo raciocínio:

$$\frac{C_{8,6}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{8!}{6!\,2!}}{50.063.860} = \frac{28}{50.063.860} = \frac{1}{1.787.995} \cong 5{,}6.10^{-7}$$

- Apostando 9 números:

$$\frac{C_{9,6}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{9!}{6!\,3!}}{50.063.860} = \frac{84}{50.063.860} \cong \frac{1}{595.998} \cong 1{,}7.10^{-6}$$

- Apostando 10 números:

$$\frac{C_{10,6}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{10!}{6!\,4!}}{50.063.860} = \frac{210}{50.063.860} \cong \frac{1}{238.399} \cong 4{,}2.10^{-6}$$

- Apostando 11 números:

$$\frac{C_{11,6}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{11!}{6!\,5!}}{50.063.860} = \frac{462}{50.063.860} \cong \frac{1}{108.363} \cong 9{,}2.\,10^{-6}$$

- Apostando 12 números:

$$\frac{C_{12,6}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{12!}{6!\,6!}}{50.063.860} = \frac{924}{50.063.860} \cong \frac{1}{54.182} \cong 1{,}8.\,10^{-5}$$

- Apostando 13 números:

$$\frac{C_{13,6}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{13!}{6!\,7!}}{50.063.860} = \frac{1716}{50.063.860} \cong \frac{1}{29.175} \cong 3{,}4.\,10^{-5}$$

- Apostando 14 números:

$$\frac{C_{14,6}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{14!}{6!\,8!}}{50.063.860} = \frac{3003}{50.063.860} \cong \frac{1}{16.671} \cong 6.\,10^{-5}$$

- Apostando 15 números:

$$\frac{C_{15,6}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{15!}{6!\,9!}}{50.063.860} = \frac{5005}{50.063.860} \cong \frac{1}{10.003} \cong 10^{-4}$$

- **<u>Quina</u>**

- Apostando 6 números:

Com um jogo de 6 números, existem 6 combinações possíveis de se fazer a quina, que é exatamente a combinação de 6 tomados 5 a 5 ($C_{6,5}$). Isolando a quina, temos que o último número sorteado não poderá ser nenhum dos 6 apostados, sobrando para isso 54 números possíveis ($C_{54,1}$). Portanto a probabilidade é:

$$\frac{C_{6,5}.\,C_{54,1}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{6!}{5!\,1!}\cdot\frac{54!}{1!\,53!}}{50.063.860} = \frac{324}{50.063.860} \cong \frac{1}{154.518} \cong 6{,}5.\,10^{-6}$$

- Apostando 7 números:

Com um jogo de 7 números, existem 21 combinações possíveis de se fazer a quina, que é exatamente a combinação de 7 tomados 5 a 5 ($C_{7,5}$). Isolando a quina, temos que o último número sorteado não poderá ser nenhum dos 7 apostados, sobrando para isso 53 números possíveis ($C_{53,1}$). Portanto a probabilidade é:

$$\frac{C_{7,5}.\,C_{53,1}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{7!}{5!\,2!}\cdot\frac{53!}{1!\,52!}}{50.063.860} = \frac{1.113}{50.063.860} \cong \frac{1}{44.981} \cong 2{,}2.\,10^{-5}$$

- Apostando 8 números:

De forma análoga aos cálculos anteriores com 6 e 7 números, seguiremos o mesmo raciocínio para os próximos:

$$\frac{C_{8,5}.\,C_{52,1}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{8!}{5!\,3!}\cdot\frac{52!}{1!\,51!}}{50.063.860} = \frac{2.912}{50.063.860} \cong \frac{1}{17.192} \cong 5{,}8.\,10^{-5}$$

- Apostando 9 números:

$$\frac{C_{9,5}.\,C_{51,1}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{9!}{5!\,4!}\cdot\frac{51!}{1!\,50!}}{50.063.860} = \frac{6.426}{50.063.860} \cong \frac{1}{7.791} \cong 1{,}3.\,10^{-4}$$

- Apostando 10 números:

$$\frac{C_{10,5}.\,C_{50,1}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{10!}{5!\,5!}\cdot\frac{50!}{1!\,49!}}{50.063.860} = \frac{12.600}{50.063.860} \cong \frac{1}{3.973} \cong 2{,}5.\,10^{-4}$$

- Apostando 11 números:

$$\frac{C_{11,5}.\,C_{49,1}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{11!}{5!\,6!}\cdot\frac{49!}{1!\,48!}}{50.063.860} = \frac{22.638}{50.063.860} \cong \frac{1}{2.211} \cong 4{,}5.\,10^{-4}$$

- Apostando 12 números:

$$\frac{C_{12,5}.\,C_{48,1}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{12!}{5!\,7!}\cdot\frac{48!}{1!\,47!}}{50.063.860} = \frac{38.016}{50.063.860} \cong \frac{1}{1.317} \cong 7{,}6.\,10^{-4}$$

- Apostando 13 números:

$$\frac{C_{13,5}.\,C_{47,1}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{13!}{5!\,8!}\cdot\frac{47!}{1!\,46!}}{50.063.860} = \frac{60.489}{50.063.860} \cong \frac{1}{828} \cong 1{,}2.\,10^{-3}$$

- Apostando 14 números:

$$\frac{C_{14,5}.\,C_{46,1}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{14!}{5!\,9!}\cdot\frac{46!}{1!\,45!}}{50.063.860} = \frac{92.092}{50.063.860} \cong \frac{1}{544} \cong 1{,}8.\,10^{-3}$$

- Apostando 15 números:

$$\frac{C_{15,5}.\,C_{45,1}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{15!}{5!\,10!}\cdot\frac{45!}{1!\,44!}}{50.063.860} = \frac{135.135}{50.063.860} \cong \frac{1}{370} \cong 2{,}7.\,10^{-3}$$

- **<u>Quadra</u>**

- Apostando 6 números:

Com um jogo de 6 números, existem 15 combinações possíveis de se fazer a quadra, que é exatamente a combinação de 6 tomados 4 a 4 ($C_{6,4}$). Isolando a quadra, temos que os últimos 2 números sorteados não poderão ser nenhum dos 6 apostados, sobrando para isso 54 números que poderão entrar no lugar desses 2, ou seja, 1431 combinações possíveis ($C_{54,2}$). Portanto a probabilidade é:

$$\frac{C_{6,4}.C_{54,2}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{6!}{4!\,2!}\cdot\frac{54!}{2!\,52!}}{50.063.860} = \frac{21.465}{50.063.860} \cong \frac{1}{2.332} \cong 4{,}3.\,10^{-4}$$

- Apostando 7 números:

Com um jogo de 7 números, existem 35 combinações possíveis de se fazer a quadra, que é exatamente a combinação de 7 tomados 4 a 4 ($C_{7,4}$). Isolando a quadra, temos que os últimos 2 números sorteados não poderão ser nenhum dos 7 apostados, sobrando para isso 53 números que poderão entrar no lugar desses 2, ou seja, 1378 combinações possíveis ($C_{54,2}$). Portanto a probabilidade é:

$$\frac{C_{7,4}.C_{53,2}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{7!}{4!\,3!}\cdot\frac{53!}{2!\,51!}}{50.063.860} = \frac{48.230}{50.063.860} \cong \frac{1}{1.038} \cong 9{,}6.\,10^{-4}$$

- Apostando 8 números:

De forma análoga aos cálculos anteriores com 6 e 7 números, seguiremos o mesmo raciocínio para os próximos:

$$\frac{C_{8,4}.C_{52,2}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{8!}{4!\,4!}\cdot\frac{52!}{2!\,50!}}{50.063.860} = \frac{92.820}{50.063.860} \cong \frac{1}{539} \cong 1{,}9.\,10^{-3}$$

- Apostando 9 números:

$$\frac{C_{9,4}.C_{51,2}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{9!}{4!\,5!}\cdot\frac{51!}{2!\,49!}}{50.063.860} = \frac{160.650}{50.063.860} \cong \frac{1}{312} \cong 3{,}2.\,10^{-3}$$

- Apostando 10 números:

$$\frac{C_{10,4}.C_{50,2}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{10!}{4!\,6!}\cdot\frac{50!}{2!\,48!}}{50.063.860} = \frac{257.250}{50.063.860} \cong \frac{1}{195} \cong 5{,}1.10^{-3}$$

- Apostando 11 números:

$$\frac{C_{11,4}.C_{49,2}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{11!}{4!\,7!}\cdot\frac{49!}{2!\,47!}}{50.063.860} = \frac{388.080}{50.063.860} \cong \frac{1}{129} \cong 7{,}8.10^{-3}$$

- Apostando 12 números:

$$\frac{C_{12,4}.C_{48,2}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{12!}{4!\,8!}\cdot\frac{48!}{2!\,46!}}{50.063.860} = \frac{558.360}{50.063.860} \cong \frac{1}{90} \cong 1{,}1.10^{-2}$$

- Apostando 13 números:

$$\frac{C_{13,4}.C_{47,2}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{13!}{4!\,9!}\cdot\frac{47!}{2!\,45!}}{50.063.860} = \frac{772.915}{50.063.860} \cong \frac{1}{65} \cong 1{,}5.10^{-2}$$

- Apostando 14 números:

$$\frac{C_{14,4}.C_{46,2}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{14!}{4!\,10!}\cdot\frac{46!}{2!\,44!}}{50.063.860} = \frac{1.036.035}{50.063.860} \cong \frac{1}{48} \cong 2{,}1.10^{-2}$$

- Apostando 15 números:

$$\frac{C_{15,4}.C_{45,2}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{15!}{4!\,11!}\cdot\frac{45!}{2!\,43!}}{50.063.860} = \frac{1.351.350}{50.063.860} \cong \frac{1}{37} \cong 2{,}7.10^{-2}$$

Tabela 2. Tabela Resumo das Probabilidades na Mega Sena

Quantidade de números apostados	**Probabilidade de acerto**		
	Sena	**Quina**	**Quadra**
6	2.10^{-8}	$6{,}5.10^{-6}$	$4{,}3.10^{-4}$
7	$1{,}4.10^{-7}$	$2{,}2.10^{-5}$	$9{,}6.10^{-4}$
8	$5{,}6.10^{-7}$	$5{,}8.10^{-5}$	$1{,}9.10^{-3}$
9	$1{,}7.10^{-6}$	$1{,}3.10^{-4}$	$3{,}2.10^{-3}$
10	$4{,}2.10^{-6}$	$2{,}5.10^{-4}$	$5{,}1.10^{-3}$
11	$9{,}2.10^{-6}$	$4{,}5.10^{-4}$	$7{,}8.10^{-3}$
12	$1{,}8.10^{-5}$	$7{,}6.10^{-4}$	$1{,}1.10^{-2}$
13	$3{,}4.10^{-5}$	$1{,}2.10^{-3}$	$1{,}5.10^{-2}$
14	6.10^{-5}	$1{,}8.10^{-3}$	$2{,}1.10^{-2}$
15	10^{-4}	$2{,}7.10^{-3}$	$2{,}7.10^{-2}$

3.1.2 Lotofácil

3.1.2.1 Como jogar

Na Lotofácil são sorteados 15 números e o apostador marca entre 15 e 18 números num total de 25 disponíveis, de 1 a 25. Atualmente, a aposta mínima (15 números) custa R$ 2,00, enquanto que a máxima (18 números) está custando R$ 1.632,00. Ganha o apostador que acertar 11, 12, 13, 14 ou 15 números.

3.1.2.2 Probabilidades

A exemplo da Mega Sena, o número de elementos do espaço amostral, para qualquer aposta que se faça na Lotofácil, será sempre o mesmo. Vejamos, como não importa a ordem em que os números são sorteados, a quantidade de combinações possíveis de 15 números num total de 25 disponíveis será a combinação simples de 25 elementos tomados 15 a 15:

$n(S) = C_{25,15} = \frac{25!}{15!\,10!} = 3.268.760.$

Vamos agora calcular as probabilidades de se acertar 15, 14, 13, 12 e 11 números.

