

**UFRRJ**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM**  
**MODELAGEM MATEMÁTICA E**  
**COMPUTACIONAL**

**DISSERTAÇÃO**

**Estudo de Equações de Condução de Calor  
Não Fourier via Derivadas Deformadas**

**Andressa Paula Costa Leopoldino**

**2019**



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM  
MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

ESTUDO DE EQUAÇÕES DE CONDUÇÃO DE CALOR NÃO  
FOURIER VIA DERIVADAS DEFORMADAS

ANDRESSA PAULA COSTA LEOPOLDINO

*Sob orientação de*  
**José Weberszpil**

*e co-orientação de*  
**Claudia Mazza Dias**

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre** no Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, Área de Concentração em Modelagem Matemática e Computacional.

Seropédica, RJ, Brasil  
Junho de 2019

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L587e Leopoldino, Andressa Paula Costa, 1993-  
Estudo de Equações de Condução de Calor Não Fourier  
via Derivadas Deformadas / Andressa Paula Costa  
Leopoldino. - Seropédica, 2019.  
104 f.

Orientador: José Weberszpil.  
Coorientadora: Claudia Mazza Dias.  
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal  
Rural do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em  
Modelagem Matemática e Computacional PPGMMC, 2019.

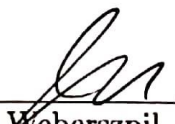
1. Derivadas Deformadas. 2. Condução de calor. 3.  
Equação de Fourier. 4. Equação de Cattaneo-Vernotte. 5.  
Métodos variacionais. I. Weberszpil, José , 1963-,  
orient. II. Dias, Claudia Mazza, -, coorient. III  
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro.  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e  
Computacional PPGMMC. IV. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA  
E COMPUTACIONAL

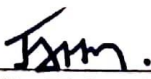
ANDRESSA PAULA COSTA LEOPOLDINO

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre** no Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, Área de Concentração em Modelagem Matemática e Computacional.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 25/06/2019.

  
\_\_\_\_\_  
José Weberszpil. D. Sc UFRRJ  
(Presidente)

  
\_\_\_\_\_  
Carlos Andrés Reyna Vera-Tudella. D. Sc. UFRRJ

  
\_\_\_\_\_  
José Abdalla Helayël-Neto. D. Sc. CBPF

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, por ter me abençoado e me sustentado todos os dias, me dando sabedoria e me protegendo. Aos meus pais Andréa Carla Milagres Costa e Paulo Cesar Ferreira Leopoldino, e aos meus avós Glória Milagres Costa e Francisco Claudio Costa pela dedicação, amor, apoio, amizade, confiança, e incentivo para que eu conquistasse essa vitória. Ao meu noivo Jorge Luiz Albuquerque O. Ladeira, por estar ao meu lado, sendo paciente e amigo, durante todo o período que estive elaborando esse trabalho.

Ao meu orientador professor José Weberszpil por ter me ajudado e acompanhado meu desenvolvimento, sendo paciente e acreditando na minha capacidade, com toda certeza foi de extrema importância para a conclusão desta dissertação. A minha co-orientadora Claudia Mazza, por toda colaboração, ajuda e apoio durante os anos do mestrado. Aos Professores Carlos Andrés Reyna Vera-Tudella e José Abdalla Helayël-Neto por aceitarem participar da minha banca.

Também gostaria de agradecer a todos os meus amigos, que estiveram ao meu lado neste momento, me ajudando com palavras de incentivo. Agradeço a todos que, mesmo não estando citados aqui, contribuíram para a conclusão desta etapa em minha vida. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*"Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta."*

*Gauss - Carl Friedrich*

## RESUMO GERAL

LEOPOLDINO, Andressa Paula Costa. **Estudos de Equações de Condução de Calor Não Fourier via Derivadas Deformadas**. 2019. 104f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional, Interdisciplinar). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2019.

A natureza é cercada de fenômenos irregulares, com comportamentos anômalos e alto nível de complexidade. Em alguns casos a geometria euclidiana, não consegue ser precisa na descrição destes eventos. Um exemplo onde este problema pode acontecer é em processos de condução de calor. Muitos resultados são obtidos ignorando algumas características dos problemas como: as rugosidades, as fissuras, corrosão, geometria irregular ou até mesmo fractal das superfícies envolvidas. Isto pode ocasionar a perda de precisão da solução. Contudo, com uso de derivadas deformadas, é possível embutir nas equações que modelam o fenômeno as peculiaridades de diversas estruturas fractais. Resultando assim em uma descrição mais aproximada dos modelos reais. Neste estudo, foram trabalhados dois modelos de condução de calor. O modelo clássico proposto por Fourier, que mesmo com algumas inconsistências ainda é muito eficiente e utilizado, e o modelo de Cattaneo-Vernotte, também conhecido como modelo não Fourier, que surgiu para melhorar as falhas no modelo anterior. Neste trabalho, ambos foram resolvidos de maneira analítica, por meio de métodos diferentes. O objetivo disto, é que ao transformar a derivada inteira em uma derivada deformada, nas equações diferenciais, é possível mostrar que os métodos de solução continuam sendo úteis para esses novos problemas, que agora conseguem considerar irregularidades antes ignoradas. As soluções foram também validadas, essas soluções analíticas por meio de uma breve comparação numérica, usando o conhecido método de diferenças finitas. Neste trabalho, foi apresentado também, por meio do cálculo variacional, maneiras de obter as equações de condução de calor aqui abordadas. Foram propostas algumas Lagrangianas e densidades Lagrangianas, que ao serem aplicadas nas equações de Euler-Lagrange, resultaram tanto as equações de condução de calor na sua forma inteira, quanto na forma deformada.

**Palavras-chave:** Condução de Calor, Derivadas Deformadas, Equação de Fourier, Equação de Cattaneo-Vernotte, Métodos Variacionais.

## GENERAL ABSTRACT

LEOPOLDINO, Andressa Paula Costa. **Studies of Non-Fourier Heat Conduction Equations via Deformed Derivatives**. 2019. 104p. Dissertation (Master in Mathematical and Computational Modeling, Interdisciplinary). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2019.

Nature is surrounded by irregular phenomena, with anomalous behavior and a high level of complexity. In some cases Euclidean geometry can not be precise in describing these events. An example where this problem can occur is in heat conduction processes. Many results are obtained by ignoring some characteristics of problems such as: roughness, cracking, corrosion, uneven geometry or even fractal of the surfaces involved, this can lead to loss of precision of the solution. However, with the use of deformed derivatives, it is possible to embed in the equations that model the phenomenon the peculiarities of several fractal structures. This results in a closer description of the actual models. In this study, were worked two models of heat conduction. The classic model proposed by Fourier, which even with some inconsistencies is still very efficient and used, and the Cattaneo-Vernotte model, also known as non-Fourier model, that appeared to improve the failures in the previous model. In this work, both were solved analytically, by means of different methods. The purpose of this is that by transforming the entire derivative into a deformed derivative in the differential equations we can show that the solution methods continue to be useful for these new problems, which are now able to consider previously ignored irregularities. The solutions were also validated, these analytical solutions by means of a brief numerical comparison using the known finite difference method. In this work, was also presented, through the variational calculation, ways to obtain the heat conduction equations discussed here. Were proposed some Lagrangian and Lagrangian densities that, when applied in the Euler-Lagrange equations, resulted both the heat conduction equations in their entire form and in the deformed form.

**Keywords:** Heat Conduction, Deformed Derivatives, Fourier Equation, Cattaneo-Vernotte Equation, Variational Methods .



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Representação do fluxo de calor em uma parede. Fonte: Autor .....	7
Figura 2.2 – Perfil de temperatura considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ e $t = 100s$ . .....	10
Figura 2.3 – Perfil de temperatura considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ . .....	11
Figura 2.4 – Perfil de temperatura considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ e $T_0 = 20^\circ C$ . .....	12
Figura 2.5 – Perfil de temperatura considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ e $T_0 = 20^\circ C$ . .....	13
Figura 3.1 – Perfil de temperatura para diferentes valores de tempo considerando $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-7}m^2/s$ , $T_0 = 20^\circ C$ , $T_h = 160^\circ C$ , $l = 20mm$ e $\tau = 15s$ . .....	20
Figura 3.2 – Perfil de temperatura em diferentes posições da superfície considerando $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-7}m^2/s$ , $T_0 = 20^\circ C$ , $T_h = 160^\circ C$ , $l = 20mm$ e $\tau = 15s$ . .....	21
Figura 3.3 – Perfil de temperatura, de acordo com a interpretação alternativa, para diferentes valores de tempo, considerando $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-7}m^2/s$ , $T_0 = 20^\circ C$ , $T_h = 160^\circ C$ , $l = 20mm$ e $\tau = 15s$ . .....	21
Figura 3.4 – Perfil de temperatura de acordo com a interpretação alternativa, para diferentes posições da superfície, considerando $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-7}m^2/s$ , $T_0 = 20^\circ C$ , $T_h = 160^\circ C$ , $l = 20mm$ e $\tau = 15s$ . .....	22
Figura 3.5 – Perfil de temperatura para diferentes valores de tempo $t$ , considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ e $T_0 = 20^\circ C$ .....	24
Figura 3.6 – Perfil de temperatura para diferentes posições $x$ , considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ e $T_0 = 20^\circ C$ . .....	25
Figura 3.7 – Comparação entre as soluções analíticas da ECCC e da ECV, resolvidas pelo MSV .....	26
Figura 4.1 – Alguns materiais que apresentam características irregulares [SANTOS et al., 2016]. .....	28
Figura 5.1 – Perfil de temperatura considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ . .....	36
Figura 5.2 – Perfil de temperatura considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ e $x = 0,5m$ . .....	38
Figura 5.3 – Perfil de temperatura considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ e posições próximas ao extremo final e ao extremo inicial. .....	38
Figura 5.4 – Gráficos comparativos considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ e $t = 100s$ .....	40
Figura 5.5 – Perfil de temperatura considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ e $T_0 = 20^\circ C$ . .....	43
Figura 5.6 – Perfil de temperatura considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ , e $T_0 = 20^\circ C$ . .....	44
Figura 5.7 – Perfil de temperatura em tempos diferentes, considerando $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-7}m^2/s$ , $T_0 = 20^\circ C$ , $T_h = 160^\circ C$ e $\tau = 15s$ . .....	48
Figura 5.8 – Perfil de temperatura, em posições diferentes, considerando $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-7}m^2/s$ , $T_0 = 20^\circ C$ , $T_h = 160^\circ C$ , e $\tau = 15s$ . .....	48
Figura 5.9 – O comportamento das funções $f^1$ e $f^2$ . .....	50
Figura 5.10 – Perfil de temperatura, para tempo diferentes, considerando $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-7}m^2/s$ , $T_0 = 20^\circ C$ , $T_h = 160^\circ C$ , e $\tau = 15s$ . .....	51
Figura 5.11 – Perfil de temperatura, para diferentes posições, considerando $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-7}m^2/s$ , $T_0 = 20^\circ C$ , $T_h = 160^\circ C$ , e $\tau = 15s$ . .....	52
Figura 5.12 – Perfil de temperatura considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ , $T_0 = 20^\circ C$ e $t = 1s$ . .....	56
Figura 5.13 – Perfil de temperatura considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ , $T_0 = 20^\circ C$ e $t = 100s$ .....	57
Figura 5.14 – Perfil de temperatura considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ , $T_0 = 20^\circ C$ e $x = 0,2m$ .....	58

Figura 5.15 –Perfil de temperatura considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ , $T_0 = 20^\circ C$ e $x = 0,5m$ .....	59
Figura 5.16 –Perfil de temperatura considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ , $T_0 = 20^\circ C$ e $x = 0,9m$ .....	60
Figura 5.17 –Perfil de temperatura considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ , $T_0 = 20^\circ C$ e $t = 100s$ . .....	61
Figura 6.1 – Análise comparativa da solução numérica e analítica, considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ e $T_0 = 20^\circ C$ .....	66
Figura 6.2 – Análise comparativa da solução numérica e analítica, considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ , $T_0 = 20^\circ C$ , $t = 100s$ e $N = 99$ . .....	67
Figura 6.3 – Análise comparativa das soluções numérica e analítica deformadas e a analítica inteira, considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ , $T_0 = 20^\circ C$ , $t = 100s$ e $\beta = 0,95$ . .....	68
Figura 6.4 – Análise comparativa das soluções numérica e analítica deformadas e a analítica inteira, considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ , $T_0 = 20^\circ C$ , $t = 100s$ , $J + 1 = 20$ e $N + 1 = 100$ . .....	69
Figura 6.5 – Análise comparativa das soluções numérica e analítica da equação de Cattaneo-Vernotte, considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ , $T_0 = 20^\circ C$ e $t = 10s$ . .....	71
Figura 6.6 – Análise comparativa das soluções numérica e analítica da equação de Cattaneo-Vernotte, considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ , $T_0 = 20^\circ C$ e $t = 100s$ . .....	71
Figura 6.7 – Análise comparativa das soluções numérica, analítica deformada e a analítica inteira, considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ , $T_0 = 20^\circ C$ , $t = 100s$ e $\beta = 0,95$ . .....	73
Figura 6.8 – Análise comparativa das soluções numérica, analítica deformada e a analítica inteira, considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ , $T_0 = 20^\circ C$ , $t = 100s$ e $\beta = 0,97$ . .....	73
Figura 6.9 – Análise comparativa das soluções numérica, analítica deformada e a analítica inteira, considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ , $T_0 = 20^\circ C$ , $t = 100s$ e $\beta = 0,99$ . .....	74
Figura 10.1 –Análise do comportamento das funções, considerando $\alpha = 0,001m^2/s$ , $\tau = 15s$ , $x = 0,5m$ , $T_i = 20^\circ C$ e $T_h = 50^\circ C$ .....	98

## LISTA DE APÊNDICES

APÊNDICE A – SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR CLÁSSICA POR TRANSFORMADA DE FOURIER.....	91
APÊNDICE B – SOLUÇÃO ANALÍTICA DA ECCC PELO MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS .....	93
APÊNDICE C – SOLUÇÃO ANALÍTICA DA ECV PELO MÉTODO DA SOLUÇÃO TENTATIVA .....	95
APÊNDICE D – SOLUÇÃO ANALÍTICA DA ECV PELO MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS .....	99
APÊNDICE E – OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE ONDA DEFORMADA .....	103

## LISTA DE ABREVIACOES E SIGLAS

RJ	Rio de Janeiro
UFRRJ	Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
ECCC	Equação de condução de calor clássica
EDP	Equação diferencial parcial
C-V	Cattaneo-Vernotte
G-K	Modelo de Guyer-Krumhansl
ECV	Equação de Cattaneo-Vernotte
DPL	Dual Phhase Lagging
SC	Sistemas complexos
DD	Derivada deformada
TF	Transformada de Fourier
TIF	Transformada inversa de Fourier
EDO	Equação diferencial ordinária
MSV	Método de separação de variáveis
DDCG	Derivada deformada conforme geral
ECCD	Equação de condução de calor deformada
ECVD	Equação de Cattaneo-Vernotte deformada
DF	Diferenas Finitas
E-L	Euler-Lagrange