- **Acertar 15 números**

- Apostando 15 números:

Com uma aposta simples de 15 números, a probabilidade é calculada da seguinte forma:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{C_{25,15}} = \frac{1}{3.268.760} \cong 3{,}1.\,10^{-7}$$

- Apostando 16 números:

Nesse caso, devemos ver quantas combinações de 15 números existem em 16 escolhidos. A probabilidade, nesse caso, ficaria:

$$\frac{C_{16,15}}{C_{25,15}} = \frac{\frac{16!}{1!\,15!}}{3.268.760} = \frac{16}{3.268.760} \cong \frac{1}{204.298} \cong 4{,}9.\,10^{-6}$$

- Apostando 17 números:

De forma análoga ao cálculo anterior, seguiremos o mesmo raciocínio:

$$\frac{C_{17,15}}{C_{25,15}} = \frac{\frac{17!}{15!\,2!}}{3.268.760} = \frac{136}{3.268.760} = \frac{1}{24.035} \cong 4{,}2.\,10^{-5}$$

- Apostando 18 números:

$$\frac{C_{18,15}}{C_{25,15}} = \frac{\frac{18!}{15!\,3!}}{3.268.760} = \frac{816}{3.268.760} \cong \frac{1}{4.006} \cong 2{,}5.\,10^{-4}$$

- **Acertar 14 números**

- Apostando 15 números:

Com um jogo de 15 números, existem 15 combinações possíveis para se acertar 14 números, que é exatamente a combinação de 15 tomados 14 a 14 ($C_{15,4}$). Isolando esse jogo de 14 números, temos que o último número sorteado não poderá ser nenhum dos 15 apostados, sobrando para isso 10 números possíveis ($C_{10,1}$). Assim, a probabilidade é:

$$\frac{C_{15,14}.C_{10,1}}{C_{25,15}} = \frac{\frac{15!}{14!\,1!}\cdot\frac{10!}{1!\,9!}}{3.268.760} = \frac{150}{3.268.760} \cong \frac{1}{21.792} \cong 4{,}6.10^{-5}$$

- Apostando 16 números:

Com um jogo de 16 números, existem 120 combinações possíveis para se acertar 14 números, que é exatamente a combinação de 16 tomados 14 a 14 ($C_{16,4}$). Isolando esse jogo de 14 números, temos que o último número sorteado não poderá ser nenhum dos 16 apostados, sobrando para isso 9 números possíveis ($C_{9,1}$). Assim, a probabilidade é:

$$\frac{C_{16,14}.C_{9,1}}{C_{25,15}} = \frac{\frac{16!}{14!\,2!}\cdot\frac{9!}{1!\,8!}}{3.268.760} = \frac{1.080}{3.268.760} \cong \frac{1}{3.027} \cong 3{,}3.10^{-4}$$

- Apostando 17 números:

De forma análoga aos cálculos anteriores com 15 e 16 números, seguiremos o mesmo raciocínio para os próximos:

$$\frac{C_{17,14}.C_{8,1}}{C_{25,15}} = \frac{\frac{17!}{14!\,3!}\cdot\frac{8!}{1!\,7!}}{3.268.760} = \frac{5.440}{3.268.760} \cong \frac{1}{601} \cong 1{,}7.10^{-3}$$

- Apostando 18 números:

$$\frac{C_{18,14}.C_{7,1}}{C_{25,15}} = \frac{\frac{18!}{14!\,4!}\cdot\frac{7!}{1!\,6!}}{3.268.760} = \frac{21.420}{3.268.760} \cong \frac{1}{153} \cong 6{,}5.10^{-3}$$

- **Acertar 13 números**

- Apostando 15 números:

Com um jogo de 15 números, existem 105 combinações possíveis para se acertar 13 números, que é exatamente a combinação de 15 tomados 13 a 13 ($C_{15,13}$). Isolando esse jogo de 13 números, temos que os últimos dois números sorteados não poderá ser nenhum dos 15 apostados, sobrando para isso 45 combinações possíveis ($C_{10,2}$). Assim, a probabilidade é:

$$\frac{C_{15,13}.C_{10,2}}{C_{25,15}} = \frac{\frac{15!}{13!\,2!}\cdot\frac{10!}{2!\,8!}}{3.268.760} = \frac{4725}{3.268.760} \cong \frac{1}{692} \cong 1,4.10^{-3}$$

- Apostando 16 números:

Com um jogo de 16 números, existem 560 combinações possíveis para se acertar 13 números, que é exatamente a combinação de 16 tomados 13 a 13 ($C_{16,13}$). Isolando esse jogo de 13 números, temos que os últimos dois números sorteados não poderá ser nenhum dos 16 apostados, sobrando para isso 36 combinações possíveis ($C_{9,2}$). Assim, a probabilidade é:

$$\frac{C_{16,13}.C_{9,2}}{C_{25,15}} = \frac{\frac{16!}{13!\,3!}\cdot\frac{9!}{2!\,7!}}{3.268.760} = \frac{20.160}{3.268.760} \cong \frac{1}{162} \cong 6,2.10^{-3}$$

- Apostando 17 números:

Adotando o mesmo raciocínio das apostas anteriores com 15 e 16 números, teremos os seguintes resultados:

$$\frac{C_{17,13}.C_{8,2}}{C_{25,15}} = \frac{\frac{17!}{13!\,4!}\cdot\frac{8!}{2!\,6!}}{3.268.760} = \frac{66.640}{3.268.760} \cong \frac{1}{49} \cong 2.10^{-2}$$

- Apostando 18 números:

$$\frac{C_{18,13}.C_{7,2}}{C_{25,15}} = \frac{\frac{18!}{13!\,5!}\cdot\frac{7!}{2!\,5!}}{3.268.760} = \frac{179.928}{3.268.760} \cong \frac{1}{18} \cong 5,6.10^{-2}$$

- **Acertar 12 números**

- Apostando 15 números:

Com um jogo de 15 números, existem 455 combinações possíveis para se acertar 12 números, que é exatamente a combinação de 15 tomados 12 a 12 ($C_{15,12}$). Isolando esse jogo de 12 números, temos que os últimos três números sorteados não poderá ser nenhum dos 15 apostados, sobrando para isso 120 combinações possíveis ($C_{10,3}$). Assim, a probabilidade é:

$$\frac{C_{15,12}.C_{10,3}}{C_{25,15}} = \frac{\frac{15!}{12!\,3!}\cdot\frac{10!}{3!\,7!}}{3.268.760} = \frac{54.600}{3.268.760} \cong \frac{1}{60} \cong 1{,}7.10^{-2}$$

- Apostando 16 números:

Com um jogo de 16 números, existem 1820 combinações possíveis para se acertar 12 números, que é exatamente a combinação de 16 tomados 12 a 12 ($C_{16,12}$). Isolando esse jogo de 12 números, temos que os últimos três números sorteados não poderá ser nenhum dos 16 apostados, sobrando para isso 84 combinações possíveis ($C_{9,3}$). Assim, a probabilidade é:

$$\frac{C_{16,12}.C_{9,3}}{C_{25,15}} = \frac{\frac{16!}{12!\,4!}\cdot\frac{9!}{3!\,6!}}{3.268.760} = \frac{152.880}{3.268.760} \cong \frac{1}{21} \cong 4{,}8.10^{-2}$$

- Apostando 17 números:

Adotando o mesmo raciocínio das apostas anteriores com 15 e 16 números, teremos os seguintes resultados:

$$\frac{C_{17,12}.C_{8,3}}{C_{25,15}} = \frac{\frac{17!}{12!\,5!}\cdot\frac{8!}{3!\,5!}}{3.268.760} = \frac{346.528}{3.268.760} \cong \frac{1}{9} \cong 1{,}1.10^{-1}$$

- Apostando 18 números:

$$\frac{C_{18,12}.C_{7,3}}{C_{25,15}} = \frac{\frac{18!}{12!\,6!}\cdot\frac{7!}{3!\,4!}}{3.268.760} = \frac{649.740}{3.268.760} \cong \frac{1}{5} \cong 2.10^{-1}$$

- **Acertar 11 números**

- Apostando 15 números:

Com um jogo de 15 números, existem 1.365 combinações possíveis para se acertar 11 números, que é exatamente a combinação de 15 tomados 11 a 11 ($C_{15,11}$). Isolando esse jogo de 11 números, temos que os últimos quatro números sorteados não poderá ser nenhum dos 15 apostados, sobrando para isso 210 combinações possíveis ($C_{10,4}$). Assim, a probabilidade é:

$$\frac{C_{15,11}.C_{10,4}}{C_{25,15}} = \frac{\frac{15!}{11!\,4!}\cdot\frac{10!}{4!\,6!}}{3.268.760} = \frac{286.650}{3.268.760} \cong \frac{1}{11} \cong 9{,}1.\,10^{-2}$$

- Apostando 16 números:

Com um jogo de 16 números, existem 4.368 combinações possíveis para se acertar 11 números, que é exatamente a combinação de 16 tomados 11 a 11 ($C_{16,11}$). Isolando esse jogo de 11 números, temos que os últimos quatro números sorteados não poderá ser nenhum dos 16 apostados, sobrando para isso 126 combinações possíveis ($C_{9,4}$). Assim, a probabilidade é:

$$\frac{C_{16,11}.C_{9,4}}{C_{25,15}} = \frac{\frac{16!}{11!\,5!}\cdot\frac{9!}{4!\,5!}}{3.268.760} = \frac{550.368}{3.268.760} \cong \frac{1}{6} \cong 1{,}7.\,10^{-1}$$

- Apostando 17 números:

Adotando o mesmo raciocínio das apostas anteriores com 15 e 16 números, teremos os seguintes resultados:

$$\frac{C_{17,11}.C_{8,4}}{C_{25,15}} = \frac{\frac{17!}{11!\,6!}\cdot\frac{8!}{4!\,4!}}{3.268.760} = \frac{866.320}{3.268.760} \cong \frac{1}{4} \cong 2{,}5.\,10^{-1}$$

- Apostando 18 números:

$$\frac{C_{18,11}.C_{7,4}}{C_{25,15}} = \frac{\frac{18!}{11!\,7!}\cdot\frac{7!}{4!\,3!}}{3.268.760} = \frac{1.113.840}{3.268.760} \cong \frac{1}{3} \cong 3{,}3.\,10^{-1}$$

Tabela 3. Tabela Resumo das Probabilidades na Lotofácil

Quantidade de números apostados	**Probabilidade de acerto**				
	15 acertos	**14 acertos**	**13 acertos**	**12 acertos**	**11 acertos**
15	$4{,}3.10^{-4}$	$4{,}6.10^{-5}$	$1{,}4.10^{-3}$	$1{,}7.10^{-2}$	$9{,}1.10^{-2}$
16	$9{,}6.10^{-4}$	$3{,}3.10^{-4}$	$6{,}2.10^{-3}$	$4{,}8.10^{-2}$	$1{,}7.10^{-1}$
17	$1{,}9.10^{-3}$	$1{,}7.10^{-3}$	2.10^{-2}	$1{,}1.10^{-1}$	$2{,}5.10^{-1}$
18	$3{,}2.10^{-3}$	$6{,}5.10^{-3}$	$5{,}6.10^{-2}$	2.10^{-1}	$3{,}3.10^{-1}$

3.1.3 Quina

3.1.3.1 Como jogar

Na Quina são sorteados 5 números e o apostador marca entre 5 e 7 números num total de 80 disponíveis, de 1 a 80. Atualmente, a aposta mínima (5 números) custa R$ 1,50, enquanto que a máxima (7 números) está custando R$ 20,00. Ganha o apostador que acertar 3, 4 ou 5 números.

3.1.3.2 Probabilidades

O número de elementos do espaço amostral, para qualquer aposta que se faça na Quina, será sempre o mesmo. Dessa forma, como não importa a ordem em que os números são sorteados, a quantidade de combinações possíveis de 5 números num total de 80 disponíveis será a combinação simples de 80 elementos tomados 5 a 5:

$$n(S) = C_{80,5} = \frac{80!}{5!\,75!} = 24.040.016.$$

Vamos agora calcular as probabilidades de se acertar 5, 4 e 3 números.

- **Acertar 5 números**

- Apostando 5 números:

Com uma aposta simples de 5 números, a probabilidade é calculada da seguinte forma:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{C_{80,5}} = \frac{1}{24.040.016} \cong 4{,}2.\,10^{-8}$$

- Apostando 6 números:

Com essa aposta, devemos ver quantas combinações de 5 números existem em 6 escolhidos. A probabilidade, assim, ficaria:

$$\frac{C_{6,5}}{C_{80,5}} = \frac{\frac{6!}{5!\,1!}}{24.040.016} = \frac{6}{24.040.016} \cong \frac{1}{4.006.669} \cong 2{,}5.\,10^{-7}$$

- Apostando 7 números:

De forma análoga ao cálculo anterior, seguiremos o mesmo raciocínio:

$$\frac{C_{7,5}}{C_{80,5}} = \frac{\frac{7!}{5!\,2!}}{24.040.016} = \frac{21}{24.040.016} \cong \frac{1}{1.144.763} \cong 8{,}7.\,10^{-7}$$

- **Acertar 4 números**

- Apostando 5 números:

Com um jogo de 5 números, existem 5 combinações possíveis para se acertar 4 números, que é exatamente a combinação de 5 tomados 4 a 4 ($C_{5,4}$). Isolando esse jogo de 4 números, temos que o último número sorteado não poderá ser nenhum dos 5 apostados, sobrando para isso 75 combinações possíveis ($C_{75,1}$). Assim, a probabilidade é:

$$\frac{C_{5,4}.\,C_{75,1}}{C_{80,5}} = \frac{\frac{5!}{4!\,1!}\cdot\frac{75!}{1!\,74!}}{24.040.016} = \frac{375}{24.040.016} \cong \frac{1}{64.107} \cong 1{,}6.\,10^{-5}$$

- Apostando 6 números:

Com um jogo de 6 números, existem 15 combinações possíveis para se acertar 4 números, que é exatamente a combinação de 16 tomados 4 a 4 ($C_{6,4}$). Isolando esse jogo de 4 números, temos que o último número sorteado não poderá ser nenhum dos 6 apostados, sobrando para isso 74 combinações possíveis ($C_{74,1}$). Assim, a probabilidade é:

$$\frac{C_{6,4}.C_{74,1}}{C_{80,5}} = \frac{\frac{6!}{4!\,2!} \cdot \frac{74!}{1!\,73!}}{24.040.016} = \frac{1.110}{24.040.016} \cong \frac{1}{21.658} \cong 4{,}6.\,10^{-5}$$

- Apostando 7 números:

Adotando o mesmo raciocínio das apostas anteriores com 5 e 6 números, teremos a seguinte probabilidade para uma aposta com 7 números:

$$\frac{C_{7,4}.C_{73,1}}{C_{80,5}} = \frac{\frac{7!}{4!\,3!} \cdot \frac{73!}{1!\,72!}}{24.040.016} = \frac{2.555}{24.040.016} \cong \frac{1}{9.409} \cong 1{,}1.\,10^{-4}$$

- **Acertar 3 números**

- Apostando 5 números:

Com um jogo de 5 números, existem 10 combinações possíveis para se acertar 3 números, que é exatamente a combinação de 5 tomados 3 a 3 ($C_{5,3}$). Isolando esse jogo de 3 números, temos que os últimos dois números sorteados não poderão ser nenhum dos 5 apostados, sobrando para isso 2.775 combinações possíveis ($C_{75,2}$). Assim, a probabilidade é:

$$\frac{C_{5,3}.C_{75,2}}{C_{80,5}} = \frac{\frac{5!}{3!\,2!} \cdot \frac{75!}{2!\,73!}}{24.040.016} = \frac{27.750}{24.040.016} \cong \frac{1}{866} \cong 1{,}2.\,10^{-3}$$

- Apostando 6 números:

Com um jogo de 6 números, existem 20 combinações possíveis para se acertar 3 números, que é exatamente a combinação de 6 tomados 3 a 3 ($C_{6,3}$). Isolando esse jogo de 3 números, temos que os últimos números sorteados não poderão ser nenhum dos 6 apostados, sobrando para isso 2.701 combinações possíveis ($C_{74,2}$). Assim, a probabilidade é:

$$\frac{C_{6,3}.\,C_{74,2}}{C_{80,5}} = \frac{\frac{6!}{3!\,3!} \cdot \frac{74!}{2!\,72!}}{24.040.016} = \frac{54.020}{24.040.016} \cong \frac{1}{445} \cong 2,2.\,10^{-3}$$

- Apostando 7 números:

Adotando o mesmo raciocínio das apostas anteriores com 5 e 6 números, teremos a seguinte probabilidade para uma aposta com 7 números:

$$\frac{C_{7,3}.\,C_{73,2}}{C_{80,5}} = \frac{\frac{7!}{3!\,4!} \cdot \frac{73!}{2!\,71!}}{24.040.016} = \frac{91.980}{24.040.016} \cong \frac{1}{261} \cong 3,8.\,10^{-3}$$

Tabela 4. Tabela Resumo das Probabilidades na Quina

Quantidade de números apostados	**Probabilidade de acerto**		
	5 acertos	**4 acertos**	**3 acertos**
5	$4,2.\,10^{-8}$	$1,6.\,10^{-5}$	$1,2.\,10^{-3}$
6	$2,5.\,10^{-7}$	$4,6.\,10^{-5}$	$2,2.\,10^{-3}$
7	$8,7.\,10^{-7}$	$1,1.\,10^{-4}$	$3,8.\,10^{-3}$

3.1.4 Lotomania

3.1.4.1 Como jogar

Na Lotomania são sorteados 20 números e o apostador faz uma aposta única marcando 50 números num total de 100 disponíveis, de 00 a 99. Atualmente, o preço da aposta é único e custa R$ 1,50. O apostador ganha acertando 20, 19, 18, 17, 16 ou nenhum número.

3.1.4.2 Probabilidades

O número de elementos do espaço amostral, para qualquer aposta que se faça na Lotomania, será sempre o mesmo. Dessa forma, como não importa a ordem em que os números são sorteados, a quantidade de combinações possíveis de 20 números num total de 100 disponíveis será a combinação simples de 100 elementos tomados 20 a 20:

$$n(S) = C_{100,20} = \frac{100!}{20!\,80!} = 535.983.370.403.809.682.970.$$

Vamos agora calcular as probabilidades de se acertar 20, 19, 18, 17, 16 e nenhum número.

- **Acertar 20 números**

Como a aposta é única (50 números), temos que calcular quantas as combinações possíveis para se acertar 20 números, que é exatamente a combinação de 50 tomados 20 a 20 ($C_{50,20}$). Portanto, a probabilidade é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{C_{50,20}}{C_{100,20}} = \frac{47.129.212.243.960}{535.983.370.403.809.682.970} \cong \frac{1}{11.372.635} \cong 8{,}8.\,10^{-8}$$

- **Acertar 19 números**

Nesse caso, teremos que verificar o número de combinações possíveis de 19 números, que é exatamente a combinação de 50 tomados 19 a 19 ($C_{50,19}$). Isolando esse jogo de 19 números, temos que o último número sorteado não poderá ser nenhum dos 50 apostados, sobrando para isso 50 combinações possíveis ($C_{50,1}$). Assim, a probabilidade é:

$$\frac{C_{50,19}.\,C_{50,1}}{C_{100,20}} = \frac{1.520.297.169.160.000}{535.983.370.403.809.682.970} \cong \frac{1}{352.551} \cong 2{,}8.\,10^{-6}$$

- **Acertar 18 números**

De forma genérica, seguiremos o mesmo raciocínio do cálculo anterior para 18, 17 e 16 números. Assim:

$$\frac{C_{50,18}.\,C_{50,2}}{C_{100,20}} = \frac{22.115.572.882.624.375}{535.983.370.403.809.682.970} \cong \frac{1}{24.235} \cong 4{,}1.\,10^{-52}$$

- **Acertar 17 números**

$$\frac{C_{50,17}.\,C_{50,3}}{C_{100,20}} = \frac{193.008.636.066.540.000}{535.983.370.403.809.682.970} \cong \frac{1}{2.776} \cong 3{,}6.\,10^{-4}$$

- **Acertar 16 números**

$$\frac{C_{50,16}.\,C_{50,4}}{C_{100,20}} = \frac{1.133.925.736.890.922.500}{535.983.370.403.809.682.970} \cong \frac{1}{472} \cong 2{,}1.\,10^{-3}$$

- **Não acertar nenhum número**

Aqui, o cálculo é semelhante ao de se acertar os 20 números. Nenhum dos 50 números escolhidos poderá estar entre os 20 sorteados, restando pra isso outros 50 números. Basta então verificar quantas combinações possíveis existem para isso ($C_{50,20}$).

$$\frac{C_{50,20}}{C_{100,20}} = \frac{47.129.212.243.960}{535.983.370.403.809.682.970} \cong \frac{1}{11.372.635} \cong 8{,}8.\,10^{-8}$$

Tabela 5. Tabela Resumo das Probabilidades na Lotomania

Quantidade de números apostados	Probabilidade de acerto					
	20 acertos	19 acertos	18 acertos	17 acertos	16 acertos	Nenhum acerto
20	$8{,}8.10^{-8}$	$2{,}8.10^{-6}$	$4{,}1.10^{-52}$	$3{,}6.10^{-4}$	$2{,}1.10^{-3}$	$8{,}8.10^{-8}$

3.1.5 Dupla Sena

3.1.5.1 Como jogar

Na Dupla Sena são sorteados 6 números e o apostador marca de 6 a 15 números num total de 50, de 01 a 50. Atualmente, o preço da aposta simples (6 números) é de R$ 2,00 e o da aposta máxima (15 números) é R$ 10.010,00. O apostador ganha acertando 4, 5 ou 6 números.

3.1.5.2 Probabilidades

O número de elementos do espaço amostral, para qualquer aposta que se faça na Dupla Sena, será sempre o mesmo. Assim, mais uma vez, não importa a ordem em que os números são sorteados, a quantidade de combinações possíveis de 6 números num total de 50 disponíveis será a combinação simples de cinquenta elementos tomados 6 a 6:

$n(S) = C_{50,6} = \frac{50!}{6!\,44!} = 15.890.700.$

Vamos agora calcular as probabilidades de se fazer a sena (acertar 6 números), a quina (acertar 5 números) e a quadra (acertar 4 números) na Dupla Sena.

- <u>**Sena**</u>

- Apostando 6 números:

Com uma aposta simples, a probabilidade seria:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{C_{50,6}} = \frac{1}{15.890.700} \cong 6{,}3.10^{-8}$$

- Apostando 7 números:

Agora devemos ver quantas combinações de 6 números existem em 7 escolhidos. A probabilidade, nesse caso, ficaria:

$$\frac{C_{7,6}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{7!}{6!\,1!}}{15.890.700} = \frac{7}{15.890.700} \cong \frac{1}{2.270.100} \cong 4{,}4.\,10^{-7}$$

- Apostando 8 números:

De forma análoga ao cálculo anterior, seguiremos o mesmo raciocínio:

$$\frac{C_{8,6}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{8!}{6!\,2!}}{15.890.700} = \frac{28}{15.890.700} \cong \frac{1}{567.525} \cong 1{,}8.\,10^{-6}$$

- Apostando 9 números:

$$\frac{C_{9,6}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{9!}{6!\,3!}}{15.890.700} = \frac{84}{15.890.700} \cong \frac{1}{189.175} \cong 5{,}3.\,10^{-6}$$

- Apostando 10 números:

$$\frac{C_{10,6}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{10!}{6!\,4!}}{15.890.700} = \frac{210}{15.890.700} \cong \frac{1}{75.670} \cong 1{,}3.\,10^{-5}$$

- Apostando 11 números:

$$\frac{C_{11,6}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{11!}{6!\,5!}}{15.890.700} = \frac{462}{15.890.700} \cong \frac{1}{34.395} \cong 2{,}9.\,10^{-5}$$

- Apostando 12 números:

$$\frac{C_{12,6}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{12!}{6!\,6!}}{15.890.700} = \frac{924}{15.890.700} \cong \frac{1}{17.198} \cong 5{,}8.\,10^{-5}$$

- Apostando 13 números:

$$\frac{C_{13,6}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{13!}{6!\,7!}}{15.890.700} = \frac{1716}{15.890.700} \cong \frac{1}{9.260} \cong 1{,}1.\,10^{-4}$$

- Apostando 14 números:

$$\frac{C_{14,6}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{14!}{6!\,8!}}{15.890.700} = \frac{3003}{15.890.700} \cong \frac{1}{5.292} \cong 1{,}9.\,10^{-4}$$

- Apostando 15 números:

$$\frac{C_{15,6}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{15!}{6!\,9!}}{15.890.700} = \frac{5005}{15.890.700} \cong \frac{1}{3.175} \cong 3{,}1.\,10^{-4}$$

- **Quina**

- Apostando 6 números:

Com um jogo de 6 números, existem 6 combinações possíveis de se fazer a quina, que é exatamente a combinação de 6 tomados 5 a 5 ($C_{6,5}$). Isolando a quina, temos que o último número sorteado não poderá ser nenhum dos 6 apostados, sobrando para isso 44 números possíveis ($C_{44,1}$). Portanto a probabilidade é:

$$\frac{C_{6,5}.\,C_{44,1}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{6!}{5!\,1!}\cdot\frac{4!}{1!\,43!}}{15.890.700} = \frac{264}{15.890.700} \cong \frac{1}{60.192} \cong 1{,}7.\,10^{-5}$$

- Apostando 7 números:

Com um jogo de 7 números, existem 21 combinações possíveis de se fazer a quina, que é exatamente a combinação de 7 tomados 5 a 5 ($C_{7,5}$). Isolando a quina, temos que o último número sorteado não poderá ser nenhum dos 7 apostados, sobrando para isso 43 números possíveis ($C_{43,1}$). Portanto a probabilidade é:

$$\frac{C_{7,5}.C_{43,1}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{7!}{5!\,2!}\cdot\frac{43!}{1!\,42!}}{15.890.700} = \frac{903}{15.890.700} \cong \frac{1}{17.598} \cong 5{,}7.\,10^{-5}$$