## LISTA DE SÍMBOLOS

$T$	Temperatura [ $^{\circ}C$ ]
$t$	Tempo [ $s$ ]
$A$	Área transversal total [ $m^2$ ]
$l$	Comprimento
$k$	Condutividade Térmica [ $\frac{W}{m.K}$ ]
$q$	Fluxo térmico [ $W/m^2$ ]
$m$	Massa [ $g$ ]
$W$	Watt
$K$	Kelvin
$\rho$	Densidade de massa [ $kg/m^3$ ]
$c$	Calor específico [ $cal/g.^{\circ}C$ ]
$\alpha$	Difusividade Térmica [ $m^2/s$ ]
$x, y, z$	Coordenadas retangulares [ $m$ ]
$r, phi, z$	Coordenadas cilíndricas [ $m$ ]
$r, \phi, \theta$	Coordenadas esféricas [ $m$ ]
$\tau$	Tempo de relaxação [ $s$ ]
$B$	Um corpo
$P$	Parte arbitrária de um corpo B
$H$	Variação de entropia [ $J/K$ ]
$d$	Taxa de dissipação [ $W$ ]
$\tau_q$	Tempo necessário para estabelecer o fluxo de calor [ $s$ ]
$\tau_T$	Tempo de relaxação térmico [ $s$ ]
$\forall$	Para todo
$T_h$	Temperatura imposta na superfície aquecida considerada no problema [ $^{\circ}C$ ]
$T_i$	Temperatura inicial considerada no problema [ $^{\circ}C$ ]
$T_0$	Temperatura inicial [ $^{\circ}C$ ]
$\beta$	Coefficiente de deformação [ $adm$ ]
$h$	Parâmetro de dimensionalização da equação deformada [ $s^{1-\beta}$ ]

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO GERAL</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução	1
1.2	Justificativa	4
1.3	Objetivos	4
1.3.1	Objetivo Geral	4
1.3.2	Objetivos Específicos	4
<b>2</b>	<b>TEORIA DE FOURIER PARA CONDUÇÃO DE CALOR</b>	<b>6</b>
2.1	Energia Térmica	6
2.2	Transferência de calor	6
2.2.1	Condução	6
2.3	Equação de condução de calor	8
2.4	Soluções analíticas da equação de condução de calor clássica	9
2.4.1	Método da Transformada de Fourier	10
2.4.1.1	Interpretação Gráfica	10
2.4.2	Método de Separação de Variáveis	11
2.4.2.1	Interpretação Gráfica	12
<b>3</b>	<b>TEORIA NÃO FOURIER PARA CONDUÇÃO DE CALOR</b>	<b>14</b>
3.1	Modelo de Cattaneo-Vernotte	14
3.1.1	Incoerências do Modelo de Cattaneo-Vernotte	16
3.2	Modelo de Guyer-Krumhansl	17
3.3	Modelo de Condução de Calor <i>Dual-phase-lagging</i>	18
3.4	Solução Analítica da Equação de Cattaneo-Vernotte	18
3.4.1	Método da Solução Tentativa	19
3.4.1.1	Interpretação Gráfica	19
3.4.1.2	Interpretação alternativa	20
3.4.2	Método de Separação de Variáveis	23
3.4.2.1	Interpretação gráfica	23
<b>4</b>	<b>CÁLCULO DEFORMADO</b>	<b>27</b>
4.1	Introdução	27
4.2	Cálculo Fracionário	27
4.3	Introdução ao mapeamento no contínuo fractal	28
4.4	Derivadas Deformadas	29
4.4.1	Derivada de Hausdorff	29
4.4.2	Derivada Estrutural	30
4.4.3	Derivada Deformada Conforme	30
4.4.4	Derivada de Gâteaux	31
4.4.5	Derivada Deformada Conforme Geral	32
4.4.5.1	q-Derivadas	32

<b>5</b>	<b>APLICAÇÕES DO CÁLCULO DEFORMADO</b>	<b>34</b>
5.1	Introdução	34
5.2	Soluções analíticas da equação de condução de calor deformada	34
5.2.1	Método da Transformada de Fourier	34
5.2.1.1	Interpretação Gráfica	36
5.2.2	Método de Separação de Variáveis	41
5.2.2.1	Interpretação Gráfica	43
5.3	Equação de Cattaneo-Vernotte Deformada	45
5.4	Soluções analíticas da equação de Cattaneo-Vernotte deformada	46
5.4.1	Método da Solução Tentativa	46
5.4.1.1	Interpretação Gráfica	48
5.4.1.2	Interpretação alternativa	49
5.4.2	Método de Separação de Variáveis	51
5.4.2.1	Interpretação Gráfica	56
<b>6</b>	<b>MÉTODO NUMÉRICO</b>	<b>62</b>
6.1	Modelagem Computacional	62
6.2	Série de Taylor	63
6.3	Método de Diferenças Finitas	63
6.3.0.1	Diferença finita progressiva no tempo	63
6.3.0.2	Diferença finita regressiva no tempo	64
6.3.0.3	Diferença finita centrada no tempo	64
6.3.0.4	Diferença finita centrada no espaço	65
6.4	Modelagem numérica da equação de condução de calor clássica	65
6.5	Modelagem numérica da equação de condução de calor deformada	67
6.6	Modelagem numérica da equação de Cattaneo-Vernotte clássica	69
6.7	Modelagem numérica da equação de Cattaneo-Vernotte deformada	72
<b>7</b>	<b>CÁLCULO VARIACIONAL DEFORMADO</b>	<b>75</b>
7.1	Cálculo Variacional	75
7.2	Abordagem Variacional com derivadas embebidas	75
7.3	Equação de Condução de Calor Clássica	78
7.4	Equação de Condução de Calor Deformada	79
7.5	Equação de Cattaneo-Vernotte	79
7.6	Equação de Cattaneo-Vernotte Deformada	79
<b>8</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>81</b>
8.1	Considerações	81
8.1.1	Considerações Finais	82
8.2	Trabalhos futuros	83
<b>9</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>85</b>
<b>10</b>	<b>APÊNDICE</b>	<b>90</b>

# 1 INTRODUÇÃO GERAL

## 1.1 Introdução

Os problemas de Transferência de calor são importantes e diversos ramos das ciências, e podem ser observados em diferentes aspectos. Dentre os múltiplos casos encontra-se a necessidade desses estudos nas engenharias, principalmente na mecânica, em processos de otimização, em tratamentos médicos, no processo de metabolismo celular, ou até mesmo nas trocas de calor em tecidos biológicos.

O fenômeno de transferência de calor é ubíquo em processos industriais, biológicos e da natureza. O conhecimento aprofundado dos processos de troca de calor pode fornecer uma melhor compreensão da dinâmica de troca energética, podendo levar a novas técnicas de aplicação e análise.

A dinâmica de condução de calor é descrita, em um modelo mais fundamental, pela lei de Fourier. De acordo com Schwarzwälder [SCHWARZWÄLDER, 2015] esta lei afirma que o fluxo do calor é proporcional ao gradiente de temperatura. Com base no que afirma Pifer [PIFER, 2015], no século XVIII, o matemático e físico francês Jean-Batiste Joseph Fourier, iniciou seus estudos sobre condução de calor. No primeiro momento, Fourier considerou a troca de calor em um modelo de corpo composto por  $n$  corpos discretos. Porém, essa abordagem não o permitiu obter a equação de condução de calor. Ao descobrir os trabalhos de Jean Baptiste Biot sobre o assunto, em 1804, Fourier retomou seus estudos [BIOT, 1804].

Em 1807, Fourier apresentou um trabalho cujo título é "*Mémoire sur la propagation de la chaleur*" [FOURIER, 1808], que tratava sobre a propagação térmica. Nele, Fourier ignorou a natureza do calor e deu foco às aplicações do cálculo nos problemas físicos. Este trabalho só foi publicado em 1822 e recebeu o título de "*Theorie analytique de la chaleur*" [FOURIER, 1878]. Com uma fundamentação na lei de Newton do resfriamento e combinada com a lei de conservação de energia, foi formulada a Equação de Condução de Calor Clássica (ECCC), através do uso de Equações Diferenciais Parciais (EDP). Sua solução foi encontrada por meio do uso de séries trigonométricas [PIFER, 2015].

Essa ECCC, também chamada de segunda lei de Fourier por Marín [MARÍN; MARÍN, 2011], é parabólica em termos do campo de temperatura. Apesar de levar a resultados satisfatórios na maioria dos problemas de engenharia, como Fourier não considerou as hipóteses relacionadas com a natureza do calor, ela apresenta uma inconsistência. Essa equação prevê uma velocidade infinita de propagação de calor, o que significa que qualquer perturbação inicial, em qualquer ponto do meio, seria sentida instantaneamente em todo o corpo. Por isso, um modelo realista deveria levar em conta uma velocidade finita de propagação dessa energia.

Com a evolução da tecnologia, nota-se que esta equação clássica de condução não é mais tão adequada. Alguns estudos [MARÍN; MARÍN, 2011; DE ARAUJO, 1982; LEBON et al., 1997; ZHUKOVSKY, 2017], entre outros, vêm relatando situações onde essas inconsistências inviabilizam o uso da equação clássica. Dias [DIAS, 2011] enumera algumas destas situações. Seus exemplos tratam de problemas relacionados a curtos intervalos de tempo, quando o gradiente de temperatura é muito elevado ou até mesmo em temperaturas bem próximas de zero. Em todas as situações estudadas pelo autor, a lei de Fourier não descreveu bem a dinâmica de propagação do fluxo térmico.

Em outro estudo, feito por Schwarzwälder [SCHWARZWÄLDER, 2015], essas cir-



cunstâncias em que a lei não descreve a dinâmica perfeitamente, são frequentemente encontradas em: procedimentos com laser, aquecimento de camadas ultrafinas e experimentos que envolvem transferência de calor em sólidos, com uso de moléculas.

O interesse na condução de calor não Fourier aumentou, ainda mais, devido sua aplicabilidade em transporte de calor em micro-escala. Os autores Tamma e Zhou [TAMMA; ZHOU, 1998], publicaram um trabalho sobre o modelo de Fourier, considerando que o mesmo não prever a velocidade de propagação de calor no meio como um estado transitório.

Por esse motivo, vários modelos alternativos têm sido propostos, visando superar as limitações da teoria clássica, pesquisando modelos com equações onde a velocidade da onda de calor é finita [DIAS, 2011]. Dentre esses modelos, o de Maxwell-Cattaneo, possui uma equação descritiva conhecida como equação de Cattaneo-Vernotte [SCHWARZWÄLDER, 2015]. Nesse modelo é acrescentado um tempo de relaxação no fluxo de calor, mudando a equação descritiva para uma forma de equação de onda atenuada. Um outro modelo, que leva em conta as equações de Guyer-Krumhansl, apresenta efeitos não locais como a viscosidade para o calor.

Nesse trabalho de dissertação foi feita o estudo de modelos de condução de calor, por meio da ótica de sistemas complexos; particularmente modelos com derivadas deformadas.

Os autores C. Cattaneo [CATTANEO, 1958] e P. Vernotte [VERNOTTE, 1958] desenvolveram, independentemente, o modelo de condução de calor não Fourier, para o qual propuseram uma equação alternativa. A equação proposta leva em conta a equação de Fourier, que é parabólica, mas acrescida de um termo adicional que a torna uma equação hiperbólica [CHOI et al., 2016].

Foi utilizado como suporte ferramental o cálculo variacional e o cálculo com derivadas deformadas para propor Lagrangianas. Uma delas conduz à forma inteira da equação, enquanto a outra à uma equação deformada ou mesmo a uma equação não linear.

De acordo com as refs. [WEBERSZPIL; LAZO; HELAYËL-NETO, 2015; KHALIL et al., 2014; WEBERSZPIL, 2013], um dos motivos para a utilização de derivadas fracionárias ou mesmo deformadas vem do fato de representarem, de maneira mais adequada e mais próxima do mundo real, a dinâmica de Sistemas Complexos (SC). Isto indica um formalismo promissor, visto que a maioria dos sistemas reais da natureza possui uma grande complexidade.

Os SC são sistemas onde existem elevados números de membros, elementos ou agentes, que estão interagindo tanto uns com os outros, quanto com o meio ambiente. Essas interações por vezes têm a capacidade de criar novas estruturas espaciais, temporais ou funcionais [WEBERSZPIL, 2013].

Um exemplo comum de SC é o cérebro humano, formado por uma complicada rede de neurônios. Para compreender o funcionamento deste e de outros SC é fundamental não decompor este sistema em termos constituintes, mas sim entender a dinâmica e os processos como um todo. Alguns modelos, têm sua complexidade relacionada com a memória de longo prazo das interações de longo alcance, com efeitos não locais.

Weberszpil [WEBERSZPIL, 2013] interpreta o efeito de memória como aquele em que um evento em dado instante depende de todo o intervalo temporal de eventos anteriores, e não apenas do evento adjacente. Já a não localidade é interpretada, na mesma referência, de modo que eventos em uma dada coordenada dependem de todo um intervalo de posições anteriores, de maneira semelhante ao efeito de memória só que agora dependente da posição espacial.

As Derivadas Deformadas (DD) são operadores locais. No entanto, seguindo a argumentação de que a descrição de SC requer novas abordagens e paradigmas, as DD são baseadas na derivada usual do cálculo inteiro, porém com alguma deformação. Os artigos das referências [WEBERSZPIL; LAZO; HELAYËL-NETO, 2015; KHALIL et al., 2014; KATUGAMPOLA, 2014], entre outros, explicitam alguns exemplos dessas derivadas deformadas.

A utilização das DD, assim como do Cálculo Fracionário, está em franca ampliação em diferentes áreas, como engenharias, biomedicina, modelos de condução de calor, processamento de imagens e sinal e até mesmo pode ser alvo de estudos em ciências humanas e econômicas. Zhou et al. [ZHOU; YANG; ZHANG, 2018], pesquisaram o uso de um modelo DD conformável, inicialmente proposto por Khalil [KHALIL et al., 2014], em estudos de difusão anômala. Como resultado, os autores concluíram que tais modelos são mais adequados aos ajustes de dados experimentais apresentados.

Podem ser encontrados na literatura diversos trabalhos que utilizam DD, para obter equações conhecidas. Como é o caso do trabalho apresentado por Weberszpil e Chen [WEBERSZPIL; CHEN, 2017], onde os autores utilizam um modelo de derivada métrica com um mapeamento para um espaço fractal contínuo. E assim, desenvolvem as relações termodinâmicas generalizadas de Maxwell, onde consideram sistemas complexos em que as quantidades termodinâmicas são expressas por derivadas métricas parciais.

Em outro trabalho [XU et al., 2017], pode-se observar a aplicação de uma derivada estrutural espacial, para construir um modelo de difusão ultra-lento. Esse tipo de pesquisa, tem se mostrado cada vez mais atrativa em diversos campos, como no estudo de materiais poliméricos, na biomecânica, na engenharia biomédica, entre outros.

Pode-se ver outro exemplo de aplicação da derivada estrutural, com uma escala  $q$ -derivada, no trabalho apresentado por Weberszpil e Sotolongo-Costa [WEBERSZPIL; SOTOLONGO-COSTA, 2017]. Os autores propuseram uma equação diferencial deformada que modela a morte de células quando expostas a radiação, em tratamentos tumorais. O trabalho realizado fornece ainda expressões para os fatores de sobrevivência celular, que dependem da complexa estrutura do tumor.

Na natureza e em processos de dissipação de energia existe alguns fenômenos irregulares, que não consegue-se descrever com precisão através da geometria Euclidiana. As derivadas deformadas propõem uma descrição matemática do contínuo, porém que embutem em suas equações as peculiaridades de estruturas fractais [WEBERSZPIL; LAZO; HELAYËL-NETO, 2015].

A partir dessa abordagem é possível entender o comportamento, por exemplo, do perfil de temperatura em um processo de condução de calor, levando em conta a rugosidade das superfícies envolvidas. A finalidade é incluir analiticamente nas equações os padrões irregulares, o que acaba ocasionando descrições mais realistas nos modelos presentes no cotidiano.