- Apostando 8 números:

De forma análoga aos cálculos anteriores com 6 e 7 números, seguiremos o mesmo raciocínio para os próximos:

$$\frac{C_{8,5}.C_{42,1}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{8!}{5!\,3!}\cdot\frac{42!}{1!\,41!}}{15.890.700} = \frac{2.352}{15.890.700} \cong \frac{1}{6.756} \cong 1{,}5.\,10^{-4}$$

- Apostando 9 números:

$$\frac{C_{9,5}.C_{51,1}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{9!}{5!\,4!}\cdot\frac{41!}{1!\,40!}}{15.890.700} = \frac{5.166}{15.890.700} \cong \frac{1}{3.076} \cong 3{,}3.\,10^{-4}$$

- Apostando 10 números:

$$\frac{C_{10,5}.C_{40,1}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{10!}{5!\,5!}\cdot\frac{40!}{1!\,39!}}{15.890.700} = \frac{10.080}{15.890.700} \cong \frac{1}{1.576} \cong 6{,}3.\,10^{-4}$$

- Apostando 11 números:

$$\frac{C_{11,5}.C_{39,1}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{11!}{5!\,6!}\cdot\frac{39!}{1!\,38!}}{15.890.700} = \frac{18.018}{15.890.700} \cong \frac{1}{882} \cong 1{,}1.\,10^{-3}$$

- Apostando 12 números:

$$\frac{C_{12,5}.\,C_{38,1}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{12!}{5!\,7!}\cdot\frac{38!}{1!\,37!}}{15.890.700} = \frac{30.096}{15.890.700} \cong \frac{1}{528} \cong 1{,}9.\,10^{-3}$$

- Apostando 13 números:

$$\frac{C_{13,5}.\,C_{37,1}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{13!}{5!\,8!}\cdot\frac{37!}{1!\,36!}}{15.890.700} = \frac{47.619}{15.890.700} \cong \frac{1}{334} \cong 3.\,10^{-3}$$

- Apostando 14 números:

$$\frac{C_{14,5}.\,C_{36,1}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{14!}{5!\,9!}\cdot\frac{36!}{1!\,35!}}{15.890.700} = \frac{72.072}{15.890.700} \cong \frac{1}{220} \cong 4{,}5.\,10^{-3}$$

- Apostando 15 números:

$$\frac{C_{15,5}.\,C_{35,1}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{15!}{5!\,10!}\cdot\frac{35!}{1!\,34!}}{15.890.700} = \frac{105.105}{15.890.700} \cong \frac{1}{151} \cong 6{,}6.\,10^{-3}$$

- **Quadra**

- Apostando 6 números:

Com um jogo de 6 números, existem 15 combinações possíveis de se fazer a quadra, que é exatamente a combinação de 6 tomados 4 a 4 ($C_{6,4}$). Isolando a quadra, temos que os últimos 2 números sorteados não poderão ser nenhum dos 6 apostados, sobrando para isso 44 números que poderão entrar no lugar desses 2, ou seja, 946 combinações possíveis ($C_{44,2}$). Portanto a probabilidade é:

$$\frac{C_{6,4}.\,C_{44,2}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{6!}{4!\,2!}\cdot\frac{44!}{2!\,42!}}{15.890.700} = \frac{14.190}{15.890.700} \cong \frac{1}{1.120} \cong 8{,}9.\,10^{-4}$$

- Apostando 7 números:

Com um jogo de 7 números, existem 35 combinações possíveis de se fazer a quadra, que é exatamente a combinação de 7 tomados 4 a 4 ($C_{7,4}$). Isolando a quadra, temos que os últimos 2 números sorteados não poderão ser nenhum dos 7 apostados, sobrando para isso 43 números que poderão entrar no lugar desses 2, ou seja, 903 combinações possíveis ($C_{43,2}$). Portanto a probabilidade é:

$$\frac{C_{7,4}.C_{43,2}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{7!}{4!\,3!} \cdot \frac{43!}{2!\,41!}}{15.890.700} = \frac{31.605}{15.890.700} \cong \frac{1}{503} \cong 2.10^{-3}$$

- Apostando 8 números:

De forma análoga aos cálculos anteriores com 6 e 7 números, seguiremos o mesmo raciocínio para os próximos:

$$\frac{C_{8,4}.C_{42,2}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{8!}{4!\,4!} \cdot \frac{42!}{2!\,40!}}{15.890.700} = \frac{60.270}{15.890.700} \cong \frac{1}{264} \cong 3{,}8.10^{-3}$$

- Apostando 9 números:

$$\frac{C_{9,4}.C_{41,2}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{9!}{4!\,5!} \cdot \frac{41!}{2!\,39!}}{15.890.700} = \frac{103.320}{15.890.700} \cong \frac{1}{154} \cong 6{,}5.10^{-3}$$

- Apostando 10 números:

$$\frac{C_{10,4}.C_{40,2}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{10!}{4!\,6!} \cdot \frac{40!}{2!\,38!}}{15.890.700} = \frac{163.800}{15.890.700} \cong \frac{1}{97} \cong 10^{-2}$$

- Apostando 11 números:

$$\frac{C_{11,4}.C_{39,2}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{11!}{4!\,7!} \cdot \frac{39!}{2!\,37!}}{15.890.700} = \frac{244.530}{15.890.700} \cong \frac{1}{65} \cong 1{,}5.10^{-2}$$

- Apostando 12 números:

$$\frac{C_{12,4}.C_{38,2}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{12!}{4!\,8!} \cdot \frac{38!}{2!\,36!}}{15.890.700} = \frac{347.985}{15.890.700} \cong \frac{1}{46} \cong 2{,}2.10^{-2}$$

- Apostando 13 números:

$$\frac{C_{13,4}.C_{37,2}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{13!}{4!\,9!} \cdot \frac{37!}{2!\,35!}}{15.890.700} = \frac{476.190}{15.890.700} \cong \frac{1}{33} \cong 3.10^{-2}$$

- Apostando 14 números:

$$\frac{C_{14,4}.C_{36,2}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{14!}{4!\,10!} \cdot \frac{36!}{2!\,34!}}{15.890.700} = \frac{630.630}{15.890.700} \cong \frac{1}{25} \cong 4.10^{-2}$$

- Apostando 15 números:

$$\frac{C_{15,4}.C_{35,2}}{C_{50,6}} = \frac{\frac{15!}{4!\,11!} \cdot \frac{35!}{2!\,33!}}{15.890.700} = \frac{812.175}{15.890.700} \cong \frac{1}{20} \cong 5.10^{-2}$$

Tabela 6. Tabela Resumo das Probabilidades na Dupla Sena

Quantidade de números apostados	**Probabilidade de acerto**		
	Sena	**Quina**	**Quadra**
6	$6{,}3.10^{-8}$	$1{,}7.10^{-5}$	$8{,}9.10^{-4}$
7	$4{,}4.10^{-7}$	$5{,}7.10^{-5}$	2.10^{-3}
8	$1{,}8.10^{-6}$	$1{,}5.10^{-4}$	$3{,}8.10^{-3}$
9	$5{,}3.10^{-6}$	$3{,}3.10^{-4}$	$6{,}5.10^{-3}$

10	$1{,}3.10^{-5}$	$6{,}3.10^{-4}$	10^{-2}
11	$2{,}9.10^{-5}$	$1{,}1.10^{-3}$	$1{,}5.10^{-2}$
12	$5{,}8.10^{-5}$	$1{,}9.10^{-3}$	$2{,}2.10^{-2}$
13	$1{,}1.10^{-4}$	3.10^{-3}	3.10^{-2}
14	$1{,}9.10^{-4}$	$4{,}5.10^{-3}$	4.10^{-2}
15	$3{,}1.10^{-4}$	$6{,}6.10^{-3}$	5.10^{-2}

3.1.6 Timemania

3.1.6.1 Como jogar

No Timemania, o apostador escolhe 10 números dentre os oitenta disponíveis (01 a 80) e escolhe também um clube de futebol entre oitenta. São sorteados 7 números e um time. A aposta é única e custa R$ 2,00. O apostador ganha acertando 3, 4, 5, 6 ou 7 números, e ganha ainda se acertar o time de futebol.

3.1.6.2 Probabilidades

Em relação ao sorteio dos números, a quantidade de elementos do espaço amostral será sempre o mesmo. Dessa forma, como não importa a ordem em que os números são sorteados, a quantidade de combinações possíveis de 7 números num total de 80 disponíveis será a combinação simples de oitenta elementos tomados 7 a 7:

$$n(S) = C_{80,7} = \frac{80!}{7!\,73!} = 3.176.716.400$$

- **Acertar 7 números**

Como a aposta é única (10 números), temos que calcular quantas as combinações possíveis para se acertar 7 números, que é exatamente a combinação de 10 tomados 7 a 7 ($C_{10,7}$). Portanto, a probabilidade é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{C_{10,7}}{C_{80,7}} = \frac{\frac{10!}{7!\,3!}}{3.176.716.400} = \frac{120}{3.176.716.400} \cong \frac{1}{26.472.637} \cong 3{,}8.\,10^{-8}$$

- **Acertar 6 números**

Nesse caso, teremos que verificar o número de combinações possíveis de 6 números, que é exatamente a combinação de 10 tomados 6 a 6 ($C_{10,6}$). Isolando esse jogo de 6 números, temos que o último número sorteado não poderá ser nenhum dos 10 apostados, sobrando para isso 70 combinações possíveis ($C_{70,1}$). Assim, a probabilidade é:

$$\frac{C_{10,6}.\,C_{70,1}}{C_{80,7}} = \frac{\frac{10!}{6!\,4!}\cdot\frac{70!}{1!\,69!}}{3.176.716.400} = \frac{14.700}{3.176.716.400} \cong \frac{1}{216.103} \cong 4{,}6.\,10^{-6}$$

- **Acertar 5 números**

De forma genérica, seguiremos o mesmo raciocínio do cálculo anterior para 5, 4 e 3 números. Assim:

$$\frac{C_{10,5}.\,C_{70,2}}{C_{80,7}} = \frac{\frac{10!}{5!\,5!}\cdot\frac{70!}{2!\,68!}}{3.176.716.400} = \frac{608.580}{3.176.716.400} \cong \frac{1}{5.220} \cong 1{,}9.\,10^{-4}$$

- **Acertar 4 números**

$$\frac{C_{10,4}.\,C_{70,3}}{C_{80,7}} = \frac{\frac{10!}{4!\,6!}\cdot\frac{70!}{3!\,67!}}{3.176.716.400} = \frac{11.495.400}{3.176.716.400} \cong \frac{1}{276} \cong 3{,}6.\,10^{-3}$$

- **<u>Acertar 3 números</u>**

$$\frac{C_{10,3}.C_{70,4}}{C_{80,7}} = \frac{\frac{10!}{3!\,7!} \cdot \frac{70!}{4!\,66!}}{3.176.716.400} = \frac{110.027.400}{3.176.716.400} \cong \frac{1}{29} \cong 3{,}4.\,10^{-2}$$

- **<u>Acertar o Time de futebol</u>**

Como o apostador tem direito a escolher um time entre os oitenta disponíveis, e é sorteado apenas um time, a probabilidade de se acertar é facilmente calculada da seguinte forma:

$$\frac{1}{80} \cong 1{,}2.\,10^{-2}.$$

Tabela 7. Tabela Resumo das Probabilidades na Timemania

Quantidade de números apostados	**Probabilidade de acerto**					
	7 acertos	**6 acertos**	**5 acertos**	**4 acertos**	**3 acertos**	**Time de futebol**
10	$3{,}8.\,10^{-8}$	$4{,}6.\,10^{-6}$	$1{,}9.\,10^{-4}$	$3{,}6.\,10^{-3}$	$3{,}4.\,10^{-2}$	$1{,}2.\,10^{-2}$.

3.2 Loterias de Prognósticos Esportivos:

As loterias de Prognósticos Esportivos são aquelas que utilizam o esporte como fonte de aposta. Atualmente, a Caixa Econômica Federal utiliza apenas os jogos de futebol para essas modalidades de loteria.

Para os cálculos das probabilidades nesse tipo de loteria, consideraremos todos os resultados possíveis como equiprováveis, ou seja, não levaremos em consideração a qualidade dos times envolvidos e outros fatores que influenciam no resultado de cada jogo, como jogar em casa, desfalques nos times, etc.

3.2.1 Lotogol

3.2.1.1 Como jogar

Na Lotogol, o apostador escolhe o placar exato dos 5 jogos de futebol disponíveis no concurso, assinalando no bilhete o número de gols de cada time participante. Pode assinalar 0, 1, 2, 3 ou mais gols (essa opção é representada pelo sinal +). O valor da aposta é de R$ 1,00. O apostador ganha se acertar 3, 4 ou 5 placares.