Com base nos conceitos como complexidade, granulidade e dimensões não inteiras ou fractais, pode-se justificar o uso de derivadas deformadas para resolver os modelos propostos, percebendo que os modelos de ordem inteira possuem limitações de origens diversas. Um dos objetivos deste trabalho é o de investigar sistemas que possuem comportamentos anômalos. Este trabalho sugere que o uso de derivadas deformadas, pode ser adequado para descrever a dinâmica de sistemas complexos, porém sem explicitar todos os termos ou variáveis diretamente no modelo matemático.

O estudo de sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais com DD tem atraído a atenção de pesquisadores, o que pode ser constatado pelos diversos traba-

lhos científicos publicados recentemente, entre estes destacam-se [WEBERSZPIL; LAZO; HELAYËL-NETO, 2015; KHALIL et al., 2014; WEBERSZPIL; HELAYËL-NETO, 2016].

## 1.2 Justificativa

O estudo de modelos de condução de calor não Fourier, tal como o que leva em conta a equação de Cattaneo-Vernotte, se justifica dentro do contexto de sistemas complexos, tais como sólidos heterogêneos. A equação clássica de condução de calor, a de Fourier, indica uma inconsistência de velocidade infinita de propagação do calor. Estudos afirmam que a equação clássica pode não ser um bom modelo para muitos problemas, pelas considerações anteriores [SCHWARZWÄLDER, 2015; MARÍN; MARÍN, 2011; LEBON et al., 1997; ZHUKOVSKY, 2017; DIAS, 2011; CHOI et al., 2016].

Diferentemente da abordagem da mecânica estatística, nesse estudo é adotado um paradigma que faz um mapeamento de um espaço descontínuo, tornando-o contínuo, mas com uma métrica que pode ser fractal. Isto implica na modificação da álgebra, que nos conduz de maneira natural à alterações nas derivadas [WEBERSZPIL; HELAYËL-NETO, 2016].

Com base no trabalho de Weberszpil et al. [WEBERSZPIL; LAZO; HELAYËL-NETO, 2015], sabe-se que com o surgimento desta nova álgebra, abrem-se caminhos para a construção de teorias não-lineares, onde se considera as interações de longo alcance das partículas presentes no sistema. Sendo possível a substituição de uma equação deformada por uma não linear de ordem fracionária, em fenômenos que descrevem a dinâmica de SC e fractais.

Particularmente, o estudo de modelos de condução de calor com o uso de DD abre a possibilidade de descrever a dinâmica de transferência de energia térmica em SC. Além da ciência básica, aplicações potenciais podem ser pensadas, como por exemplo em estudos de propagação de calor em solos irrigados, análise termográfica de condutos corroídos que são usados no transporte de gás e petróleo, sistemas termoelásticos, dentre outras possibilidades.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo Geral

Estudar como os efeitos da dimensionalidade, da complexidade das iterações e da estrutura do meio influenciam na condução de calor, através de um mapeamento no contínuo fractal e a conseqüente deformação das derivadas. Serão feitas comparações entre essas soluções na forma inteira e na forma deformada, entre os modelos distintos e também comparações numéricas e analíticas.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

- Estudar modelos de condução de calor, através das equações de Fourier e da equação de Cattaneo-Vernotte tanto na sua forma inteira quanto na deformada.
- Obter essas equações por meio do cálculo variacional, adequadamente modificado para lidar com sistemas dissipativos.

- Obter equações por diferentes métodos, tal como a expansão de Taylor inteira e deformada, assim como por integração direta e mudança de núcleo de integração.
- Expor soluções analíticas e/ou numéricas para as equações.
- Verificar se há diferença significativa entre as soluções na forma inteira e deformada.
- Propor possíveis aplicações e verificações experimentais.

## 2 TEORIA DE FOURIER PARA CONDUÇÃO DE CALOR

### 2.1 Energia Térmica

A energia térmica é a manifestação da energia liberada em forma de calor. De acordo com Young e Freedman [YOUNG; FREEDMAN, 2008], o modelo microscópico da matéria indica que um corpo está em constante movimento ou vibração. Este movimento implica que os átomos têm uma certa energia cinética que recebe o nome de calor ou energia térmica. A unidade de medida para energia térmica no Sistema Internacional (SI) de unidades é o Joule ( $J$ ).

### 2.2 Transferência de calor

A energia térmica pode ser transmitida de um corpo para o outro de acordo com as leis da termodinâmica. Segundo Incropera [INCROPERA, 2008] a transferência de calor é o trânsito desta energia devido a uma diferença de temperatura no meio. Sempre haverá a transferência de calor quando houver um gradiente de temperatura em uma superfície ou entre meios. Existem três modos de transferência de calor: condução, convecção e radiação. Nesse trabalho será abordado apenas a transferência feita por meio de condução de calor, pois o interesse é na condução em sólidos heterogêneos.

#### 2.2.1 Condução

A transferência de calor por condução ocorre quando dois corpos com temperaturas diferentes estão em contato físico entre si. Neste momento, as partículas mais energéticas transferem a energia para as partículas menos energéticas, ou seja, a condução de energia térmica se dá de uma região com a temperatura mais elevada para a região com menor temperatura [DE ARAUJO, 1982].

Pelo fato dos átomos da região mais quente possuírem uma energia cinética média maior do que a região mais fria, eles colidem entre si e desta maneira a energia cinética é transferida em forma de calor [YOUNG; FREEDMAN, 2008]. Isto fará com que a temperatura desta região que está recebendo a energia aumente gradativamente até que ocorra o equilíbrio [DA BARBOSA, 2004].

A transferência de calor se dá em condutores sólidos através de difusão de elétrons livres, que se movem quando um campo potencial é aplicado e contribuem para o transporte de corrente elétrica e de calor, ou por vibrações de fônons, que são a quantidade de vibrações da rede cristalina do sólido.

O calor é transferido por condução, a partir do momento em que átomos que estão próximos uns dos outros vibram ocasionando uma vibração de rede, como em osciladores harmônicos acoplados, ou quando os átomos perdem ou recebem elétrons. Como um sólido tem suas medidas espaciais relativamente fixadas, conseqüentemente haverá uma maior transferência de energia por condução entre os átomos.

É possível encontrar no cotidiano diversos exemplos de troca de calor por meio de condução. Por exemplo, em uma xícara com algum líquido quente (café, chá,...) ao utilizar uma colher de metal para mexer o conteúdo, a colher recebe calor do líquido, aumentando assim sua temperatura; quando um quarto aquecido perde energia em um dia de inverno ou mesmo ao anoitecer; quando uma panela fervendo água em um fogão, por condução é aquecida pelo fogo fornecendo energia para água, elevando sua agitação molecular e por consequência fazendo a temperatura subir; entre outros.

Como dito na seção 1, o matemático e físico francês, Jean-Baptiste Joseph Fourier, nascido em meados do século XVIII, foi o responsável por introduzir um modelo matemático adequado para o processo de transmissão de energia por condução em forma de calor.

Considerando uma parede de seção reta, com duas faces paralelas e opostas não isoladas e as demais isoladas termicamente [DE ARAUJO, 1982], Fourier verificou que o fluxo de calor é diretamente proporcional ao gradiente de temperatura entre as faces da parede e à sua área, e inversamente proporcional à espessura da parede.

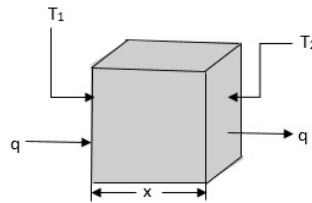


Figura 2.1: Representação do fluxo de calor em uma parede. Fonte: Autor

Observando-se a figura 2.1, nota-se que quanto maior a espessura, menos calor será transmitido de uma face para a outra. E a medida que a área da superfície aumenta, a transferência de calor também cresce. Tem-se então que:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} \propto \frac{A\Delta T}{x}, \quad (2.1)$$

onde,  $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$  é o fluxo de calor transferido por condução;  $A$  é a área da secção reta da parede;  $\Delta T$  é a diferença de temperaturas das faces opostas da parede;  $x$  é a espessura da parede.

Fourier em seus estudos notou a necessidade de acrescentar uma constante diferente, referente a cada material que era trabalhado. Essa constante é denominada coeficiente de condutividade térmica, e por meio dela é possível determinar se o material é um bom condutor ou isolante térmico.

Fourier também optou por trabalhar com uma área elementar  $dA$ , com espessura  $dx$  e diferença infinitesimal de temperatura  $dT$  [VILAR, 2012]. Pelo fato do gradiente de temperatura ser decrescente, foi necessário o uso de sinal negativo, para tornar o fluxo de

calor positivo. Assim, obtém-se a lei de Fourier:

$$q = \frac{dQ}{dt} = -k \frac{dT}{dx}, \quad (2.2)$$

onde, de acordo com Incropera [INCROPERA, 2008], tem-se que:

- $q = \frac{dQ}{dt}$  é o fluxo térmico e representa a taxa de transferência de calor na direção  $x$  por unidade de área perpendicular à direção da transferência. Este fluxo é proporcional a  $\frac{dT}{dx}$  que é o gradiente de temperatura. Sua unidade de medida no sistema internacional é  $\frac{W}{m^2}$ .
- $k$  é um parâmetro que corresponde a condutividade térmica, medida característica de cada material em questão. Sua unidade de medida no SI é  $\frac{W}{mK}$ .

### 2.3 Equação de condução de calor

No estudo da condução de calor, um dos principais objetivos é conhecer a distribuição de temperatura de acordo com as condições impostas nas fronteiras do corpo. Conhecendo essa distribuição, é possível determinar através da lei de Fourier o fluxo de calor por condução, em qualquer ponto do meio considerado.

Em um meio sólido, utiliza-se o estudo com campo de temperatura para verificar a integridade da estrutura, por meio da análise de expansões, tensões e deflexões térmicas. Também é possível usar o conhecimento dessa distribuição de temperatura para otimizar, em um material isolante, a sua espessura [INCROPERA, 2008].

Conforme a figura 2.1, pode-se notar que o sistema de transferência de calor em um determinado meio ocorre da seguinte maneira:

$$\textit{Fluxo que entra} - \textit{Fluxo que sai} = \textit{Taxa de ganho de energia}$$

Em notação matemática, a equação que representa o fluxo que entra subtraído do que sai é,

$$\frac{dQ}{dt} S - \frac{dQ'}{dt} S = -(q' - q)S = -dq S = -\frac{\partial q}{\partial x} S dx, \quad (2.3)$$

Tem-se também a equação referente a taxa de energia como [INCROPERA, 2008],  $dQ = mc dT$ . Sabendo-se que  $\frac{dQ}{dt} = q$ , então  $\frac{dQ}{m} = c dT$ , onde  $c$  é o calor específico.

Se o aumento de temperatura ocorre num tempo  $dt$ , a energia absorvida por unidade de massa por unidade de tempo é  $c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$ . Aqui, a massa do elemento de volume em consideração é  $\rho S dx$ , onde  $\rho$  é a densidade de massa.

Então, o ganho de energia por unidade de tempo será:

$$-\frac{\partial q}{\partial x} S dx = mc \frac{dT}{dt}, \quad (2.4)$$

Como  $m = \rho S dx$  tem-se que:

$$-\frac{\partial q}{\partial x} S dx = \rho S dx c \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right), \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (2.6)$$

A eq.(2.6) acima, é conhecida equação da continuidade e representa a conservação de energia térmica. Aplicando a lei de Fourier dada pela eq.(2.2), obtém-se:

$$-k \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (2.8)$$

Com isso, a eq.(2.8) é equivalente a equação de condução de calor unidimensional, também conhecida como 2º lei de Fourier para transferência de calor. Neste trabalho, será considerado  $\frac{k}{\rho c} = \alpha$ .

Considerando-se aqui um meio onde não exista uma fonte de geração de calor e em que a condutividade térmica  $k$  é constante, é possível representar as formas gerais de equações de condução de calor nos sistemas de coordenadas retangulares, cilíndrica e esférica, respectivamente, como segue [INCROPERA, 2008]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2.11)$$

## 2.4 Soluções analíticas da equação de condução de calor clássica

Nas subseções a seguir, serão abordados dois problemas que envolvem a ECCC, porém esses precisam de métodos de solução diferentes. Em 2.4.1, o problema envolve uma barra infinita, com condição inicial conhecida, por isso o uso da Transformada de Fourier se tornou mais viável.

Na subseção 2.4.2, será analisada uma barra finita de comprimento  $l = 1m$ , onde as condições de contorno da barra são conhecidas, assim como a condição inicial. Essas informações possibilitam o uso do conhecido método de separação de variáveis.



O objetivo das abordagens diferentes, é mostrar ao leitor que todo o estudo feito neste trabalho, pode ser aplicado em diversos casos, inclusive para diferentes métodos matemáticos.

### 2.4.1 Método da Transformada de Fourier

Considerando-se o seguinte problema de condução de calor em uma barra, isolada termicamente, homogênea e infinita.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, \\ T(x, 0) &= f(x), & -\infty < x < \infty. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Assumindo-se que a função  $f$  é contínua, limitada e integrável em todos os pontos, pode-se resolver o problema (2.12) através do uso da transformada de Fourier. Considerando-se  $f(x) = \delta(x)$ , ou seja, uma função impulso de Dirac, obtém-se a seguinte solução analítica:

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}}. \quad (2.13)$$

Os cálculos para a obtenção da eq.(2.13), podem ser encontrados no apêndice A.

#### 2.4.1.1 Interpretação Gráfica

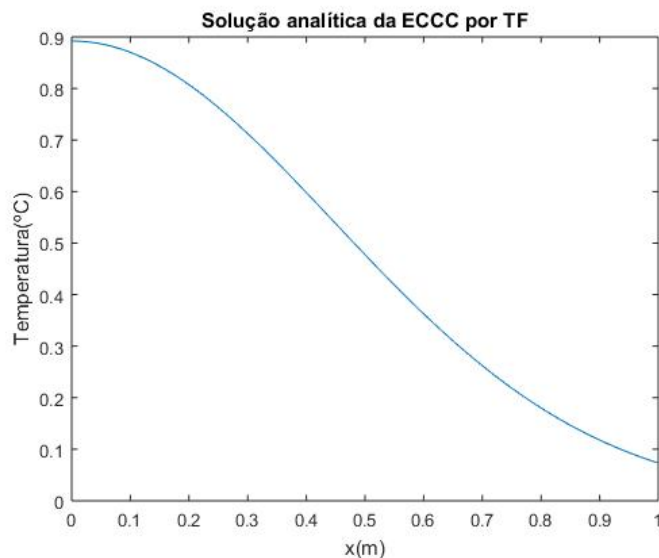


Figura 2.2: Perfil de temperatura considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$  e  $t = 100s$ .

A figura 2.2, ilustra a variação de temperatura em um tempo determinado, de acordo com coordenada de posição  $x$ . Nota-se no problema modelado, um pulso de calor,

elevando a temperatura, a medida que afasta-se mais do local onde ocorreu o pulso, a temperatura diminui até alcançar o equilíbrio.

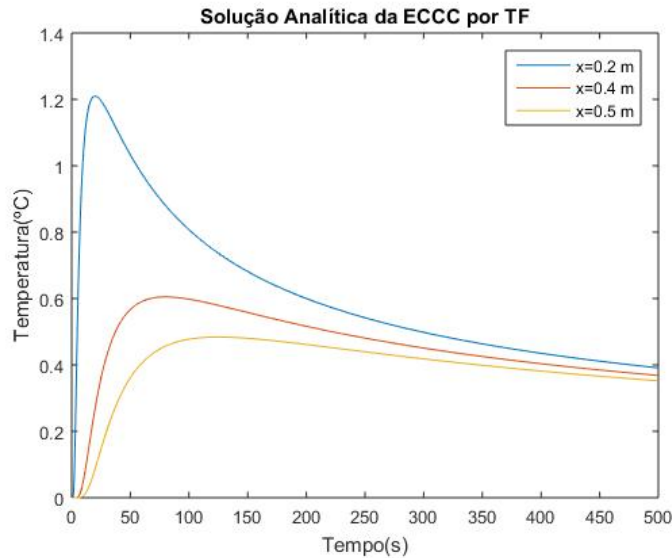


Figura 2.3: Perfil de temperatura considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$ .