3.6.2 Probabilidades

- **<u>Acertar 5 placares</u>**

Como temos dois times em cada jogo e cada time possui 5 possibilidades para o número de gols, a quantidade de resultados possíveis por jogo é 25. Assim, a probabilidade de se acertar o placar exato em um jogo é de $\frac{1}{25}$. Consequentemente, a probabilidade de se ter insucesso é de $1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$. Dito isso, fica claro perceber que a probabilidade de obtermos 5 sucessos e nenhum fracasso (ou insucesso) em 5 tentativas é obtida através do termos geral do Binômio de Newton:

$$\binom{5}{5} . \left(\frac{1}{25}\right)^5 . \left(\frac{24}{25}\right)^0 = \frac{5!}{5!\,0!} . \frac{1}{9.765.625} . 1 = \frac{1}{9.765.625} \cong 10^{-7}$$

- **<u>Acertar 4 placares</u>**

Utilizando o mesmo pensamento do cálculo para a probabilidade de 5 acertos, calculamos a probabilidade de se acertar exatamente 3 placares da seguinte forma:

$$\binom{5}{4} . \left(\frac{1}{25}\right)^4 . \left(\frac{24}{25}\right)^1 = \frac{5!}{4!\,1!} . \frac{1}{390.625} . \frac{24}{25} = \frac{120}{9.765.625} \cong \frac{1}{81.380} \cong 1{,}2.\,10^{-5}$$

- **<u>Acertar 3 placares</u>**

De forma análoga, a probabilidade de se acertar exatamente 3 placares é:

$$\binom{5}{3} . \left(\frac{1}{25}\right)^3 . \left(\frac{24}{25}\right)^2 = \frac{5!}{3!\,2!} . \frac{1}{15.625} . \frac{576}{625} = \frac{5.760}{9.765.625} \cong \frac{1}{1.695} \cong 5{,}9.\,10^{-4}$$

Tabela 8. Tabela Resumo das Probabilidades na Lotogol

Aposta única	Probabilidade de acerto		
	5 placares	4 placares	3 placares
	10^{-7}	$1{,}2.10^{-5}$	$5{,}9.10^{-4}$

3.2.1 Loteca

3.2.1.1 Como jogar

Na Loteca, são 14 partidas de futebol disponíveis por concurso e em cada partida existem 3 possibilidades de escolha: coluna 1 (vitória do time da casa), coluna do meio (empate) e coluna 2 (vitória do time visitante). A aposta mínima hoje em dia é de R$ 2,00 e dá direito a marcar uma dupla (escolher duas colunas numa só partida). A aposta máxima custa R$ 864,00 e dá direito ao apostador marcar 5 duplas e 3 triplas (escolher três colunas numa mesma partida). O apostador ganha se acertar 13 ou 14 placares.

3.6.2 Probabilidades

Devido à possibilidade de se marcar 1, 2 ou 3 colunas em cada partida, para o cálculo de todas as probabilidades na Loteca, devemos pensar previamente na probabilidade de se acertar ou errar em cada partida isoladamente.

Concluímos então que a probabilidade de acerto em uma partida marcando 1 coluna é de $\frac{1}{3}$; marcando 2 colunas é de $\frac{2}{3}$; e marcando 3 colunas é de 1 ou 100%.

Consequentemente, a probabilidade de erro numa partida marcando 1 coluna é de $\frac{2}{3}$; marcando 2 colunas é de $\frac{1}{3}$; e marcando 3 colunas é de 0.

Vejamos então como faremos os cálculos das probabilidades de se ganhar na Loteca.

- **<u>Acertar 14 partidas</u>**

- Apostando uma dupla:

Temos aqui que, em treze partidas a chance de acerto é de $\frac{1}{3}$ e em uma partida a chance é de $\frac{2}{3}$. Portanto a probabilidade é calculada da seguinte forma:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{13}.\left(\frac{2}{3}\right)^{1} = \frac{2}{4.782.969} \cong \frac{1}{2.391.485} \cong 4{,}2.10^{-7}$$

- Apostando duas duplas:

Temos que, nesse caso, em doze partidas a chance de acerto é de $\frac{1}{3}$ e em duas partidas a chance é de $\frac{2}{3}$. Portanto a probabilidade é calculada da seguinte forma:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{12}.\left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \frac{4}{4.782.969} \cong \frac{1}{1.195.742} \cong 8{,}4.10^{-7}$$

- Apostando três duplas:

Nesse caso, em onze partidas a chance de acerto é de $\frac{1}{3}$ e em três partidas a chance é de $\frac{2}{3}$. Logo, a probabilidade é:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{11}.\left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \frac{8}{4.782.969} \cong \frac{1}{597.871} \cong 1{,}7.10^{-6}$$

- Apostando quatro duplas:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{10}.\left(\frac{2}{3}\right)^{4} = \frac{16}{4.782.969} \cong \frac{1}{298.936} \cong 3{,}3.10^{-6}$$

- Apostando cinco duplas:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{9}.\left(\frac{2}{3}\right)^{5} = \frac{32}{4.782.969} \cong \frac{1}{149.468} \cong 6{,}7.10^{-6}$$

- Apostando seis duplas:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^8 . \left(\frac{2}{3}\right)^{6.} = \frac{64}{4.782.969} \cong \frac{1}{74.734} \cong 1{,}3.\,10^{-5}$$

- Apostando sete duplas:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^7 . \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{128}{4.782.969} \cong \frac{1}{37.367} \cong 2{,}7.\,10^{-5}$$

- Apostando oito duplas:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^6 . \left(\frac{2}{3}\right)^8 = \frac{256}{4.782.969} \cong \frac{1}{18.683} \cong 5{,}4.\,10^{-5}$$

- Apostando nove duplas:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^5 . \left(\frac{2}{3}\right)^9 = \frac{512}{4.782.969} \cong \frac{1}{9.342} \cong 1{,}1.\,10^{-4}$$

- Apostando uma tripla:

Nesse caso, em treze partidas a chance de acerto é de $\frac{1}{3}$ e em uma partida a chance é de 1. Logo, a probabilidade é:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{13} . 1 = \frac{1}{1.594.323} \cong 6{,}3.\,10^{-7}$$

- Apostando uma tripla e uma dupla:

Nesse caso, em doze partidas a chance de acerto é de $\frac{1}{3}$, em uma partida a chance é de 1 e em uma partida a chance é de $\frac{2}{3}$. Logo, a probabilidade é:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{12} . 1. \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{1.594.323} \cong \frac{1}{797.162} \cong 1{,}3.\,10^{-6}$$

- Apostando uma tripla e duas duplas:

Nesse caso, em onze partidas a chance de acerto é de $\frac{1}{3}$, em uma partida a chance é de 1 e em duas partidas a chance é de $\frac{2}{3}$. Logo, a probabilidade é:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{11}.1.\left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \frac{4}{1.594.323} \cong \frac{1}{398.581} \cong 2{,}5.10^{-6}$$

- Apostando uma tripla e três duplas:

Nesse caso, em dez partidas a chance de acerto é de $\frac{1}{3}$, em uma partida a chance é de 1 e em três partidas a chance é de $\frac{2}{3}$. Logo, a probabilidade é:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{10}.1.\left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \frac{8}{1.594.323} \cong \frac{1}{199.290} \cong 5.10^{-6}$$

- Apostando uma tripla e quatro duplas:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{9}.1.\left(\frac{2}{3}\right)^{4} = \frac{16}{1.594.323} \cong \frac{1}{99.645} \cong 10^{-5}$$

- Apostando uma tripla e cinco duplas:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{8}.1.\left(\frac{2}{3}\right)^{5} = \frac{32}{1.594.323} \cong \frac{1}{49.823} \cong 2.10^{-5}$$

- Apostando uma tripla e seis duplas:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{7}.1.\left(\frac{2}{3}\right)^{6} = \frac{64}{1.594.323} \cong \frac{1}{24.911} \cong 4.10^{-5}$$

- Apostando uma tripla e sete duplas:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^6 . 1 . \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{128}{1.594.323} \cong \frac{1}{12.456} \cong 8.10^{-5}$$

- Apostando uma tripla e oito duplas:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^5 . 1 . \left(\frac{2}{3}\right)^8 = \frac{256}{1.594.323} \cong \frac{1}{6.228} \cong 1{,}6.10^{-4}$$

- Apostando duas triplas:

Aqui, em doze partidas a chance de acerto é de $\frac{1}{3}$ e em uma partida a chance é de 1. Logo, a probabilidade é:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{12} . 1^2 = \frac{1}{531.441} \cong 1{,}9.10^{-6}$$

- Apostando duas triplas e uma dupla:

Nessa situação, em onze partidas a chance de acerto é de $\frac{1}{3}$; em duas partidas a chance é de 1 e em uma partida a chance é de $\frac{2}{3}$. Sendo assim, a probabilidade é:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{11} . 1^2 . \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{531.441} \cong \frac{1}{265.721} \cong 3{,}8.10^{-6}$$

- Apostando duas triplas e duas duplas:

Nessa situação, em dez partidas a chance de acerto é de $\frac{1}{3}$; em duas partidas a chance é de 1 e em duas partidas a chance é de $\frac{2}{3}$. Sendo assim, a probabilidade é:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{10} . 1^2 . \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{531.441} \cong \frac{1}{132.860} \cong 7{,}5.10^{-6}$$

- Apostando duas triplas e três duplas:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^9 .1^2.\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{531.441} \cong \frac{1}{66.430} \cong 1{,}5.10^{-5}$$

- Apostando duas triplas e quatro duplas:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^8 .1^2.\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{531.441} \cong \frac{1}{33.215} \cong 3.10^{-5}$$

- Apostando duas triplas e cinco duplas:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^7 .1^2.\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{531.441} \cong \frac{1}{16.607} \cong 6.10^{-5}$$

- Apostando duas triplas e seis duplas:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{11} .1^2.\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{531.441} \cong \frac{1}{8.304} \cong 1{,}2.10^{-4}$$

- Apostando três triplas:

Nesse caso, em onze partidas a chance de acerto é de $\frac{1}{3}$ e em três partidas a chance é de 1. Logo, calculamos assim essa probabilidade:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{11} .1^3 = \frac{1}{177.147} \cong 5{,}6.10^{-6}$$

- Apostando três triplas e uma dupla:

Nesse caso, em dez partidas a chance de acerto é de $\frac{1}{3}$; em três partidas a chance é de 1 e em uma partida a chance é de $\frac{2}{3}$. Sendo assim, a probabilidade é:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{10} .1^3.\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{177.147} \cong \frac{1}{88.574} \cong 1{,}1.10^{-5}$$

- Apostando três triplas e duas duplas:

Nessa situação, em nove partidas a chance de acerto é de $\frac{1}{3}$; em três partidas a chance é de 1 e em duas partidas a chance é de $\frac{2}{3}$. Sendo assim, a probabilidade é:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^9 . 1^3 . \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{177.147} \cong \frac{1}{44.287} \cong 2{,}3.10^{-5}$$

- Apostando três triplas e três duplas:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^8 . 1^3 . \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{177.147} \cong \frac{1}{22.143} \cong 4{,}5.10^{-5}$$

- Apostando três triplas e quatro duplas:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^7 . 1^3 . \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{177.147} \cong \frac{1}{11.072} \cong 9.10^{-5}$$

- Apostando três triplas e cinco duplas:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^6 . 1^3 . \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{177.147} \cong \frac{1}{5.536} \cong 1{,}8.10^{-4}$$

- Apostando quatro triplas:

Nesse caso, em dez partidas a chance de acerto é de $\frac{1}{3}$ e em quatro partidas a chance é de 1. Sendo assim, a probabilidade é:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{10} . 1^4 = \frac{1}{59.049} \cong 1{,}7.10^{-5}$$

- Apostando quatro triplas e uma dupla:

Aqui, em nove partidas a chance de acerto é de $\frac{1}{3}$; em quatro partidas a chance é de 1 e em uma partida a chance é de $\frac{2}{3}$. A probabilidade, então, é:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^9 .1^4.\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{59.049} \cong \frac{1}{29.525} \cong 3{,}4.10^{-5}$$

- Apostando quatro triplas e duas duplas:

Aqui, em oito partidas a chance de acerto é de $\frac{1}{3}$; em quatro partidas a chance é de 1 e em duas partidas a chance é de $\frac{2}{3}$. A probabilidade, então, é:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^8 .1^4.\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{59.049} \cong \frac{1}{14.762} \cong 6{,}8.10^{-5}$$

- Apostando quatro triplas e três duplas:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^7 .1^4.\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{59.049} \cong \frac{1}{7.381} \cong 1{,}4.10^{-4}$$

- Apostando cinco triplas:

Nesse caso, em nove partidas a chance de acerto é de $\frac{1}{3}$ e em cinco partidas a chance é de 1. A probabilidade é assim calculada:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^9 .1^5 = \frac{1}{19.683} \cong 5{,}1.10^{-5}$$

- Apostando cinco triplas e uma dupla:

Nesse caso, em oito partidas a chance de acerto é de $\frac{1}{3}$; em cinco partidas a chance é de 1 e em uma partida a chance é de $\frac{2}{3}$. A probabilidade, então, é:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^8 . 1^5 . \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{19.683} \cong \frac{1}{9.842} \cong 10^{-4}$$

- Apostando seis triplas:

Nesse caso, em oito partidas a chance de acerto é de $\frac{1}{3}$ e em seis partidas a chance é de 1. A probabilidade é assim calculada:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^8 . 1^6 = \frac{1}{6.561} \cong 1{,}5 . 10^{-4}$$

- **<u>Acertar 13 partidas</u>**

- Apostando uma dupla:

Para se acertar 13 partidas em 14 apostando uma dupla, temos que separar a solução em dois casos:

I) Errando uma das treze simples marcadas e acertando uma dupla

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{1}{3}\right)^{12} . 13 = \frac{52}{4.782.969}$$

II) Errando uma dupla e acertando as treze simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1 . \left(\frac{1}{3}\right)^{13} = \frac{1}{4.782.969}$$

Portanto, a probabilidade é calculada da seguinte forma:

$$\frac{52}{4.782.969} + \frac{1}{4.782.969} = \frac{53}{4.782.969} \cong \frac{1}{90.245} \cong 1{,}1 . 10^{-5}$$

- Apostando duas duplas:

Seguindo o mesmo raciocínio do cálculo anterior, dividiremos em casos distintos:

I) Errando uma das doze simples marcadas e acertando as duas duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{2}.\left(\frac{1}{3}\right)^{11}.12 = \frac{96}{4.782.969}$$

II) Errando uma das duas duplas e acertando as doze simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{1}.\left(\frac{1}{3}\right)^{12}.2 = \frac{4}{4.782.969}$$

Portanto, a probabilidade é calculada da seguinte forma:

$$\frac{96}{4.782.969} + \frac{4}{4.782.969} = \frac{100}{4.782.969} \cong \frac{1}{47.830} \cong 2{,}1.10^{-5}$$

- Apostando três duplas:

De forma análoga:

I) Errando uma das onze simples marcadas e acertando as três duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^{10}.11 = \frac{176}{4.782.969}$$

II) Errando uma das três duplas e acertando as onze simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{2}.\left(\frac{1}{3}\right)^{11}.3 = \frac{12}{4.782.969}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{176}{4.782.969} + \frac{12}{4.782.969} = \frac{188}{4.782.969} \cong \frac{1}{25.441} \cong 3{,}9.10^{-5}$$

- Apostando quatro duplas:

I) Errando uma das dez simples marcadas e acertando as quatro duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{4}.\left(\frac{1}{3}\right)^{9}.10=\frac{320}{4.782.969}$$

II) Errando uma das quatro duplas e acertando as dez simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^{10}.4=\frac{32}{4.782.969}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{320}{4.782.969}+\frac{32}{4.782.969}=\frac{352}{4.782.969}\cong\frac{1}{13.588}\cong 7{,}4.\,10^{-5}$$

- Apostando cinco duplas:

I) Errando uma das nove simples marcadas e acertando as cinco duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{5}.\left(\frac{1}{3}\right)^{8}.9=\frac{576}{4.782.969}$$

II) Errando uma das cinco duplas e acertando as nove simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{4}.\left(\frac{1}{3}\right)^{9}.5=\frac{80}{4.782.969}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{576}{4.782.969}+\frac{80}{4.782.969}=\frac{656}{4.782.969}\cong\frac{1}{7.291}\cong 1{,}4.\,10^{-4}$$

- Apostando seis duplas:

I) Errando uma das oito simples marcadas e acertando as seis duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{6}.\left(\frac{1}{3}\right)^{7}.8=\frac{1.024}{4.782.969}$$

II) Errando uma das seis duplas e acertando as oito simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{5}.\left(\frac{1}{3}\right)^{8}.6=\frac{192}{4.782.969}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{1.024}{4.782.969} + \frac{192}{4.782.969} = \frac{1.216}{4.782.969} \cong \frac{1}{3.933} \cong 2{,}5.\,10^{-4}$$

- Apostando sete duplas:

I) Errando uma das sete simples marcadas e acertando as sete duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{7}.\left(\frac{1}{3}\right)^{6}.7 = \frac{1.792}{4.782.969}$$

II) Errando uma das sete duplas e acertando as sete simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{6}.\left(\frac{1}{3}\right)^{7}.7 = \frac{448}{4.782.969}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{1.792}{4.782.969} + \frac{448}{4.782.969} = \frac{2.240}{4.782.969} \cong \frac{1}{2.135} \cong 4{,}7.\,10^{-4}$$

- Apostando oito duplas:

I) Errando uma das seis simples marcadas e acertando as oito duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{8}.\left(\frac{1}{3}\right)^{5}.6 = \frac{3.072}{4.782.969}$$

II) Errando uma das oito duplas e acertando as seis simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{7}.\left(\frac{1}{3}\right)^{6}.8 = \frac{1.024}{4.782.969}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{3.072}{4.782.969} + \frac{1.024}{4.782.969} = \frac{4.096}{4.782.969} \cong \frac{1}{1.168} \cong 8{,}6.\,10^{-4}$$

- Apostando nove duplas:

I) Errando uma das cinco simples marcadas e acertando as nove duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1.\left(\frac{2}{3}\right)^9.\left(\frac{1}{3}\right)^4.5=\frac{5.120}{4.782.969}$$

II) Errando uma das nove duplas e acertando as cinco simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1.\left(\frac{2}{3}\right)^8.\left(\frac{1}{3}\right)^5.9=\frac{2.304}{4.782.969}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{5.120}{4.782.969}+\frac{2.304}{4.782.969}=\frac{7.424}{4.782.969}\cong\frac{1}{644}\cong 1{,}6.\,10^{-3}$$

- Apostando uma tripla:

Nos casos em que houver marcação de alguma tripla, nos preocuparemos apenas com a possibilidade de erro na simples ou na dupla, pois a marcação tripla é um evento certo. Nesse caso só há a possibilidade de errar uma das treze simples:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1.\left(\frac{1}{3}\right)^{12}.1^1.\,13=\frac{26}{1.594.323}\cong\frac{1}{61.320}\cong 1{,}6.\,10^{-5}$$

- Apostando uma tripla e uma dupla:

I) Errando uma das doze simples marcadas e acertando a dupla

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1.\left(\frac{2}{3}\right)^1.\left(\frac{1}{3}\right)^{11}.1^1.\,12=\frac{48}{1.594.323}$$

II) Errando a dupla e acertando as doze simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1.\left(\frac{1}{3}\right)^{12}.1^1=\frac{1}{1.594.323}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{48}{1.594.323}+\frac{1}{1.594.323}=\frac{49}{1.594.323}\cong\frac{1}{32.537}\cong 3{,}1.\,10^{-5}$$

- Apostando uma tripla e duas duplas:

I) Errando uma das onze simples marcadas e acertando as duas duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{2}.\left(\frac{1}{3}\right)^{10}.1^{1}.11=\frac{88}{1.594.323}$$

II) Errando uma das duas duplas e acertando as onze simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{1}.\left(\frac{1}{3}\right)^{11}.1^{1}.2=\frac{4}{1.594.323}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{88}{1.594.323}+\frac{4}{1.594.323}=\frac{92}{1.594.323}\cong\frac{1}{17.330}\cong 5{,}8.10^{-5}$$

- Apostando uma tripla e três duplas:

I) Errando uma das dez simples marcadas e acertando as três duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^{9}.1^{1}.10=\frac{160}{1.594.323}$$

II) Errando uma das três duplas e acertando as dez simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{2}.\left(\frac{1}{3}\right)^{10}.1^{1}.3=\frac{12}{1.594.323}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{160}{1.594.323}+\frac{12}{1.594.323}=\frac{172}{1.594.323}\cong\frac{1}{9.269}\cong 1{,}1.10^{-4}$$

- Apostando uma tripla e quatro duplas:

I) Errando uma das nove simples marcadas e acertando as quatro duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{4}.\left(\frac{1}{3}\right)^{8}.1^{1}.9=\frac{288}{1.594.323}$$

II) Errando uma das quatro duplas e acertando as nove simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^3 . \left(\frac{1}{3}\right)^9 . 1^1 . 4 = \frac{32}{1.594.323}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{288}{1.594.323} + \frac{32}{1.594.323} = \frac{320}{1.594.323} \cong \frac{1}{4.982} \cong 2.10^{-4}$$

- Apostando uma tripla e cinco duplas:

I) Errando uma das oito simples marcadas e acertando as cinco duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^5 . \left(\frac{1}{3}\right)^7 . 1^1 . 8 = \frac{512}{1.594.323}$$

II) Errando uma das cinco duplas e acertando as oito simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^4 . \left(\frac{1}{3}\right)^8 . 1^1 . 5 = \frac{80}{1.594.323}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{512}{1.594.323} + \frac{80}{1.594.323} = \frac{592}{1.594.323} \cong \frac{1}{2.693} \cong 3{,}7.10^{-4}$$

- Apostando uma tripla e seis duplas:

I) Errando uma das sete simples marcadas e acertando as seis duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^6 . \left(\frac{1}{3}\right)^6 . 1^1 . 7 = \frac{896}{1.594.323}$$

II) Errando uma das seis duplas e acertando as sete simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^5 . \left(\frac{1}{3}\right)^7 . 1^1 . 6 = \frac{192}{1.594.323}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{896}{1.594.323} + \frac{192}{1.594.323} = \frac{1.088}{1.594.323} \cong \frac{1}{1.465} \cong 6{,}8.10^{-4}$$

- Apostando uma tripla e sete duplas:

I) Errando uma das seis simples marcadas e acertando as sete duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1.\left(\frac{2}{3}\right)^7.\left(\frac{1}{3}\right)^5.1^1.6=\frac{1.536}{1.594.323}$$

II) Errando uma das sete duplas e acertando as seis simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1.\left(\frac{2}{3}\right)^6.\left(\frac{1}{3}\right)^6.1^1.7=\frac{448}{1.594.323}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{1.536}{1.594.323}+\frac{448}{1.594.323}=\frac{1.984}{1.594.323}\cong\frac{1}{804}\cong 1{,}2.10^{-3}$$

- Apostando uma tripla e oito duplas:

I) Errando uma das cinco simples marcadas e acertando as oito duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1.\left(\frac{2}{3}\right)^8.\left(\frac{1}{3}\right)^4.1^1.5=\frac{2.560}{1.594.323}$$

II) Errando uma das oito duplas e acertando as cinco simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1.\left(\frac{2}{3}\right)^7.\left(\frac{1}{3}\right)^5.1^1.8=\frac{1.024}{1.594.323}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{2.560}{1.594.323}+\frac{1.024}{1.594.323}=\frac{3.584}{1.594.323}\cong\frac{1}{445}\cong 2{,}2.10^{-3}$$

- Apostando duas triplas:

Nesse caso só há a possibilidade de errar uma das doze simples:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1.\left(\frac{1}{3}\right)^{11}.1^2.12=\frac{24}{531.441}\cong\frac{1}{22.143}\cong 4{,}5.10^{-5}$$

- Apostando duas triplas e uma dupla:

I) Errando uma das onze simples marcadas e acertando a dupla

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1.\left(\frac{2}{3}\right)^1.\left(\frac{1}{3}\right)^{10}.1^2.11=\frac{44}{531.441}$$

II) Errando a dupla e acertando as onze simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1.\left(\frac{1}{3}\right)^{11}.1^2=\frac{1}{531.441}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{44}{531.441}+\frac{1}{531.441}=\frac{45}{531.441}\cong\frac{1}{11.810}\cong 8{,}5.10^{-5}$$

- Apostando duas triplas e duas duplas:

I) Errando uma das dez simples marcadas e acertando as duas duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1.\left(\frac{2}{3}\right)^2.\left(\frac{1}{3}\right)^{9}.1^2.10=\frac{80}{531.441}$$

II) Errando uma das duas duplas e acertando as dez simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1.\left(\frac{2}{3}\right)^1.\left(\frac{1}{3}\right)^{10}.1^2.2=\frac{4}{531.441}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{80}{531.441}+\frac{4}{531.441}=\frac{84}{531.441}\cong\frac{1}{6.327}\cong 1{,}6.10^{-4}$$

- Apostando duas triplas e três duplas:

I) Errando uma das nove simples marcadas e acertando as três duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1.\left(\frac{2}{3}\right)^3.\left(\frac{1}{3}\right)^{8}.1^2.9=\frac{144}{531.441}$$