Para diferentes valores de  $x$ , é possível verificar um comportamento similar, como pode ser visto na figura 2.3. Assim quanto mais próximo de  $x = 0$  mais elevada é a temperatura, devido a proximidade com o pulso, porém para valores maiores de  $x$ , as temperaturas tendem a se tornar bem próximas.

#### 2.4.2 Método de Separação de Variáveis

Considera-se agora o seguinte problema de condução de calor: uma barra, limitada, isolada termicamente e homogênea [MICKENS; JORDAN, 2004; BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 1992; HANCOCK, 2004].

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \\
 T(0,t) = T(l,t) &= 0 & t > 0; \\
 T(x,0) &= T_0 \text{sen} \left( \frac{\pi x}{l} \right) & x \in (0,l); \\
 T_t(x,0) &= 0, & x \in (0,l).
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Nesta subseção, apesar de lidar ainda com a ECCC, o problema abordado possui características diferentes das que foram utilizadas no problema da subseção 2.4.1, em especial pelo fato de considerar um barra de comprimento finito, o que possibilita a definição das condições de contorno no início e no final desta barra. Assumindo-se que o comprimento da barra  $l$  é igual a  $1m$ , pode-se resolver o problema (2.14) através do uso do método de separação de variáveis. Obtém-se assim a seguinte solução analítica:

$$T(x, t) = T_0 \text{sen}(\pi x) e^{-\pi^2 \alpha t}. \quad (2.15)$$

Os cálculos para a obtenção da eq.(2.15), podem ser encontrados no apêndice B.

### 2.4.2.1 Interpretação Gráfica

Para a obtenção das figuras 2.4 e 2.5, foram utilizados os valores de difusividade térmica  $\alpha$  e temperatura  $T_0$  baseados nos trabalhos feitos por [CHOI et al., 2016; MICKENS; JORDAN, 2004].

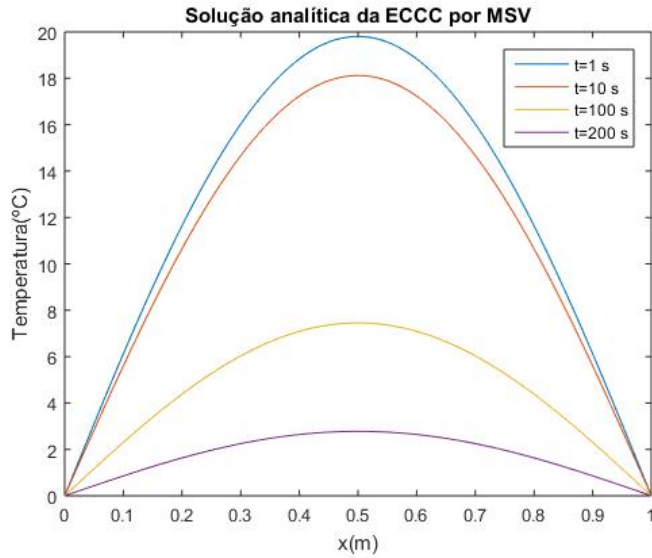


Figura 2.4: Perfil de temperatura considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$  e  $T_0 = 20^\circ C$ .

Na figura 2.4, a solução analítica da eq.(2.15), foi analisada considerando alguns valores de tempo fixos e a variação espacial da barra. O comportamento encontrado é condizente com o problema proposto, pois o problema é regido por uma EDP parabólica, onde, nota-se que quanto maior o valor do tempo mais atenuada fica a curva, indicando uma menor variação de temperatura.

Na figura 2.5, o perfil de temperatura foi analisado variando-se o tempo. Assim como na figura 2.4, nota-se que a medida que o tempo evolui, há uma queda no valor da temperatura, até o equilíbrio; comportamento similar para diferentes posições na barra.

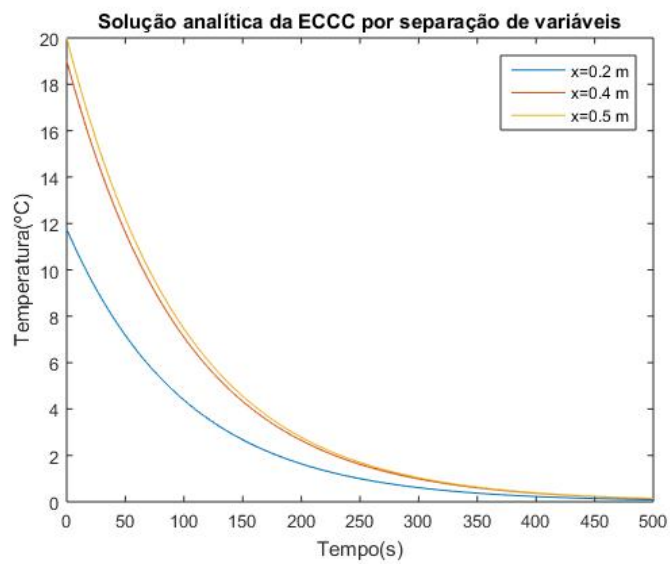


Figura 2.5: Perfil de temperatura considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$  e  $T_0 = 20^\circ C$ .

### 3 TEORIA NÃO FOURIER PARA CONDUÇÃO DE CALOR

Como foi dito anteriormente, a equação de condução de calor proposta por Fourier prediz de maneira adequada a distribuição de temperatura em diversos problemas. Porém, em alguns casos determinados, como situações de estados transientes em nanoescala, suas inconsistências tornam sua aplicação limitada [CHOI et al., 2016].

Devido a essas insuficiências da equação clássica, alguns modelos surgiram, buscando superar essas dificuldades. Dentre esses modelos tem-se:

- Modelo de Cattaneo-Vernotte (C-V);
- Modelo de Guyer-Krumhansl (G-K);
- Modelos de condução de calor que consideram tempos de retardo.

#### 3.1 Modelo de Cattaneo-Vernotte

Em um trabalho feito em 1867, o matemático e físico britânico James Clerk Maxwell registrou a inconsistência presente na lei de Fourier. Ele foi o primeiro a obter a equação, visando fornecer uma base matemática para a teoria cinética [LEBON et al., 1997].

Carlo Cattaneo, James Clerk Maxwell e Pierre Vernotte, desenvolveram em 1958 separadamente uma teoria não Fourier de condução de calor. Eles buscaram superar o problema de velocidade infinita de propagação do calor, derivando a equação que é conhecida como equação de Maxwell-Cattaneo ou Maxwell-Cattaneo-Vernotte (ECV), e assim relacionar fluxo de calor com a temperatura.

Visando melhorar a equação de Fourier, Cattaneo introduziu um termo de relaxação térmico. Segundo o estudo feito por [LEBON et al., 1997], esse fator de relaxação está relacionado ao tempo necessário para alcançar a estabilidade termodinâmica. A partir do momento que esse termo adicional foi introduzido, o problema com a infinitude da velocidade de propagação ficou sanado.

De acordo com a Choi et al. [CHOI et al., 2016], “a equação de Cattaneo-Vernotte (ECV) se baseia na velocidade finita de perturbação térmica, na superfície de contorno do sistema”. Então, considerando-se o gradiente de temperatura em um momento anterior, é possível se determinar o fluxo de calor em um momento posterior.

Para obter a ECV, Marín supôs em seu trabalho [MARÍN; MARÍN, 2011] que o fluxo de calor não surge instantaneamente e sim em um momento posterior  $t + \tau$ . Esse modelo também é conhecido como *Single Phase Lagging*, que pode ser traduzido como fase de retardo único. A lei de Fourier foi reescrita na forma:

$$q(x, t + \tau) = -k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}. \quad (3.1)$$

Onde  $\tau$  é o tempo de relaxação térmico. Esse termo funciona como um tempo de acumulação para começar o fluxo térmico, segundo [MARÍN; MARÍN, 2011]. É de se esperar que essa variável não assuma valores altos, pois caso contrário, a lei de Fourier não obteria tamanho sucesso ao ser aplicada. Em seu artigo, Lebon [LEBON et al., 1997], estima esse tempo como sendo algo da ordem de  $10^{-13}$  s. Referindo-se ainda a Marín [MARÍN; MARÍN, 2011], este segue seu estudo, expandindo a equação (3.1) em uma série de Taylor, descartando-se os termos de ordens superiores.

$$q(x, t + \tau) \simeq q(x, t) + \tau \frac{\partial q(x, t)}{\partial t}. \quad (3.2)$$

Substituindo-se a eq.(3.2) na eq.(3.1), tem-se:

$$q(x, t) + \tau \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} = -k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}. \quad (3.3)$$

A eq.(3.3) explicita que o fluxo de calor já não ocorre mais de maneira instantânea, como na lei de Fourier. O termo  $\tau \frac{\partial q(x, t)}{\partial t}$  leva a conclusão de que a propagação do calor ocorre de maneira gradual.

Aplicando-se o operador gradiente  $\nabla$  na eq. (3.3), obtém-se:

$$\nabla q(x, t) + \tau \nabla \left( \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} \right) = -k \nabla^2 T. \quad (3.4)$$

Como os operadores  $\nabla$  e  $\frac{\partial}{\partial t}$  comutam entre si, tem-se:

$$\nabla q(x, t) + \tau \frac{\partial}{\partial t} (\nabla q(x, t)) = -k \nabla^2 T. \quad (3.5)$$

Seja agora a equação da continuidade,

$$\nabla q(x, t) = -\rho c \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Aqui,  $\rho c \frac{\partial T}{\partial t}$  é a taxa de variação temporal da energia térmica,  $\rho$  é a densidade e  $c$  o calor específico. Derivando-se a eq.(3.6) em relação ao tempo, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla q) = -\rho c \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}. \quad (3.7)$$

Substituindo-se as equações (3.6) e (3.7) em (3.5), tem-se:

$$-\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \tau \rho c \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -k \nabla^2 T, \quad (3.8)$$

Dividindo-se por  $-\tau \rho c$ , chegar-se à ECV [CHOI et al., 2016].

$$\frac{1}{\tau} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\alpha}{\tau} \nabla^2 T. \quad (3.9)$$

Onde  $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ .

No estudo feito por Marín [MARÍN; MARÍN, 2011], nota-se que no lado direito da equação existe uma fonte de calor interna. Esse termo foi considerado nulo nos cálculos acima.

Assim, como é possível fazer uma analogia entre a equação de condução de calor e a equação de difusão, também é possível notar a grande semelhança entre a equação de Cattaneo-Vernotte e a equação do telégrafo [NAGY; ORTIZ; REULA, 1994; BARNA; KERSNER, 2010]. Para compreender um pouco mais a respeito da equação do telégrafo, pode-se consultar a ref. [ELZAKI et al., 2012], onde o autor encontra a solução exata da equação do telégrafo, por meio do uso do método de transformação de Sumudu. Na ref. [BIAZAR; ESLAMI, 2010], o autor usa o método de transformação diferencial (MTD) para encontrar a solução da equação.

### 3.1.1 Incoerências do Modelo de Cattaneo-Vernotte

A ECV possui duas incoerências principais. A primeira é que em alguns casos ela viola o princípio físico da objetividade.

A objetividade é o estudo do comportamento ou da dependência de determinada entidade física, em relação a diferentes observadores. Logo, o que é visto por um observador, tem de ser visto por qualquer outro, que esteja em condições de presenciar o mesmo fenômeno. Todavia, cada observador tem liberdade de escolher o referencial que mais lhe convém [DIAS, 2011].

A segunda incoerência, vem do fato que, dependendo da situação, os resultados obtidos com o uso do modelos de C-V, podem não estar em concordância com a segunda lei da termodinâmica, que pode ser expressa da seguinte maneira:

*Definição:* Considerando como um sistema a parte arbitrária  $P$  de um corpo  $B$ , que ocupa uma região  $P(t) \subset R$  em cada instante de tempo  $t$ . Seja  $H$  a variação de entropia devido ao mecanismo de dissipação interno e  $d$  a taxa de dissipação de energia por unidade de volume, então a 2ª lei da termodinâmica pode ser expressa como [DA SILVA, 2016]:

$$H(P(t)) > 0, \quad \forall t \Rightarrow d \geq 0 \quad \forall t. \quad (3.10)$$

A 2ª lei da termodinâmica estabelece uma distinção entre os processos possíveis ( $d \geq 0$ ) e os impossíveis ( $d < 0$ ).

Em seu trabalho Silva [DA SILVA, 2016], expõe algumas maneiras de sanar essas inconsistências presentes no modelo de Cattaneo-Vernotte.

Existem estudos que destacam alguns problemas [LEBON et al., 1997; AURIAULT, 2016], que não poderão ser resolvidos com a ECV. Em particular, aqueles que envolvem a propagação de ondas ultra-sônicas em gases diluídos, ou quando se quer descrever a propagação de um pulso de calor, em cristais não metálicos, com temperatura muito baixa.

Em seu trabalho [LEBON et al., 1997], Lebon et al. faz um estudo da propagação de ondas ultra-sônicas em gases diluídos, onde comparam os resultados obtidos com os modelos de Fourier e Cattaneo-Vernotte, com dados experimentais.

Ao analisar a velocidade da onda, os autores destacam que, como previsto, usando o modelo de Fourier os resultados assumem valores infinitos. Já o modelo de Cattaneo-Vernotte, fornece um valor finito, para a velocidade da onda. Contudo, os resultados diferem dos dados experimentais considerados.

Mostra-se assim que as incoerências presentes na ECV, tornam-a incapaz de fornecer uma completa interpretação do problema.

### 3.2 Modelo de Guyer-Krumhansl

A equação C-V compõe um dos modelos não Fourier mais utilizados. Mesmo sendo adequada para algumas situações, nem todos os problemas relacionados a transferência de calor por condução ficam bem estabelecidos. Assim sendo, pelos motivos já discutidos, diversas pesquisas vem sendo retomadas, visam encontrar uma nova extensão da lei de Fourier. Nesse sentido, surgiu o modelo de G-K, onde foi resolvida a equação de Boltzmann para um campo de fônons de cristais dielétricos em temperatura baixa [LEBON et al., 1997].

No estudo de Guyer e Krumhansl, a extensão da equação de C-V foi derivada com o uso de contribuições não locais. A equação desse modelo em uma dimensão espacial para a temperatura pode ser expressa como [ZHUKOVSKY, 2017]:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - \delta \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \right) F(x, t) = \left( \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa \right) F(x, t), \quad (3.11)$$

com  $\alpha, \varepsilon, \delta$  e  $\kappa$  são constantes.

No artigo [LEBON et al., 1997], foi indicado que até mesmo este modelo possui algumas limitações. Por isso, existem diversos outros modelos não-Fourier que não foram citados neste trabalho.



### 3.3 Modelo de Condução de Calor *Dual-phase-lagging*

O modelo de C-V sanou o problema com as inconsistências, presentes na equação clássica de condução de calor baseada na lei de Fourier. Porém em alguns casos ainda apresenta situações incomuns, resultados fisicamente impossíveis, como quando produz valores negativos para entropia, violando a segunda lei da termodinâmica [ASKARIZADEH; AHMADIKIA, 2014].