II) Errando uma das três duplas e acertando as nove simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^2 . \left(\frac{1}{3}\right)^9 . 1^2 . 3 = \frac{12}{531.441}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{144}{531.441} + \frac{12}{531.441} = \frac{156}{531.441} \cong \frac{1}{3.407} \cong 2{,}9.\,10^{-4}$$

- Apostando duas triplas e quatro duplas:

I) Errando uma das oito simples marcadas e acertando as quatro duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^4 . \left(\frac{1}{3}\right)^7 . 1^2 . 8 = \frac{256}{531.441}$$

II) Errando uma das quatro duplas e acertando as oito simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^3 . \left(\frac{1}{3}\right)^8 . 1^2 . 4 = \frac{32}{531.441}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{256}{531.441} + \frac{32}{531.441} = \frac{288}{531.441} \cong \frac{1}{1.845} \cong 5{,}4.\,10^{-4}$$

- Apostando duas triplas e cinco duplas:

I) Errando uma das sete simples marcadas e acertando as cinco duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^5 . \left(\frac{1}{3}\right)^6 . 1^2 . 7 = \frac{448}{531.441}$$

II) Errando uma das cinco duplas e acertando as sete simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^4 . \left(\frac{1}{3}\right)^7 . 1^2 . 5 = \frac{80}{531.441}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{448}{531.441} + \frac{80}{531.441} = \frac{528}{531.441} \cong \frac{1}{1.007} \cong 9{,}9.\,10^{-4}$$

- Apostando duas triplas e seis duplas:

I) Errando uma das seis simples marcadas e acertando as seis duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1.\left(\frac{2}{3}\right)^6.\left(\frac{1}{3}\right)^5.1^2.6=\frac{768}{531.441}$$

II) Errando uma das seis duplas e acertando as seis simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1.\left(\frac{2}{3}\right)^5.\left(\frac{1}{3}\right)^6.1^2.6=\frac{192}{531.441}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{768}{531.441}+\frac{192}{531.441}=\frac{960}{531.441}\cong\frac{1}{554}\cong 1{,}8.10^{-3}$$

- Apostando três triplas:

Nesse caso só há a possibilidade de errar uma das onze simples:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1.\left(\frac{1}{3}\right)^{10}.1^3.11=\frac{22}{177.147}\cong\frac{1}{8.052}\cong 1{,}2.10^{-4}$$

- Apostando três triplas e uma dupla:

I) Errando uma das dez simples marcadas e acertando a dupla

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1.\left(\frac{2}{3}\right)^1.\left(\frac{1}{3}\right)^9.1^3.10=\frac{40}{177.147}$$

II) Errando a dupla e acertando as dez simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1.\left(\frac{1}{3}\right)^{10}.1^3=\frac{1}{177.147}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{40}{177.147}+\frac{1}{177.147}=\frac{41}{177.147}\cong\frac{1}{4.321}\cong 2{,}3.10^{-4}$$

- Apostando três triplas e duas duplas:

I) Errando uma das nove simples marcadas e acertando as duas duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^2 . \left(\frac{1}{3}\right)^8 . 1^3 . 9 = \frac{72}{177.147}$$

II) Errando uma das duas duplas e acertando as nove simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{1}{3}\right)^9 . 1^3 . 2 = \frac{4}{177.147}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{72}{177.147} + \frac{4}{177.147} = \frac{76}{177.147} \cong \frac{1}{2.331} \cong 4{,}3 . 10^{-4}$$

- Apostando três triplas e três duplas:

I) Errando uma das oito simples marcadas e acertando as três duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^3 . \left(\frac{1}{3}\right)^7 . 1^3 . 8 = \frac{128}{177.147}$$

II) Errando uma das três duplas e acertando as oito simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^2 . \left(\frac{1}{3}\right)^8 . 1^3 . 3 = \frac{12}{177.147}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{128}{177.147} + \frac{12}{177.147} = \frac{140}{177.147} \cong \frac{1}{1.265} \cong 7{,}9 . 10^{-4}$$

- Apostando três triplas e quatro duplas:

I) Errando uma das sete simples marcadas e acertando as quatro duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^4 . \left(\frac{1}{3}\right)^6 . 1^3 . 7 = \frac{224}{177.147}$$

II) Errando uma das quatro duplas e acertando as sete simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^3 . \left(\frac{1}{3}\right)^7 . 1^3 . 4 = \frac{32}{177.147}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{224}{177.147} + \frac{32}{177.147} = \frac{256}{177.147} \cong \frac{1}{692} \cong 1{,}4 . 10^{-3}$$

- Apostando três triplas e cinco duplas:

I) Errando uma das seis simples marcadas e acertando as cinco duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^5 . \left(\frac{1}{3}\right)^5 . 1^3 . 6 = \frac{384}{177.147}$$

II) Errando uma das cinco duplas e acertando as seis simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^4 . \left(\frac{1}{3}\right)^6 . 1^3 . 5 = \frac{80}{177.147}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{384}{177.147} + \frac{80}{177.147} = \frac{464}{177.147} \cong \frac{1}{382} \cong 2{,}6 . 10^{-3}$$

- Apostando quatro triplas:

Nesse caso só há a possibilidade de errar uma das dez simples:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{1}{3}\right)^9 . 1^4 . 10 = \frac{20}{59.049} \cong \frac{1}{2.952} \cong 3{,}4 . 10^{-4}$$

- Apostando quatro triplas e uma dupla:

I) Errando uma das nove simples marcadas e acertando a dupla

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{1}{3}\right)^8 . 1^4 . 9 = \frac{36}{59.049}$$

II) Errando a dupla e acertando as onze simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1 . \left(\frac{1}{3}\right)^9 . 1^4 = \frac{1}{59.049}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{36}{59.049} + \frac{1}{5.049} = \frac{37}{59.049} \cong \frac{1}{1.596} \cong 6{,}3.\,10^{-4}$$

- Apostando quatro triplas e duas duplas:

I) Errando uma das oito simples marcadas e acertando as duas duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^2 . \left(\frac{1}{3}\right)^7 . 1^4 . 8 = \frac{64}{59.049}$$

II) Errando uma das duas duplas e acertando as oito simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{1}{3}\right)^8 . 1^4 . 2 = \frac{4}{59.049}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{64}{59.049} + \frac{4}{59.049} = \frac{68}{59.049} \cong \frac{1}{868} \cong 1{,}2.\,10^{-3}$$

- Apostando quatro triplas e três duplas:

I) Errando uma das sete simples marcadas e acertando as três duplas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^3 . \left(\frac{1}{3}\right)^6 . 1^4 . 7 = \frac{112}{59.049}$$

II) Errando uma das três duplas e acertando as sete simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^2 . \left(\frac{1}{3}\right)^7 . 1^4 . 3 = \frac{12}{59.049}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{112}{59.049} + \frac{12}{59.049} = \frac{124}{59.049} \cong \frac{1}{476} \cong 2{,}1.\,10^{-3}$$

- Apostando cinco triplas:

Nesse caso só há a possibilidade de errar uma das nove simples:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{1}{3}\right)^8 . 1^5 . 9 = \frac{18}{19.683} \cong \frac{1}{1.094} \cong 9{,}1 . 10^{-4}$$

- Apostando cinco triplas e uma dupla:

I) Errando uma das oito simples marcadas e acertando a dupla

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{1}{3}\right)^7 . 1^5 . 8 = \frac{32}{19.683}$$

II) Errando a dupla e acertando as oito simples

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1 . \left(\frac{1}{3}\right)^8 . 1^5 = \frac{1}{19.683}$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{32}{19.683} + \frac{1}{19.683} = \frac{33}{19.683} \cong \frac{1}{596} \cong 1{,}7 . 10^{-3}$$

- Apostando seis triplas:

Nesse caso só há a possibilidade de errar uma das oito simples:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{1}{3}\right)^7 . 1^7 . 8 = \frac{16}{6.561} \cong \frac{1}{410} \cong 2{,}4 . 10^{-3}$$

Tabela 9. Tabela Resumo das Probabilidades na Loteca

Tipo de aposta	Probabilidade de acerto	
	14 jogos	13 jogos
1 dupla	$4{,}2.10^{-7}$	$1{,}1.10^{-5}$
2 duplas	$8{,}4.10^{-7}$	$2{,}1.10^{-5}$
3 duplas	$1{,}7.10^{-6}$	$3{,}9.10^{-5}$
4 duplas	$3{,}3.10^{-6}$	$7{,}4.10^{-5}$
5 duplas	$6{,}7.10^{-6}$	$1{,}4.10^{-4}$
6 duplas	$1{,}3.10^{-5}$	$2{,}5.10^{-4}$
7 duplas	$2{,}7.10^{-5}$	$4{,}7.10^{-4}$
8 duplas	$5{,}4.10^{-5}$	$8{,}6.10^{-4}$
9 duplas	$1{,}1.10^{-4}$	$1{,}6.10^{-3}$
1 tripla	$6{,}3.10^{-7}$	$1{,}6.10^{-5}$
1 tripla e 1 dupla	$1{,}3.10^{-6}$	$3{,}1.10^{-5}$
1 tripla e 2 duplas	$2{,}5.10^{-6}$	$5{,}8.10^{-5}$
1 tripla e 3 duplas	5.10^{-6}	$1{,}1.10^{-4}$
1 tripla e 4 duplas	10^{-5}	2.10^{-4}
1 tripla e 5 duplas	2.10^{-5}	$3{,}7.10^{-4}$
1 tripla e 6 duplas	4.10^{-5}	$6{,}8.10^{-4}$
1 tripla e 7 duplas	8.10^{-5}	$1{,}2.10^{-3}$
1 tripla e 8	$1{,}6.10^{-4}$	$2{,}2.10^{-3}$

duplas		
2 triplas	$1{,}9.10^{-6}$	$4{,}5.10^{-5}$
2 triplas e 1 dupla	$3{,}8.10^{-6}$	$8{,}5.10^{-5}$
2 triplas e 2 duplas	$7{,}5.10^{-6}$	$1{,}6.10^{-4}$
2 triplas e 3 duplas	$1{,}5.10^{-5}$	$2{,}9.10^{-4}$
2 triplas e 4 duplas	3.10^{-5}	$5{,}4.10^{-4}$
2 triplas e 5 duplas	6.10^{-5}	$9{,}9.10^{-4}$
2 triplas e 6 duplas	$1{,}2.10^{-4}$	$1{,}8.10^{-3}$
3 triplas	$5{,}6.10^{-6}$	$1{,}2.10^{-4}$
3 triplas e 1 dupla	$1{,}1.10^{-5}$	$2{,}3.10^{-4}$
3 triplas e 2 duplas	$2{,}3.10^{-5}$	$4{,}3.10^{-4}$
3 triplas e 3 duplas	$4{,}5.10^{-5}$	$7{,}9.10^{-4}$
3 triplas e 4 duplas	9.10^{-5}	$1{,}4.10^{-3}$
3 triplas e 5 duplas	$1{,}8.10^{-4}$	$2{,}6.10^{-3}$
4 triplas	$1{,}7.10^{-5}$	$3{,}4.10^{-4}$
4 triplas e 1 dupla	$3{,}4.10^{-5}$	$6{,}3.10^{-4}$
4 triplas e 2 duplas	$6{,}8.10^{-5}$	$1{,}2.10^{-3}$
4 triplas e 3	$1{,}4.10^{-4}$	$2{,}1.10^{-3}$

duplas		
5 triplas	$5{,}1.\,10^{-5}$	$9{,}1.\,10^{-4}$
5 triplas e 1 dupla	10^{-4}	$1{,}7.\,10^{-3}$
6 triplas	$1{,}5.\,10^{-4}$	$2{,}4.\,10^{-3}$

CAPÍTULO IV

ATIVIDADE PEDAGÓGICA

Nesse capítulo, é feita uma proposta de atividade pedagógica envolvendo os jogos lotéricos a ser desenvolvida em sala de aula. A atividade foi dividida em 4 etapas.

4.1 Atividade: "Quem quer ser um milionário?"

4.1.1 Primeira etapa

Tempo previsto para atividade: 30 minutos.

O professor deve pedir a cada aluno que leve uma moeda. Solicita-se ao aluno que faça o lançamento da moeda 20 vezes e anote os resultados. Verifica-se com a turma se algum dos alunos conseguiu tirar 20 caras nesses 20 lançamentos. Em seguida pede-se então que se calcule a probabilidade disso acontecer. Supondo-se as moedas honestas, o resultado alcançado será $\left(\frac{1}{2}\right)^{20} = \frac{1}{1.048.576} \cong 9{,}5.\,10^{-7}$.