As pesquisas por modelos de condução de calor não Fourier não pararam com os avanços feitos por Cattaneo e Vernotte. Em sua pesquisa, Tzou [TZOU, 1995], apresentou uma abordagem diferenciada, um modelo no qual são adicionadas duas constantes: um tempo de relaxação do gradiente de temperatura e também um tempo de relaxação do fluxo de calor. Estas constantes evidenciam que a partir do momento em que um fluxo de calor é estabelecido, é necessário um certo tempo para que aconteça o gradiente de temperatura [NOROOZI; SAEDODIN; GANJI, 2016]. Esse modelo foi chamado de *Dual Phase Lagging* (DPL) que pode ser traduzido como tempo de retardo dual, nome sugestivo ao fato de receber dois tempos de relaxação. Porém, como possui uma alta complexidade, é muito difícil encontrar sua solução de maneira analítica. As soluções numéricas mais conhecidas para este modelo são obtidas através dos métodos de diferenças finitas e de elementos finitos [ASKARIZADEH; AHMADIKIA, 2014].

Para obter a equação que rege este modelo, foi feita uma variação na lei de Fourier, de maneira semelhante ao que foi feito na eq. (3.1) para o modelo de C-V. Com a diferença de que nesta é adicionado mais um termo de relaxação do gradiente de temperaturas.

$$q(x, t + \tau_q) = -k \frac{\partial T(x, t + \tau_T)}{\partial x}, \quad (3.12)$$

onde  $\tau_q$  representa o atraso de tempo necessário para estabelecer o fluxo de calor [MISHRA, ] e  $\tau_T$ , como já foi mencionado, é o tempo de relaxação térmico.

Usando uma expansão de Taylor, descartando-se os termos de ordem superiores, após alguns cálculos encontra-se a seguinte equação para o modelo DPL:

$$\tau_q \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} + q(x, t) + k \left[ \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + \tau_T \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t \partial x} \right] = 0 \quad (3.13)$$

Usando-se a equação de continuidade eq.(3.6), tem-se:

$$\frac{\tau_q}{\alpha} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \tau_T \frac{\partial^3 T(x, t)}{\partial t \partial x^2}. \quad (3.14)$$

### 3.4 Solução Analítica da Equação de Cattaneo-Vernotte

Nas subseções a seguir, a seguir serão apresentados diferentes metodologias para resolver dois problemas regidos pela equação de Cattaneo-Vernotte, com condições di-

ferentes. O objetivo desta abordagem é expor que, dependendo do problema que está sendo trabalhado, são necessários métodos distintos para resolvê-los. Assim, no próximo capítulo, com o conceito de cálculo deformado será possível mostrar que apesar do uso das DD, é possível encontrar resultados satisfatórios, usando um ferramental matemático semelhante ao usando nas equações com derivada usual.

### 3.4.1 Método da Solução Tentativa

Considerando-se a equação unidimensional de C-V, eq.(3.9), é possível encontrar a solução analítica do seguinte problema:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} &= \frac{\alpha}{\tau} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \\ T(0,0) &= T_h, \\ T(l,0) &= T_i.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Onde,  $T_h$  e  $T_i$  são as temperaturas impostas nos contornos.

A solução apresentada nesta subseção se baseia no cálculo feito por Choi et al. [CHOI et al., 2016].

$$T(x,t) = \frac{T_h}{2} e^{\frac{x}{l} \ln \frac{T_i}{T_h}} e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[ e^{\frac{t}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + 4\frac{\alpha}{\tau} \left\{ \frac{1}{l} \ln \frac{T_i}{T_h} \right\}^2}} + e^{\frac{t}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + 4\frac{\alpha}{\tau} \left\{ \frac{1}{l} \ln \frac{T_i}{T_h} \right\}^2}} \right].\tag{3.16}$$

Os cálculos para a obtenção da eq.(3.16), podem ser encontrados no apêndice C.

#### 3.4.1.1 Interpretação Gráfica

Em seu trabalho Choi et al. [CHOI et al., 2016], propõem o método de solução tentativa, como uma maneira mais simplificada de resolver um problema regido pela equação de Cattaneo-Vernotte. A aplicação proposta pelos autores é o estudo de uma carne processada ao ser colocada em uma grelha aquecida e após algum tempo retirada.

Esse problema foi a motivação inicial da pesquisa, e pequenas discrepâncias na origem do gráfico foram encontradas, com relação a condição de contorno fornecida no artigo. Então, com o objetivo de dar um significado físico real ao problema trabalhado, considera-se para fazer a análise gráfica, a variável espacial começando em  $0,5mm$ . No entanto, ressalta-se que essa parte para a solução tentativa no modelo de CV inteiro ou deformado é apenas um guia, para comparação do ferramental matemático e não é um dos resultados mais importantes dessa dissertação.

Ou seja, analisa-se o comportamento da temperatura a partir de um posição interna da carne, pois na superfície que entra em contato direto com a chapa, obtém-se como resultado, algo que não representa corretamente a parte física do problema.

Obtém-se gráficos com comportamentos semelhantes aos encontrados em [CHOI et al., 2016], ao ignorar a convecção natural que ocorre devido a diferença de temperatura entre o objeto estudado e a temperatura ambiente sobre as superfícies superior e laterais.

A figura 3.1, ilustra o comportamento da temperatura em relação a coordenada espacial. Aqui, coloca-se a carne na chapa e depois esta carne é retirada. Nota-se que ela esfria, com o decorrer do tempo após ser retirada da chapa. É possível interpretar como um selamento rápido da superfície e a retirada para análise do resfriamento. A curva azul representa a que saiu recentemente da chapa. As outras curvas representam a carne já mais fria, pois passou-se mais tempo desde a retirada da chapa.

A figura 3.2, mostra que quanto mais o tempo avança, a temperatura diminui. E quanto menor o valor de  $x$ , ou seja, quanto mais próximo da superfície de contato, mais aquecido está o objeto.

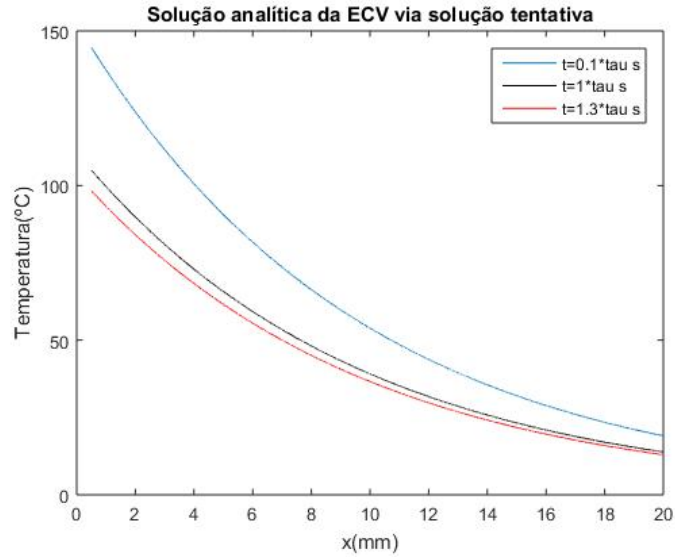


Figura 3.1: Perfil de temperatura para diferentes valores de tempo considerando  $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-7} m^2/s$ ,  $T_0 = 20^\circ C$ ,  $T_h = 160^\circ C$ ,  $l = 20mm$  e  $\tau = 15s$ .

### 3.4.1.2 Interpretação alternativa

Como é visto no apêndice C, com o passar do tempo, existe um termo na eq.(3.16), que pode ser ignorado. Tem-se assim, uma solução alternativa e com explicação física diferente da de cima. Neste caso, considera-se que a carne foi posta em contato com a chapa e permaneceu em contato, ela não é retirada da chapa. Com isso obtém-se a seguinte solução:

$$T(x, t) = T_h e^{\frac{x}{l} \ln \frac{T_i}{T_h}} e^{-\frac{t}{2\tau}} e^{\frac{t}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + 4\frac{\alpha}{l^2} \left\{ \frac{1}{l} \ln \frac{T_i}{T_h} \right\}^2}} \quad (3.17)$$

Essa interpretação foi feita com base no artigo de Choi et al. all [CHOI et al., 2016].

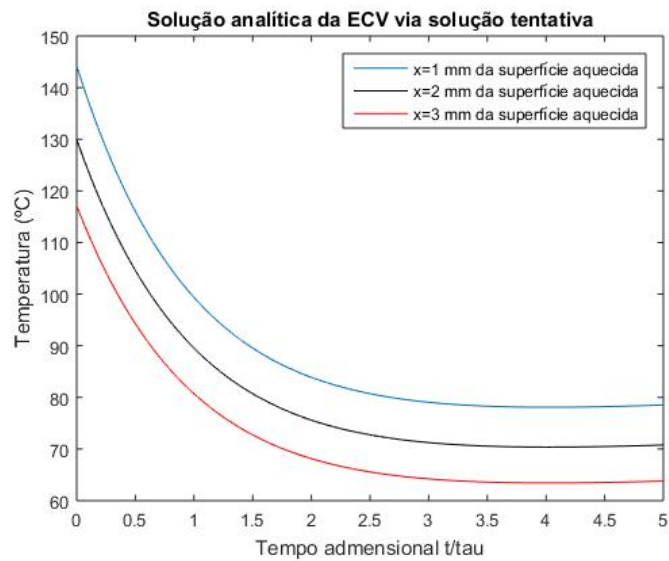


Figura 3.2: Perfil de temperatura em diferentes posições da superfície considerando  $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-7} m^2/s$ ,  $T_0 = 20^\circ C$ ,  $T_h = 160^\circ C$ ,  $l = 20mm$  e  $\tau = 15s$ .

E para a equação acima, encontra-se a seguintes figuras.

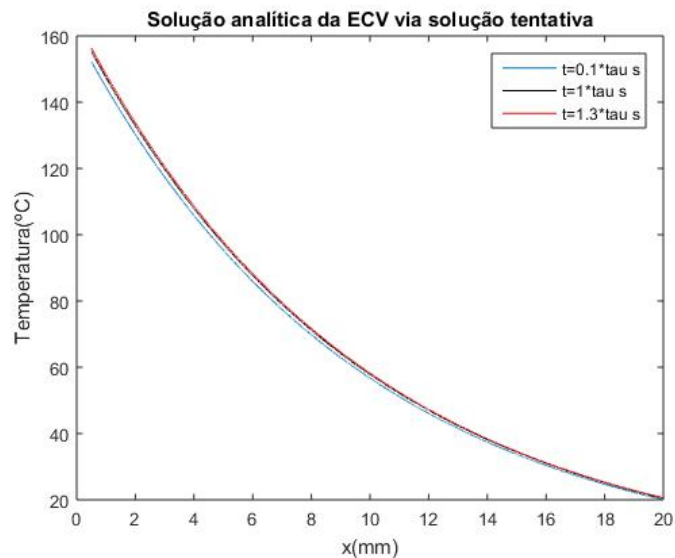


Figura 3.3: Perfil de temperatura, de acordo com a interpretação alternativa, para diferentes valores de tempo, considerando  $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-7} m^2/s$ ,  $T_0 = 20^\circ C$ ,  $T_h = 160^\circ C$ ,  $l = 20mm$  e  $\tau = 15s$ .

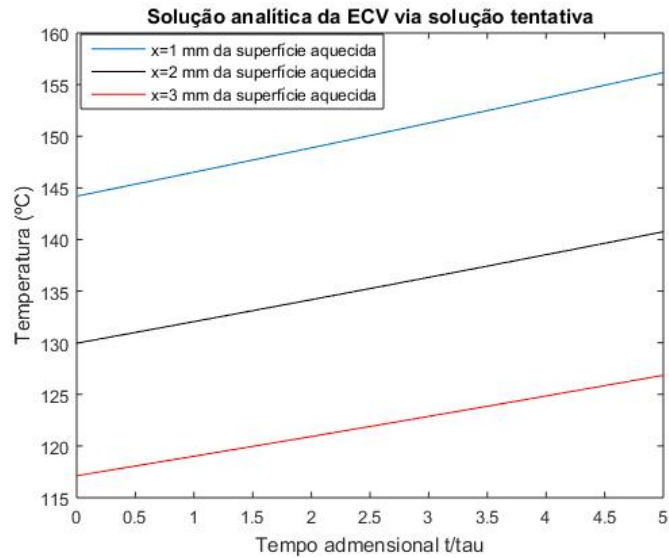


Figura 3.4: Perfil de temperatura de acordo com a interpretação alternativa, para diferentes posições da superfície, considerando  $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-7} m^2/s$ ,  $T_0 = 20^\circ C$ ,  $T_h = 160^\circ C$ ,  $l = 20mm$  e  $\tau = 15s$ .

Note que ao descarta-se o termo, tem-se diferenças entre a figura 3.3 e a figura 3.1. A temperatura na posição inicial considerada, em todos os tempos, parte de valores mais elevados e aproximados. As três curvas presentes no gráfico possuem comportamentos bem mais similares do que as da figura 3.1. E, assim como na subsubseção anterior todas as curvas convergem para temperatura de  $20^\circ$  na posição final.

Na figura 3.4 encontra-se diferenças bem significativas, em relação a figura 3.2, note que agora a temperatura, em cada posição considerada, aumenta. É possível interpretar tal comportamento, como se a carne permanecesse todo o tempo analisado em contato com a chapa aquecida.

Os autores do artigo [CHOI et al., 2016] chamam a atenção de que a ideia básica era a de verificar se uma solução mais simples da ECV seria possível, essa solução foi proposta com base em simples exponenciais. Aqui, considerando menos o aspecto formal e mais as possibilidades, assume-se o ansatz de soluções exponenciais. Foi feito o mesmo para testar o modelo com derivadas deformadas adiante, no capítulo 5.

Ressalta-se o aspecto "Toy Model" desse processo de solução e que, de fato, o artigo dos autores referidos possui diversos problemas e inconsistências.

Existem outros estudos que corroboram a possibilidade do uso de equações hiperbólicas de transferência de calor para carne processada, entre eles tem-se trabalhos feitos por Liu et. all [LIU; CHEN; WANG, 2017], Chen et. all [CHEN et al., 2017] e Mitra et. all [MITRA et al., 1995].

Estudos mais aprofundados fazem-se necessários para o caso de derivadas deformadas. Particularmente indica-se o trabalho feito por Chen et. all [CHEN et al., 2017].

### 3.4.2 Método de Separação de Variáveis

Considerando um problema em uma barra, limitada, isolada termicamente e homogênea, regido pela equação unidimensional de Cattaneo-Vernotte:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} &= \frac{\alpha}{\tau} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \\ T(0,t) = T(l,t) &= 0, & t > 0, \\ T(x,0) &= T_0 \text{sen} \left( \frac{\pi x}{l} \right), & x \in (0,l), \\ \frac{\partial T}{\partial t}(x,0) &= 0, & x \in (0,l).\end{aligned}\tag{3.18}$$

A solução encontrada está de acordo com o que Mickens e Jordan desenvolveram em seu artigo [MICKENS; JORDAN, 2004].

$$u(X, \theta) = \text{sen}(\pi X) e^{-\frac{\theta}{2\tau_0}} \Theta,\tag{3.19}$$

$$\Theta = \begin{cases} \cosh(\omega\theta) + \frac{\text{senh}(\omega\theta)}{\sqrt{1-4\tau_0\pi^2}}, & \text{para } \tau_0 < \tau_c \\ 1 + \frac{\theta}{2\tau_0}, & \text{para } \tau_0 = \tau_c \\ \cos(\omega\theta) + \frac{\text{sen}(\omega\theta)}{\sqrt{|1-4\tau_0\pi^2|}}, & \text{para } \tau_0 > \tau_c \end{cases}\tag{3.20}$$

Reescrevendo a solução acima em sua forma dimensional:

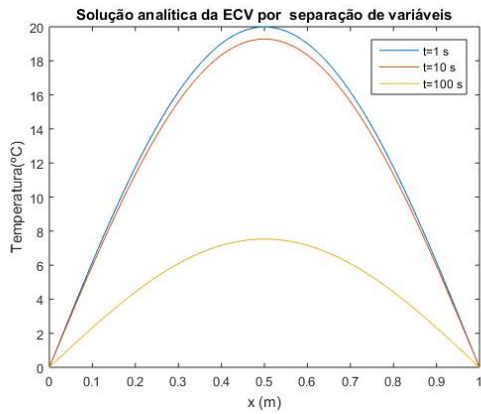
$$T(x, t) = T_0 \text{sen}(\pi x) e^{-\frac{t\alpha}{2\tau_0}} \Theta.\tag{3.21}$$

$$\Theta = \begin{cases} \cosh(\omega t\alpha) + \frac{\text{senh}(\omega t\alpha)}{\sqrt{1-4\tau_0\pi^2}}, & \text{para } \tau_0 < \tau_c \\ 1 + \frac{t\alpha}{2\tau_0}, & \text{para } \tau_0 = \tau_c \\ \cos(\omega t\alpha) + \frac{\text{sen}(\omega t\alpha)}{\sqrt{|1-4\tau_0\pi^2|}}, & \text{para } \tau_0 > \tau_c \end{cases}\tag{3.22}$$

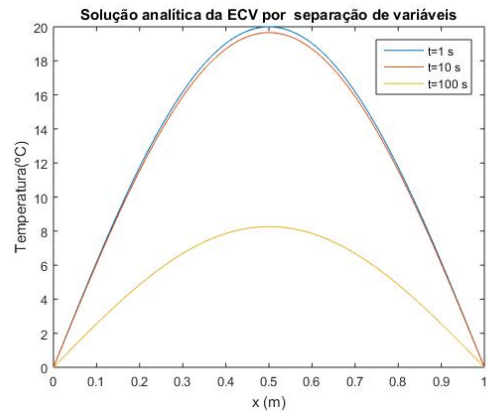
Onde  $\tau_0 = \tau \frac{\alpha}{l^2}$  e  $\tau_c = \frac{1}{4\pi^2}$ . Os cálculos para a obtenção da eq.(3.21), podem ser encontrados no apêndice D.

#### 3.4.2.1 Interpretação gráfica

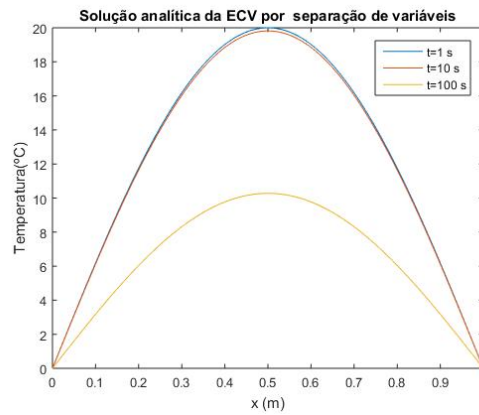
O problema abordado agora, possui condições bem diferentes do anterior. Elas possibilitam a escolha de um método mais tradicional e confiável. Essas condições conduziram à obtenção de gráficos bem diferentes dos obtidos em 3.4.1.1.



(a)  $\tau = 10s$  e  $\tau_0 < \tau_c$



(b)  $\tau = 25.33029\dots s$  e  $\tau_0 = \tau_c$ .

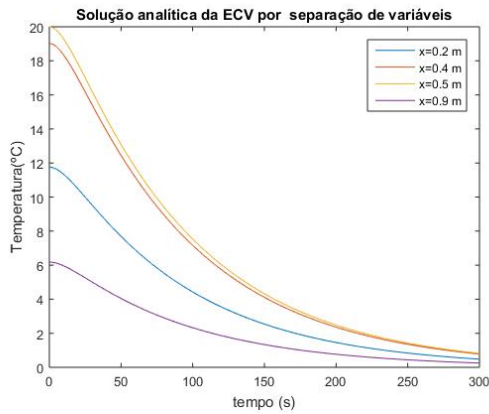


(c)  $\tau = 50s$  e  $\tau_0 > \tau_c$ .

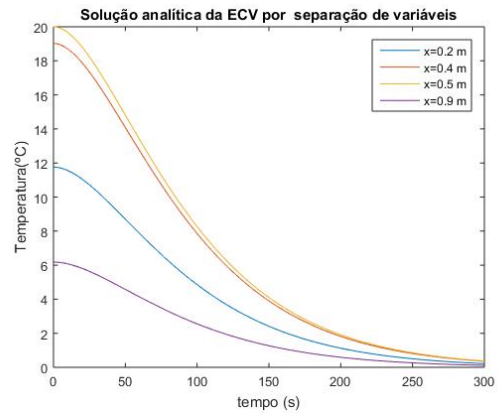
Figura 3.5: Perfil de temperatura para diferentes valores de tempo  $t$ , considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$  e  $T_0 = 20^\circ C$

As três primeiras figuras apresentadas, analisam a variação de temperatura em relação ao espaço, para três tempos,  $t = 1s$ ,  $t = 10s$  e  $t = 100s$ . Nota-se que como em nosso problema não existe uma fonte geradora de calor, a medida em que o tempo aumenta, menor é a temperatura.

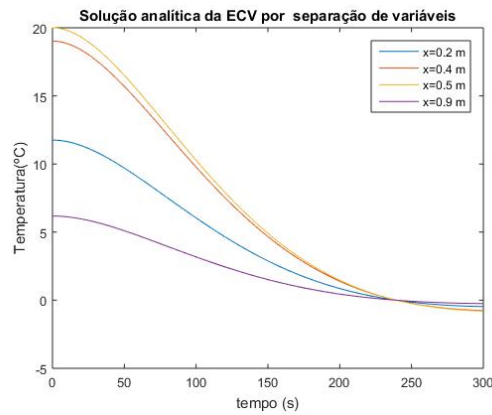
A interpretação em três figuras, se justifica devido a solução analítica encontrada, que se divide em três possíveis soluções que dependem do valor de  $\tau_0 = \tau \frac{\alpha}{l^2}$ . Observa-se que quando  $\tau_0 < \tau_c$  e  $\tau_0 > \tau_c$  a temperatura decai de maneira mais expressiva com o passar do tempo do que quando  $\tau_0 = \tau_c$ .



(a)  $\tau = 10s$  e  $\tau_0 < \tau_c$



(b)  $\tau = 25.33029\dots s$  e  $\tau_0 = \tau_c$ .



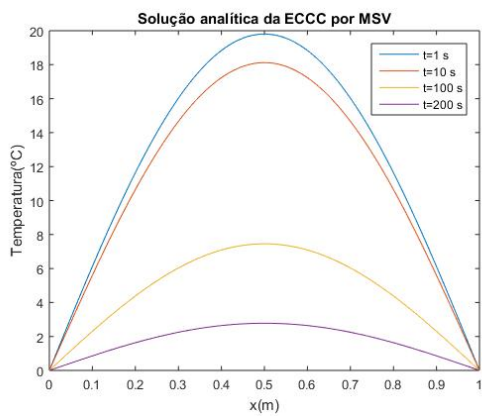
(c)  $\tau = 50s$  e  $\tau_0 > \tau_c$ .

Figura 3.6: Perfil de temperatura para diferentes posições  $x$ , considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$  e  $T_0 = 20^\circ C$ .

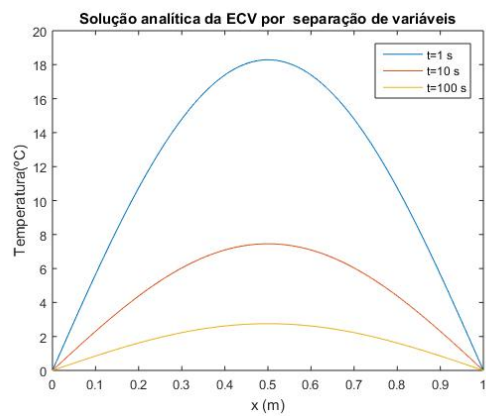
É possível ainda fazer um comparativo, da figura 2.4, que representa a solução para ECCC por separação de variáveis, e a solução da ECV por separação de variáveis considerando  $\tau \rightarrow 0s$ .

Note que os gráficos são iguais. Isto acontece porque, quando considera-se  $\tau$  tendendo a zero, na equação de Cattaneo-Vernotte, encontra-se na equação de Fourier.





(a)  $\alpha = 0,001m^2/s$  e  $T_0 = 20^\circ C$ .



(b)  $\alpha = 0,001m^2/s$   $T_0 = 20^\circ C$  e  $\tau = 0s$ .

Figura 3.7: Comparação entre as soluções analíticas da ECCC e da ECV, resolvidas pelo MSV

## 4 CÁLCULO DEFORMADO

### 4.1 Introdução

É possível encontrar na literatura recente diversas aplicações dos operadores fracionários de Riemann-Liouville e Caputo [HUAN-YING; HAI-TAO; XIAO-YUN, 2013; QI; XU; GUO, 2013]. O uso destes tem apresentado resultados que exibem grandes vantagens, como a boa descrição de memória e efeitos hereditários em fenômenos naturais.

Porém, esses operadores trazem também um alto nível de complexidade por causa de suas definições não locais. Devido a essas complicações, surgiu o grande interesse por uma nova definição, com operadores locais e com propriedades mais próximas das usuais, as derivadas deformadas.

Em muitos casos a condução de calor ocorre em meios com estruturas internas muito complexas, como por exemplo, materiais porosos, aleatórios e granulares, semicondutores, polímeros e etc [EROĞLU; AVCI; ÖZDEMİR, 2017]. A condução de calor nestes materiais pode ser modelado mais precisamente com o uso do cálculo fracionário ou das derivadas deformadas [EROĞLU; AVCI; ÖZDEMİR, 2017; YANG; BALEANU, 2013].

### 4.2 Cálculo Fracionário

O cálculo de ordem não inteira, também conhecido como fracional ou fracionário (CF) lida com derivadas e integrais de ordem não inteira. De acordo com ref. [WEBERSZPIL; LAZO; HELAYËL-NETO, 2015], ele surgiu através de uma carta do matemático francês L'Hospital endereçada para o matemático alemão Leibniz, onde L'Hospital questionou qual seria o significado de uma derivada de ordem  $\frac{1}{2}$ .

O CF é usado na descrição da dinâmica de sistemas com características hereditárias ou com memória, ou com processos não locais. Em geral, com sistemas dinâmicos complexos e que refletem uma média de uma grande população de microelementos [WEBERSZPIL; LAZO; HELAYËL-NETO, 2015; WEBERSZPIL, 2013; DE OLIVEIRA, 2013]. Ele tem aplicações em diversos ramos da ciência.

Pesquisadores como Euler, Lagrange, Laplace, Liouville, Riemann, Caputo, Grünwald, dentre outros, participaram desses estudos. As definições de derivadas fracionárias mais populares, segundo a ref. [KHALIL et al., 2014], são:

**Definição de Riemann-Liouville:** Para  $\alpha \in [n - 1, n)$  e  $n \in \mathbb{Z}$ , a derivada  $\alpha$  de

---

\* Cálculo Deformado

$f$  é:

$$D_a^\alpha(f) = \frac{1}{\tau(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dx. \quad (4.1)$$

**Definição de Caputo:** Para  $\alpha \in [n-1, n)$ , a derivada  $\alpha$  de  $f$  é:

$$D_a^\alpha(f) = \frac{1}{\tau(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dx. \quad (4.2)$$

Essas duas definições não satisfazem algumas propriedades fundamentais do cálculo usual de ordem inteira, como por exemplo, a regra do produto, a regra do quociente, a regra da cadeia, dentre outras [KHALIL et al., 2014].

### 4.3 Introdução ao mapeamento no contínuo fractal

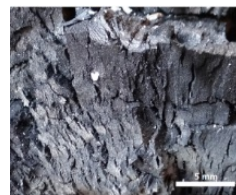
Conceitualmente, a ideia de contínuo introduz uma aproximação do meio real através de uma região do espaço euclidiano preenchida por uma matéria com propriedades contínuas. Foi utilizado o mapeamento quando as propriedades do material variam suavemente nas escalas de comprimento e tempo.

Na natureza existem diversos materiais ou meios heterogêneos que possuem em seu domínio, características ou até mesmo com matérias diferentes. Porém quando as microestruturas deste materiais tem certas simetrias, é possível modelar eficientemente as suas propriedades através de alguns métodos tradicionais de homogeneização [BALANKIN, 2018].

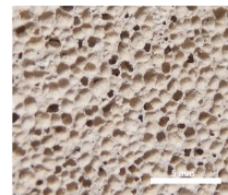
Entretanto, esses materiais porosos e/ou fissurados, tais como concreto, carvão vegetal, pedra pomes, alimentos, etc, possuem uma geometria bem complicada e desigual, caracterizada por uma invariância de escala em amplos intervalos de escala de comprimento [BALANKIN; ELIZARRAZ, 2012b].



(a) Superfície de um concreto poroso



(b) Superfície de um monólito de carvão vegetal



(c) Superfície de um monólito de pedra pomes

Figura 4.1: Alguns materiais que apresentam características irregulares [SANTOS et al., 2016].

Buscando modelar esses materiais mais complexos, os conceitos de geometria fractal surgiram. No entanto, as funções definidas nos fractais são essencialmente não diferenciáveis no sentido convencional. Por isso a intensa pesquisa por meios de lidar com

problemas fractais no meio contínuo através do mapeamento físico, levando em consideração algumas características do material, tais como, a distribuição de massa fractal e as características fractais do meio modelado.

Os estudos feitos por Balankin [BALANKIN, 2018; BALANKIN; ELIZARRARAZ, 2012b; BALANKIN; ELIZARRARAZ, 2012a] expõe algumas maneiras de modelar problemas físicos em fractais, através de um mapeamento, onde pode-se considerar algumas características do material, tais como suas ramificações, a conectividade e a maneira com a sua massa se distribui no espaço euclidiano do fractal.

#### 4.4 Derivadas Deformadas

Em paralelo com o cálculo fracional, existe o conceito de derivadas fracionárias locais, que é uma extensão natural da derivada usual. Uma das diferenças em relação ao cálculo fracional é que ela satisfaz a todas as propriedades citadas anteriormente e que o CF não satisfazia.

O aprofundamento dos estudos sobre esses modelos de derivadas vem indicando possibilidades de aplicações em diferentes áreas. Como exemplo, pode-se citar a fisiologia, a biomedicina, a física, a gravitação, as engenharias, a biologia, dentre outras.

É possível encontrar a definição da derivada usual em qualquer livro de cálculo, ela pode ser dada por [KHALIL et al., 2014]:

**Definição 1:** *Seja  $f : [0, \infty)$  e  $t > 0$ . Então a derivada de  $f$  é:*

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon) - f(t)}{\epsilon}. \quad (4.3)$$

De acordo com a definição acima, tem-se  $\frac{d^n}{dt^n} = nt^{n-1}$ . Sendo  $n$  um número inteiro.

##### 4.4.1 Derivada de Hausdorff

A derivada de Hausdorff é um operador local, que busca superar os altos custos de computação da derivada fracionária não local. Ela tem significado físico claro e está diretamente relacionada à dimensão fractal, como mostram as refs. [CHEN, 2006; BALANKIN; ELIZARRARAZ, 2012b; BALANKIN; ELIZARRARAZ, 2012a].

Este operador possui uma vasta aplicabilidade em problemas complexo, como os de áreas científicas e de engenharia, difusão anômola, condução de calor e até mesmo economia [CHEN et al., 2017].