O professor solicita que a turma compare essa probabilidade com a de ganhar o prêmio principal nas loterias federais e que tirem juntos algumas conclusões, como por exemplo:

- É mais fácil tirar 25 caras em 25 lançamentos de uma moeda do que ganhar o prêmio principal da Mega Sena com uma aposta simples.

- É mais fácil tirar 24 caras em 24 lançamentos de uma moeda do que ganhar o prêmio principal da Quina com uma aposta simples.

- É mais fácil tirar 23 caras em 23 lançamentos de uma moeda do que ganhar o prêmio principal da Dupla Sena com uma aposta simples.

- É mais fácil tirar 21 caras em 21 lançamentos de uma moeda do que ganhar o prêmio principal da Lotofácil com uma aposta simples.

O objetivo principal dessa parte inicial da atividade é dar ao aluno uma ótima noção de interpretação dos números no cálculo de probabilidade e da dificuldade que existe em ser premiado numa loteria federal, umas mais outras menos.

4.1.2 Segunda etapa

Tempo previsto para atividade: 30 minutos.

A turma deve ser dividida em grupos de 4 a 6 alunos. O professor deve propor aos grupos que debatam sobre alguns questionamentos em relação, por exemplo, à Mega Sena. São exemplos de questionamento:

- Sabendo que a sequência (19, 23, 29, 31, 41, 53) já foi sorteado em algum concurso anterior da Mega Sena, você jogaria esse jogo?

- O que você acha da sequência (03, 09, 17, 25, 51, 59)? Apostaria nela, uma vez que todos os números são ímpares?

- Apostaria na sequência (02, 08, 13, 21, 34, 55), sabendo que todos esses números fazem parte da sequência de Finonacci?

- A sequência clássica (01, 02, 03, 04, 05, 06) é mais difícil de sair do que o jogo (12, 25, 28, 33, 46, 52)?

O objetivo dessa parte da atividade é perceber que cada sorteio da Mega Sena (ou outra loteria federal) é um evento independente. Ou seja, mesmo que determinada sequência já tenha sido sorteada anteriormente ou seja uma sequência que possa parecer improvável de ocorrer, as probabilidades são as mesmas em relação a outra sequência de números qualquer.

A falsa impressão de que um resultado do tipo (01, 02, 03, 04, 05, 06) é mais difícil de sair do que (11, 32, 36, 40, 46, 52) talvez se deva pelo fato de que é muito mais provável ser sorteada uma sequência que não tenha números consecutivos do que uma com números seguidos. Porém, devemos nos atentar para o seguinte fato: independente da sena sorteada ter números consecutivos ou não, cada jogo tem o mesmo peso em relação ao espaço amostral.

4.1.3 Terceira etapa

Tempo previsto para atividade: 30 minutos.

Nessa parte da atividade, o professor deve pedir aos alunos que reflitam sobre a seguinte situação:

- Hoje em dia, com R$ 24,50, consegue-se fazer uma aposta com 7 números no mesmo cartão ou 7 apostas de 6 números, ambas na Mega Sena. Dada essa situação, pergunta-se o que seria mais vantajoso: apostar 7 números num mesmo cartão ou apostar em 7 cartões com 6 números em cada, todas as dezenas distintas?

A ideia é a de que os alunos concluam que para se acertar a sena, marcar 7 números num mesmo cartão ou marcar 6 números em 7 cartões distintos, as chances se equiparam, como mostramos a seguir.

Cartão único com 7 números:

$$\frac{C_{7,6}}{C_{60,6}} = \frac{\frac{7!}{6!\,1!}}{50.063.860} = \frac{7}{50.063.860} \cong 1{,}4.\,10^{-7}$$

Sete cartões com 6 números:

$$7.\frac{1}{C_{60,6}} = \frac{7}{50.063.860} \cong 1{,}4.\,10^{-7}$$

Porém, se pensarmos no acerto da quina e considerarmos os sete cartões marcados com todas as dezenas distintas, concluiremos que é mais vantajoso apostar em 7 cartões distintos com 6 números. Assim:

Cartão único com 7 números:

$$\frac{C_{7,5}.\,C_{53,1}}{C_{60,6}} = \frac{1.113}{50.063.860} \cong 2{,}2.\,10^{-5}$$

Sete cartões com 6 números:

$$7.\frac{C_{6,5}.C_{54,1}}{C_{60,6}} = 7.\frac{324}{50.063.860} = \frac{2.268}{50.063.860} \cong 4{,}5.10^{-5}$$

4.1.4 Etapa Final

Tempo previsto para atividade: 60 minutos.

Nessa parte da atividade, o professor solicita que os alunos reflitam sobre a seguinte questão: - "Será que existe uma loteria federal mais indicada para se apostar?"

Primeiramente, o professor deve fazer com que os alunos concluam que para se comparar dois jogos de azar, devemos levar em conta suas premiações e probabilidades.

Exemplos:

a)

Jogo 1- Prêmio de R$ 10,00 com probabilidade de 50%

Jogo 2- Prêmio de R$ 20,00 com probabilidade de 50%.

Melhor jogo: jogo 2

b)

Jogo 1- Prêmio de R$ 10,00 com probabilidade de 80%

Jogo 2- Prêmio de R$ 10,00 com probabilidade de 25%.

Melhor jogo: jogo 1

Concluída a primeira etapa, o professor deve agora fazer o seguinte questionamento:

- "E se as probabilidades e prêmios pagos não forem iguais? Como compará-los?"

Para responder esse questionamento, realiza-se uma atividade com os alunos baseada no valor esperado de cada jogo. O valor esperado de um jogo é uma medida estatística que leva em consideração a premiação e sua probabilidade. É dado pela seguinte fórmula (FONSECA; MARTINS, 2006):

Valor esperado = ∑ (Premiação x Probabilidade)

Contudo, as premiações pagas pelas diversas loterias dependem da arrecadação de cada jogo e do número de acertadores que rateiam o prêmio total a ser pago. Visando resolver esse problema, foi utilizada a média das premiações pagas para cada jogo. Todos as médias dos prêmios pagos a seguir foram retiradas do site oficial da Caixa Econômica Federal.

Exemplo do cálculo do valor esperado da Mega Sena:

- Média dos prêmios pagos aos acertadores da sena: R$ 19.561.402,90

- Média dos prêmios pagos aos acertadores da quina: R$ 23.423,34

- Média dos prêmios pagos aos acertadores da quadra: R$ 502,02

- Probabilidade de acertar a sena com uma aposta simples: $0{,}000002\%$

- Probabilidade de acertar a quina com uma aposta simples: $0{,}0006\%$

- Probabilidade de acertar a quadra com uma aposta simples: $0{,}043\%$

- Valor esperado da Mega Sena:

$$VE = (19.561.402{,}90 \,.\, 0{,}000002\% + 23.423{,}34 \,.\, 0{,}0006\% + 502{,}02 \,.\, 0{,}043\% \cong 0{,}75$$

Entretanto, o valor calculado acima de R$0,75 não leva em consideração que o apostador deve pagar R$ 3,50 para realizar uma aposta simples da Mega Sena. Logo, se levarmos em consideração esse custo, temos que o valor esperado de todo o jogo é dado por R$0,75 - R$3,50 = - R$ 2,75.

O professor, se preferir, pode levar para a sala de aula as médias ou os valores esperados já prontos, fazendo apenas com que os alunos interpretem os dados. A tabela a seguir exibe os valores esperados das loterias estudadas, baseada nos dados extraídos do site da Caixa Econômica Federal:

Tabela 10. Valor esperado calculado das diversas loterias federais

Loteria	Quantidade de sorteios analisados	Início	Término	Valor Esperado (sem preço)	Valor Esperado (com preço)
MEGA-SENA	5	02/05/2015	13/06/2015	0,75	-2,75
LOTOFÁCIL	5	12/06/2015	22/06/2015	0,84	-1,16
QUINA	5	14/05/2015	15/06/2015	0,49	-1,01
DUPLA SENA	5	30/12/2014	24/03/2015	0,23	-1,77
LOTECA	5	13/04/2015	15/06/2015	0,07	-1,93
TIMEMANIA	5	14/10/2014	07/05/2015	0,79	-1,21
LOTOMANIA	5	21/03/2015	03/06/2015	0,67	-0,83
LOTOGOL	5	27/04/2015	15/06/2015	0,01	-0,99

Ao final da atividade e baseada na tabela acima, a turma deverá ser capaz de tirar algumas conclusões, dentre elas:

- A loteria mais indicada é a LOTOMANIA, que possui o maior valor esperado final (R$ -0,83).

- A MEGA SENA, uma das loterias mais populares, possui o menor valor esperado (R$ -2,75), apesar de possuir as maiores premiações. Isso se dá pelo fato da probabilidade de se ganhar algum prêmio com essa loteria ser muito baixa.

- Todas essas loterias seriam equivalentes se possuíssem o mesmo valor esperado. Isso ocorreria, por exemplo, se o preço de cada uma delas fosse igual ao seu respectivo valor esperado (sem preço). Nesse caso, o valor esperado final seria 0 e diríamos que o preço da loteria seria justo, ou seja, não haveria quem lucrasse com o mesmo: nem governo, nem apostador. Por exemplo, o preço justo a ser pago por uma aposta simples da LOTECA seria de R$ 0,07, ao invés de R$ 2,00 pago atualmente.

- Quanto às estratégias, nos jogos que envolvem partidas de futebol, o apostador pode utilizar alguma informação sobre o esporte bretão para aumentar as suas chances, como por exemplo, a maior probabilidade de o time da casa vencer uma partida.

- O apostador pode maximizar o valor esperado de sua aposta, guardando o seu dinheiro para apostar quando as premiações estiverem acumuladas.

CONCLUSÃO

Este trabalho buscou destacar que a aprendizagem em Matemática, em particular a probabilidade, será mais significativa através de aulas que aproximem o conteúdo com o cotidiano do aluno. A escolha do tema probabilidade se deu pela abundância de aplicações e ocasiões em que a mesma aparece no dia a dia.

Procurou também contribuir para a melhoria no ensino-aprendizagem de probabilidade no Ensino Médio, e para tal, utilizou as loterias federais como ferramenta, tema presente na cultura do brasileiro. Acreditou-se que, levando para sala de aula situações que aproximem o aluno de sua realidade, as aulas tornam-se mais atraentes do ponto de vista do discente, transcendendo a forma tradicional de ensino.

Com o intuito de colaborar com a prática pedagógica dos discentes, elaborou-se uma proposta de atividade pedagógica dividida em 4 etapas em sequência, todas baseadas nas loterias federais e destinadas aos alunos do Ensino Médio. Nessa proposta, o professor adota a função de mediador perante os diversos debates e discussões que certamente surgirão no decorrer das atividades.

É importante que se ressalte que as 4 etapas pedagógicas em sequência fazem parte de uma proposta, e portanto, dá total liberdade aos discentes que optarem por colocá-las em prática, a fazerem as alterações e adaptações que julgarem necessárias. O professor poderá, por exemplo, alterar a ordem da sequência das etapas, acrescentar novas atividades ou utilizar apenas algumas delas.

O trabalho cumpriu o seu objetivo em fornecer ferramentas para a melhora da prática pedagógica em Probabilidade e, consequentemente, informar os alunos sobre os jogos de maneira geral, e mais especificamente, sobre as loterias, conscientizando-os sobre as dificuldades de se ganhar e da participação das loterias como receita para o governo.

O fato é que alcançar uma educação de qualidade, através de um conhecimento concreto, é tarefa das mais árduas, e depende muito da dedicação dos profissionais envolvidos. Espera-se que a presente proposta de ensino coopere para esse fim.

REFERÊNCIAS

BERNSTEIN, P. L. **Desafio aos deuses: a fascinante história do risco.** Rio de Janeiro: Campus, 1997.

FONSECA, J. S.; MARTINS, G. A. **Curso de estatística**. São Paulo: Atlas, 2006.

GADELHA, A. **Uma pequena história da probabilidade.** Curso de Pós-Graduação em Matemática, DME/IM/UFRJ. Rio de Janeiro, 2004.

JULIANELLI, J.R.; DASSIE, B. A.; LIMA, M. L. A.; SÁ, I. P. **Curso de Análise Combinatória e Probabilidade: Aprendendo com a resolução de problemas.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009.

LIMA, C. A. V. **Probabilidade para o Ensino Médio**. 2013. 38 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão. 2013.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade**. 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

VIALI, L. **Algumas Considerações Sobre a Origem da Teoria da Probabilidade.** *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 8, n. 16, pág. 143-153.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ALVIM, K. G. C. **Análise Combinatória:** Uma questão de lógica e linguagens. 2013. 53 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia. 2013.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar** – Vol. 5 - Combinatória e Probabilidade. 6 ed. Editora Atual, 1998.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do Ensino Médio.** Vol. 2. - 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.