A derivada de Hausdorff de uma função  $g(t)$  com respeito a uma medida fractal  $t^\alpha$  é definida por Chen [CHEN, 2006]:

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t^\alpha} = \lim_{t' \leftrightarrow t} \frac{g(t) - g(t')}{t^\alpha - t'^\alpha} = \frac{\partial g(\hat{t})}{\partial \hat{t}}. \quad (4.4)$$

A derivada de Hausdorff difere da derivada fracionária padrão por não envolver a convolução e também por ser uma derivada de natureza local.

#### 4.4.2 Derivada Estrutural

A derivada estrutural espacial pode ser definida, de acordo com a derivada estrutural temporal [XU et al., 2017].

$$\frac{dp}{d_s x} = \lim_{x_1 \leftrightarrow x} \frac{p(x_1, t) - p(x, t)}{f(x_1) - f(x)}, \quad (4.5)$$

onde  $s$  denota a derivada estrutural, e  $f(x)$  é a função estrutural. A derivada estrutural da eq.(4.5), é local e pode ser considerada como um transformação de escala  $\hat{x} = f(x)$ . Quando  $f(x) = x$ , a eq.(4.5) se reduz a derivada clássica espacial. Quando  $f(x) = x^\alpha$ , tem-se a derivada fractal local.

#### 4.4.3 Derivada Deformada Conforme

Em 2014, Khalil et al.[KHALIL et al., 2014], propuseram um tipo de DD cuja a maioria das propriedades são mais simples que as do CF e compatíveis com as de derivadas usuais de ordem inteira. Apesar de alguns autores a chamarem de derivada fracionária local, de ordem  $\beta$ , ela ficou mais conhecida como derivada deformada conforme (DDC) e pode ser usada para resolver equações diferenciais deformadas.

**Definição 2:** *Seja a função  $f : [0, \infty)$ ,  $t > 0$  e  $\beta \in (0, 1]$ . Então, a derivada deformada conforme de  $f$ , de ordem  $\beta$  é definida por:*

$$T_\beta(f)(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\beta}) - f(t)}{\epsilon}. \quad (4.6)$$

Se a DDC de  $f$  de ordem  $\beta$  existe ( $\beta$ -diferenciável) em algum  $(0, a)$ ,  $a > 0$  e  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\beta)}(t)$  existe, então defini-se:

$$f^{(\beta)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\beta)}(t) \quad (4.7)$$

A notação  $f^{(\beta)}$  pode ser escrita também como  $T_\beta$ .

Na ref.[KHALIL et al., 2014] é possível encontrar algumas propriedades matemáticas que a derivada deformada conforme satisfaz, tais como o teorema:

**Teorema 1:** *Se a função  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é  $\beta$ -diferenciável em  $t_0$ ,  $\beta \in (0, 1]$ , então  $f$  é*

contínua em  $t_0$ .

Também seguem-se as seguintes propriedades para  $T_\beta$ .

**Propriedade 1:** *Seja  $\beta \in (0, 1]$  e  $f$  e  $g$  funções  $\beta$ -diferenciável no ponto  $t > 0$ . Então:*

1.  $T_\beta(af + bg) = aT_\beta(f) + bT_\beta(g)$ , para todo  $a, b \in \mathbb{R}$ .
2.  $T_\beta(t^p) = pt^{p-\beta}$ , para todo  $p \in \mathbb{R}$ .
3.  $T_\beta(\lambda) = 0$ , para todas as funções constantes  $f(t) = \lambda$ .
4.  $T_\beta(fg) = fT_\beta(g) + gT_\beta(f)$ .
5.  $T_\beta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\beta(f) - fT_\beta(g)}{g^2}$ .
6. Se  $f$  é diferenciável, então  $T_\beta(f) = t^{1-\beta}\frac{df}{dt}(t)$ .

As demonstrações dos resultados expostos acima podem ser encontradas na referência [KHALIL et al., 2014].

Ao apresentar algumas definições, o autor mostra que a derivada proposta por Khalil é um caso especial de derivada deformada conformável geral (DDCG).

#### 4.4.4 Derivada de Gâteaux

Para obter uma definição mais geral para as derivadas deformadas, Zhao e Luo [ZHAO; LUO, 2017] utilizam o conceito de derivada de Gâteaux.

**Definição 1:** *Suponha que  $X$  e  $Y$  são vetores espaciais topológicos localmente convexos,  $U \subset X$  é aberto, e  $f : X \rightarrow Y$ . A derivada de Gâteaux  $df(u; \psi)$  de  $f$  em  $u \in U$  na direção  $\psi \in X$  é definida como*

$$df(u; \psi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(u + \epsilon\psi) - f(u)}{\epsilon}, \quad (4.8)$$

se o limite existir.

**Definição 2:** *Suponha que  $X$  e  $Y$  são vetores espaciais topológicos localmente convexos,  $U \subset X$  é aberto, e  $f : X \rightarrow Y$  e  $\psi(u, \epsilon, p) : X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow X$  onde  $p \in \mathbb{R}$  é um parâmetro. A derivada de Gâteaux estendida (DGE)  $df(u; \psi)$  de  $f$  em  $u \in U$  na direção  $\psi \in X$  é definida como*

$$df^{EG}(u; \psi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(u + \psi(u, \epsilon, p)) - f(u)}{\epsilon}, \quad (4.9)$$

se o limite existir.

#### 4.4.5 Derivada Deformada Conforme Geral

Seja  $\psi(u, p)$  uma função fracionária conforme e  $p \in (0, 1]$ . A derivada deformada conforme geral é definida como [ZHAO; LUO, 2017]:

$$D_{\psi}^p f(u) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(u + \epsilon\psi(u, p)) - f(u)}{\epsilon}. \quad (4.10)$$

A definição é local e a operação em qualquer função constante fornece o valor zero.

- **OBS1:** Quando  $\psi(u, p) = 1$ ,  $D_{\psi}^p f(u)$  recai na derivada usual de primeira ordem e não tem relação com a ordem  $p$ ;
- **OBS2:** Quando  $h(p) = 1$ , de tal modo que  $\psi(u, p) = u^{1-p}$ ,  $D_{\psi}^p f(u)$  coincide com a definição de Khalil [KHALIL et al., 2014]. Em outras palavras, a DDC é um caso especial da DDCG;
- **OBS3:** O artigo [ZHAO; LUO, 2017] ainda conclui que a derivada deformada local, proposta por Katugampola [KATUGAMPOLA, 2014], é um caso especial da derivada de Gâteaux estendida. E também que as definições de Katugampola e Khalil são relacionadas.

##### 4.4.5.1 $q$ -Derivadas

As  $q$ -derivadas surgem em um contexto da mecânica estatística de Tsallis [TSALLIS, 2009; WEBERSZPIL; LAZO; HELAYËL-NETO, 2015]. A origem dessa abordagem está na reformulação da entropia de Boltmann-Gibbs e na consequente deformação da álgebra e da derivada, assim como para as funções exponencial e logarítmica, a saber  $q$ -exponencial e  $q$ -logaritmo.

A nova álgebra deformada, que resulta dessa abordagem, se aplica de maneira adequada a problemas relacionados a sistemas complexos, principalmente aqueles com métricas fractais e multifractais, dinâmicas anômalas de transporte e fenômenos naturais [WEBERSZPIL; LAZO; HELAYËL-NETO, 2015; WEBERSZPIL; HELAYËL-NETO, 2016].

Na  $q$ -derivada, o parâmetro  $q$  recebe o nome de índice entrópico ou parâmetro de deformação, que é responsável por caracterizar o desvio da dinâmica anômala, comparativamente a dinâmica de sistemas mais simples. Uma proposta para o operador  $q$ -derivada foi feita por Borges [BORGES, 2004], segue dada por:

$$D_q f(x) \equiv \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x \ominus_q y} = [1 + (1 - q)x] \frac{df(x)}{dx}, \quad (4.11)$$

onde,

$$x \ominus_q y \equiv \frac{x - y}{1 + (1 - q)y} \text{ com } y \neq \frac{1}{q - 1}. \quad (4.12)$$

Borges também definiu a  $q$ -integral, que mantém uma estrutura semelhante à da integral imprópria de Riemann [[WEBERSZPIL; HELAYËL-NETO, 2016](#)].

$$\int_a^t f(x)d_q x = \int_a^t \frac{f(x)}{1 + (1 - q)x} dx = \int_a^t f(x)d_q x. \quad (4.13)$$

Onde  $d_q x = \lim_{y \rightarrow x} x \ominus_q y = \frac{1}{1 + (1 - q)x} dx$ .

Na  $q$ -derivada, a regra do produto é semelhante as demais derivadas deformadas locais, respeitando a regra do produto, ou de Leibniz:

$$D_q(fg) = gD_q f + fD_q g. \quad (4.14)$$

Com essa nova álgebra, também é possível fazer a operação sobre a composição de funções por meio da regra da cadeia.

$$D_q[f \circ g](x) = \frac{df(g(x))}{dg} D_q g(x). \quad (4.15)$$

A equação de condução de calor deformada pode ser tratada usando a  $q$ -derivada, de maneira semelhante ao que esta sendo feito com a derivada conforme.



## 5 APLICAÇÕES DO CÁLCULO DEFORMADO

### 5.1 Introdução

Neste capítulo, os problemas resolvidos no capítulo 2 e no capítulo 3 foram deformados, ou seja, foi introduzido um parâmetro de deformação  $\beta$  na derivada temporal, obtendo assim novos problemas que terão soluções analíticas diferentes das já obtidas.

Foi utilizados os mesmos métodos abordados anteriormente, visando mostrar que apesar das equações diferenciais parciais terem derivadas de ordem parametrizada, esses métodos ainda são adequados para resolvê-las.

### 5.2 Soluções analíticas da equação de condução de calor deformada

Nesta etapa serão apresentados dois métodos de solução da equação de condução de calor deformada, esses mesmos métodos foram utilizados para resolver a equação clássica nos apêndices A e B.

#### 5.2.1 Método da Transformada de Fourier

Considerando um problema de condução de calor em uma barra, isolada termicamente, homogênea e infinita. Similar ao apresentado na eq.(2.12), porém substituindo a derivada temporal de primeira ordem por uma derivada conforme de ordem  $\beta$ , onde  $0 < \beta < 1$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\beta T(x,t)}{\partial t^\beta} &= \bar{\alpha} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, \\ T(x,0) &= f(x), & -\infty < x < \infty.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Considerando  $\bar{\alpha} = h\alpha$ , onde  $h$  é uma constante de dimensionalização.. Assumindo que o processo de condução de calor ocorre em um meio infinito e aplicando a transformada de Fourier de maneira análoga a feita no apêndice A, obtém-se que:

$$\frac{d^\beta \hat{T}(\omega, t)}{dt^\beta} = -4\pi^2 \omega^2 \bar{\alpha} \hat{T}(\omega, t),\tag{5.2}$$

$$\hat{T}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega).\tag{5.3}$$

Fazendo uso da propriedade 6 de derivada deformada conforme, calcula-se a derivada deformada presente na eq.(5.2).

$$t^{1-\beta} \frac{d\hat{T}(\omega, t)}{dt} = -4\pi^2 \omega^2 \bar{\alpha} \hat{T}(\omega, t). \quad (5.4)$$

É possível reorganizar a eq.(5.4) da seguinte maneira:

$$\frac{d\hat{T}(\omega, t)}{\hat{T}(\omega, t)} = -4\pi^2 \omega^2 \bar{\alpha} t^{\beta-1} dt. \quad (5.5)$$

Integrando a eq.(5.5), tem-se:

$$\ln \hat{T}(\omega, t) = -4\pi^2 \omega^2 \bar{\alpha} \int t^{\beta-1} dt, \quad (5.6)$$

$$\ln \hat{T}(\omega, t) = -4\pi^2 \omega^2 \bar{\alpha} \frac{t^\beta}{\beta} + c, \quad (5.7)$$

$$\hat{T}(\omega, t) = C e^{-4\pi^2 \omega^2 \bar{\alpha} \frac{t^\beta}{\beta}}. \quad (5.8)$$

obtém-se então que a constante de integração pode ser obtida como

$$\hat{T}(\omega, 0) = C e^{-4\pi^2 \omega^2 \bar{\alpha} \frac{0^\beta}{\beta}} = \hat{f}(\omega), \quad (5.9)$$

$$C = \hat{f}(\omega). \quad (5.10)$$

Substituindo a eq.(5.10) na eq.(5.8),

$$\hat{T}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) e^{-4\pi^2 \omega^2 \bar{\alpha} \frac{t^\beta}{\beta}}, \quad (5.11)$$

Usando-se o teorema da convolução e a transformada inversa de Fourier de uma função Gaussiana, obtém-se  $T(x, t)$ , como

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) \sqrt{\frac{\beta\pi}{\alpha t^\beta}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2 \beta}{4\bar{\alpha} t^\beta}}. \quad (5.12)$$

Se a condição inicial for associada a função delta de Dirac, centrada na origem, representa um pulso de calor, que dá início à propagação da energia térmica, tem-se então:

$$T(x, t) = \frac{\beta}{\sqrt{4\pi\alpha t^\beta}} e^{-\frac{x^2 \beta}{4\bar{\alpha} t^\beta}}. \quad (5.13)$$

Esta é a solução analítica da equação de Fourier deformada via derivada conforme. Nota-se que na eq.(5.13) o tempo está elevado a uma potência não inteira. Assim, a solução possui um comportamento diferente no tempo, quando comparada com a solução clássica, dada pela eq.(2.13).

### 5.2.1.1 Interpretação Gráfica

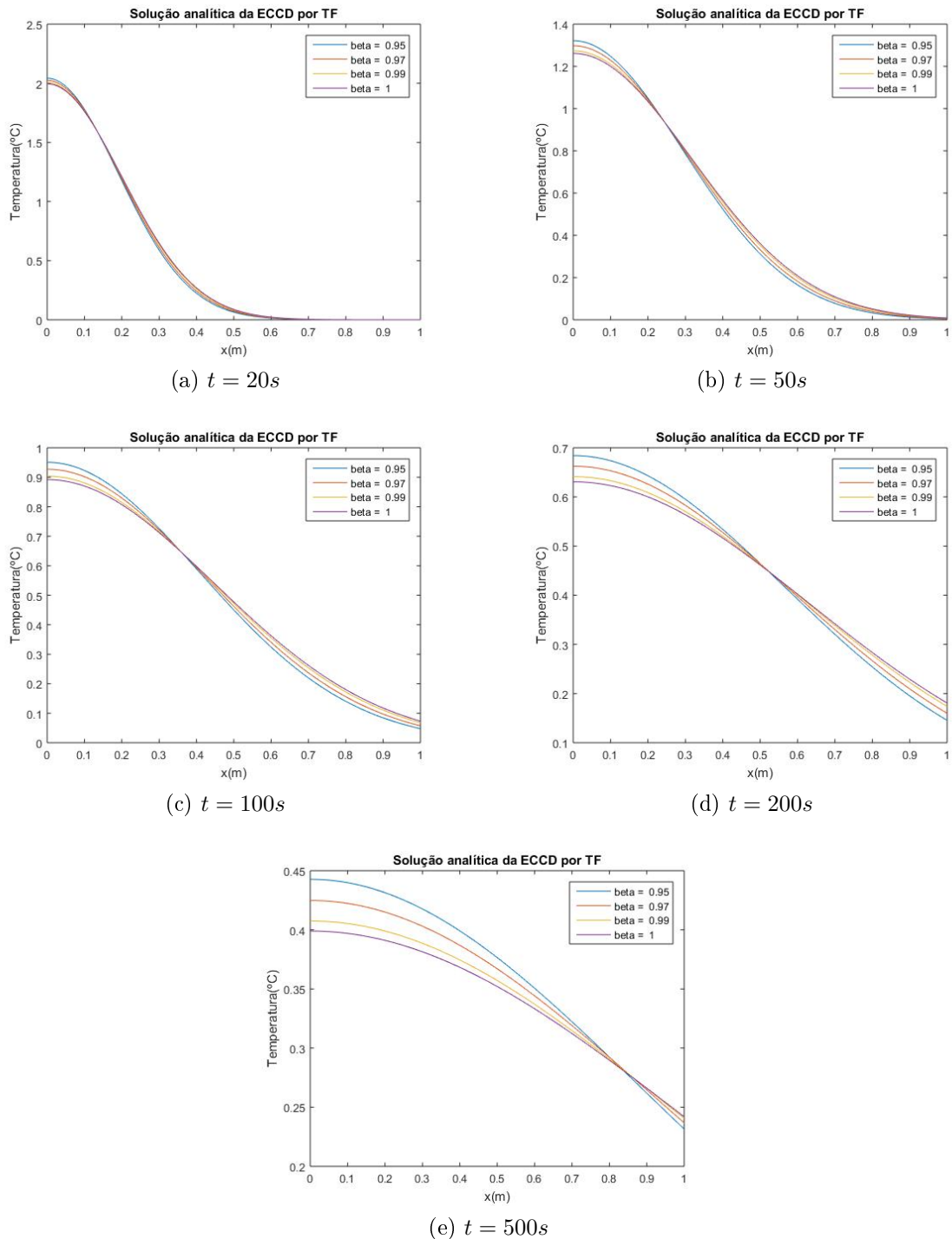


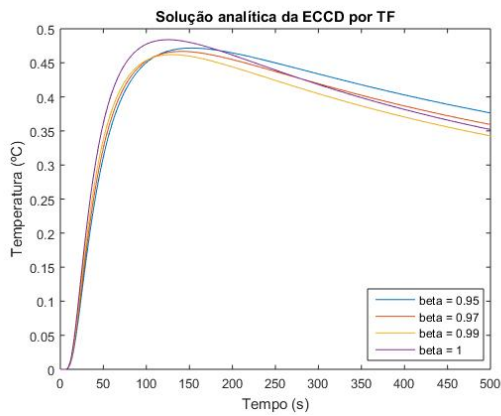
Figura 5.1: Perfil de temperatura considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$ .

Na figura 5.1, é analisado o comportamento do perfil de temperatura deformado, para diferentes valores de  $\beta$ , de acordo com a variável espacial  $x$ . Pode-se notar que a mudança do parâmetro de deformação produz, em todos os gráficos, pequenas alterações nas curvas.

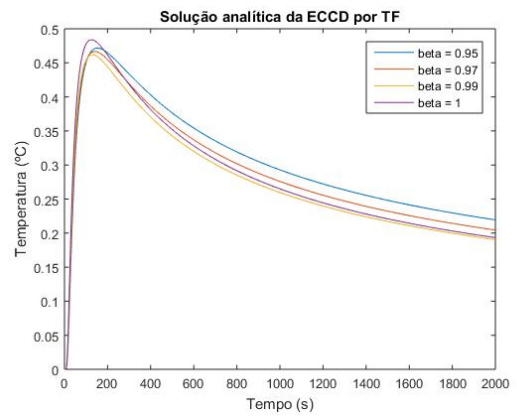
Observa-se que quanto menor o valor de  $\beta$ , maior é o valor da temperatura no extremo inicial. Porém quando é analisado o extremo final, a temperatura tende a assumir valores menores quando é analisado para tempos longos (5.1c, 5.1d, 5.1e), ou atingi o zero mais rapidamente no caso dos tempo mais (5.1a, 5.1b).

Esta característica pode ser uma consequência, do fato de que ao serem considerados valores menores para  $\beta$ , tem-se um material com uma estrutura mais complexa dificultando assim a condução de calor.

Vale destacar também, que quanto maior o tempo considerado mais evidente fica a influência dos valores de  $\beta$  no processo de condução representado.



(a)



(b)

Figura 5.2: Perfil de temperatura considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$  e  $x = 0,5m$ .

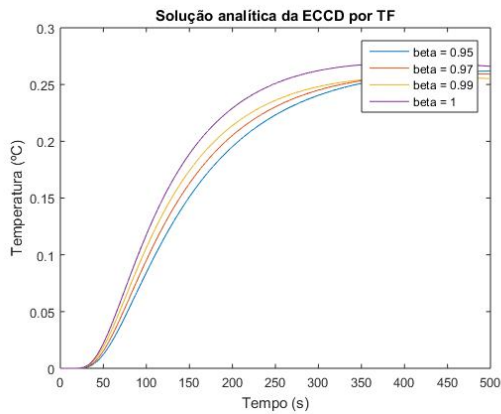
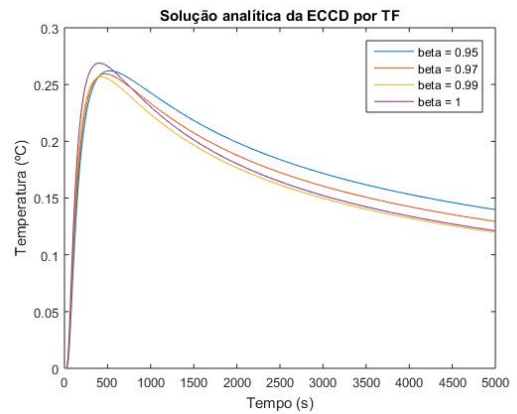
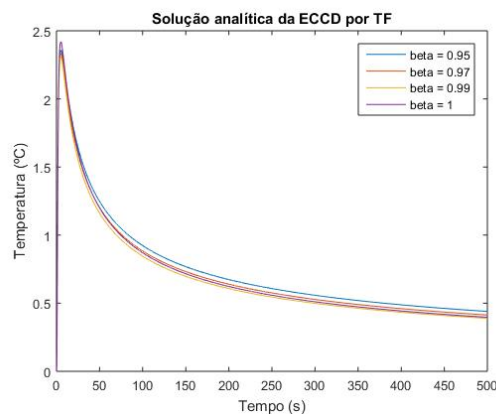
(a)  $x = 0,9m$ (b)  $x = 0,5m$ (c)  $x = 0,1m$ 

Figura 5.3: Perfil de temperatura considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$  e posições próximas ao extremo final e ao extremo inicial.

Em todos os gráficos representados a solução analítica do problema com derivada de ordem inteira é a roxa, pois nela é considerado  $\beta = 1$ , que ao substituir na eq.(5.13), recaí-se na eq.(2.13) encontrada no capítulo 2.

As figuras 5.2 e 5.3, analisam o comportamento da temperatura com o passar do tempo. Para plotar os gráficos foi preciso escolher posições específicas na barra.

Na figura 5.2, foi escolhido analisar o meio da superfície para diferentes valores de tempo. Posteriormente, na figura 5.3, foi analisando o comportamento do perfil de temperatura, em posições próximas aos extremos da superfície.

As curvas sofrem algumas alterações, em relação a roxa, ocasionadas pelos diferentes valores de  $\beta$ . Destaca-se que as curvas que representam as soluções deformadas, não conseguem atingir o mesmo pico de temperatura, que foi atingido para solução inteira, em momento algum. Por isso parecem isolar mais, ou seja, conduzem menos eficientemente. O material representado pela curva com  $\beta$  maior parece ser melhor condutor térmico.

O resultado encontrado, pode ser relevante quando aplicado em uma estrutura com característica fractal. Pois ao considerar o parâmetro de deformação na derivada, é possível encontrar uma solução que nos mostra a existência de uma certa dificuldade no caminho para o fluxo de calor, tornando a estrutura mais isolante ao calor.

Observe que em ambos os casos quanto mais próximos de  $\beta = 1$ , mais próximos chega-se da solução analítica clássica. Pode-se observar tal comportamento na figura abaixo.

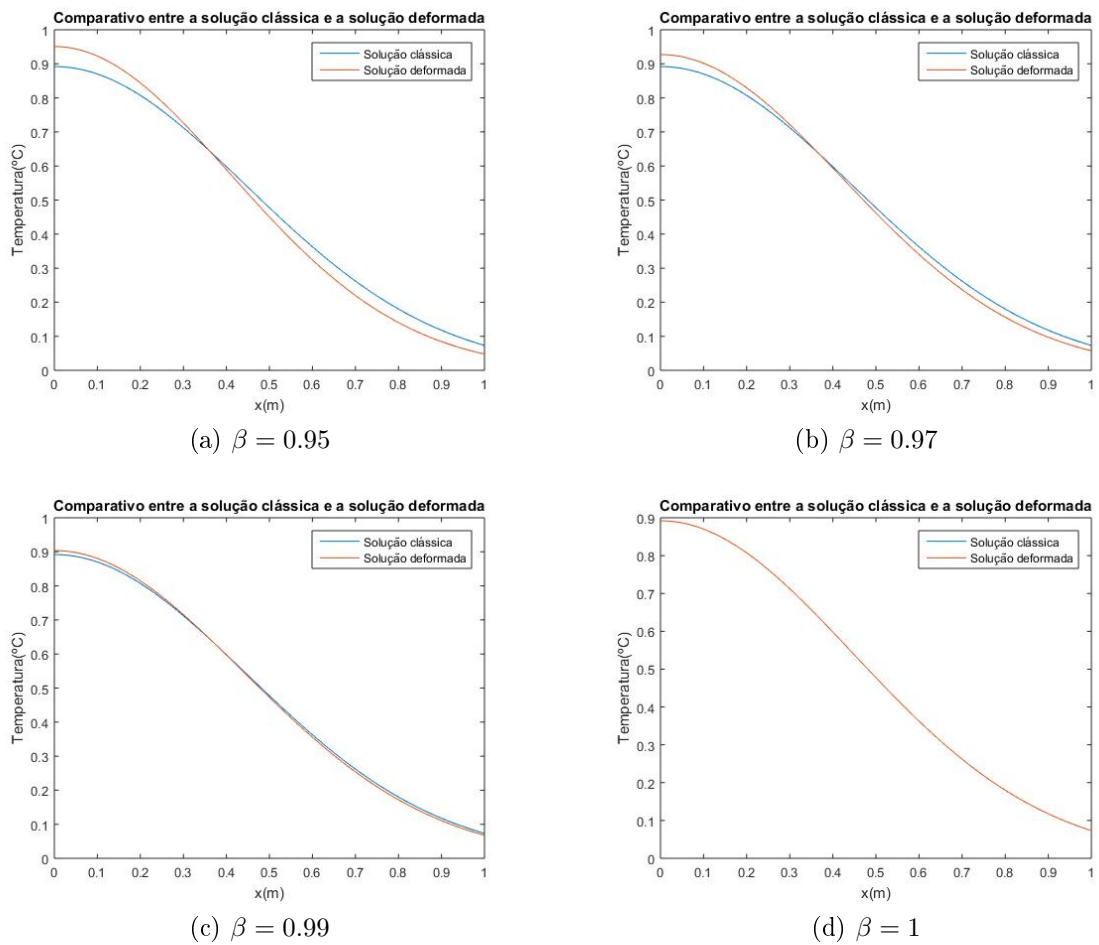


Figura 5.4: Gráficos comparativos considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$  e  $t = 100s$

### 5.2.2 Método de Separação de Variáveis

Considerando o seguinte problema de condução de calor em uma barra, limitada, isolada termicamente e homogênea.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^\beta T(x,t)}{\partial t^\beta} &= \bar{\alpha} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \\
 T(0,t) = T(l,t) &= 0 & t > 0; \\
 T(x,0) &= T_0 \text{sen} \left( \frac{\pi x}{l} \right) & x \in (0,l); \\
 T_t^\beta(x,0) &= 0, & x \in (0,l).
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Onde,  $T_0$  é a temperatura inicial do problema e  $\bar{\alpha} = \alpha h$ .

Assim como no capítulo 2, este problema acima é regido, pela mesma EDP que o anterior 5.1, porém apresenta outras condições. Ao analisar as condições de contorno fornecidas, percebe-se que o MSV é adequado para resolver o problema.

Explicitando a derivada deformada conforme via propriedade 6 e considerando  $l = 1m$ , tem-se.

$$\begin{aligned}
 t^{1-\beta} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} &= \bar{\alpha} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, \\
 T(0,t) = T(1,t) &= 0 & t > 0, \\
 T(x,0) &= T_0 \text{sen} \pi x & x \in (0,1), \\
 t^{1-\beta} \frac{\partial T(x,0)}{\partial t} &= 0, & x \in (0,1).
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Pelo método de separação de variáveis, é possível separar o problema da seguinte maneira:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \phi_n(t), \tag{5.16}$$

Substituindo a eq.(5.16) no problema 5.15, tem-se:

$$\begin{aligned}
 t^{1-\beta} \psi_n(x) \frac{d\phi_n(t)}{dt} &= \bar{\alpha} \phi_n(t) \frac{d^2 \psi_n(x)}{dx^2} = -\gamma, & 0 < x < 1, \\
 \psi_n(0) \phi_n(t) = \psi_n(1) \phi_n(t) &= 0 & t > 0, \\
 \psi_n(x) \phi_n(0) &= T_0 \text{sen} \pi x & x \in (0,1), \\
 t^{1-\beta} \psi_n(x) \frac{d\phi_n(0)}{dt} &= 0, & x \in (0,1).
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

A partir dessa substituição, surgem dois problemas, a saber:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \psi_n(x)}{dx^2} + \gamma \psi_n(x) &= 0 & 0 < x < 1; \\
 \psi_n(0) = \psi_n(1) &= 0; \\
 \psi_n(x) &= \text{sen} \pi x.
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\phi_n(t)}{dt} + \gamma \bar{\alpha} t^{\beta-1} \phi_n(t) &= 0 & t > 0; \\
 \phi_n(0) &= T_0; \\
 \frac{d\phi_n(0)}{dt} &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Resolvendo o problema 5.18, os cálculos podem ser feitos de maneira análoga ao



feito no apêndice B. Logo, seguindo os mesmos passos obtêm-se que  $n = 1$ , e a seguinte solução analítica para o problema:

$$\psi(x) = \text{sen}(\pi x). \quad (5.20)$$

Note que o resultado é o mesmo encontrado para o problema com derivada clássica B.2.4. Isso se justifica pelo fato de que o problema abordado nesta seção, possui apenas derivada temporal deformada. Assim sendo, é de se esperar que apenas a parte temporal da solução analítica seja alterada.

Resolvendo o problema 5.19, tem-se que:

$$\frac{d\phi_n(t)}{dt} = -\gamma\bar{\alpha}t^{\beta-1}\phi_n(t); \quad (5.21)$$

$$\phi(t) = C_1 e^{\frac{-\gamma\bar{\alpha}t^\beta}{\beta}}; \quad (5.22)$$

Aplicado a condição de contorno, obtêm-se:

$$\phi(t) = e^{\frac{-\gamma\bar{\alpha}t^\beta}{\beta}}; \quad (5.23)$$

Então, substituindo as equações (5.20) e (5.23) em (5.16), a seguinte solução analítica para a equação de condução de calor deformada, por separação de variáveis é obtida.

$$T(x, t) = T_0 \text{sen}(\pi x) e^{\frac{-\pi^2\bar{\alpha}t^\beta}{\beta}}. \quad (5.24)$$

É possível encontrar outros estudos, que obtiveram a solução analítica da equação de condução de calor deformada de maneiras diferentes. Entre esses trabalhos, existe um apresentado por Khalil e Abu-Shaab [KHALIL; ABU-SHAAB, 2015] e o apresentado por Abu Hammad e Khalil [HAMMAD; KHALIL, 2014].

### 5.2.2.1 Interpretação Gráfica

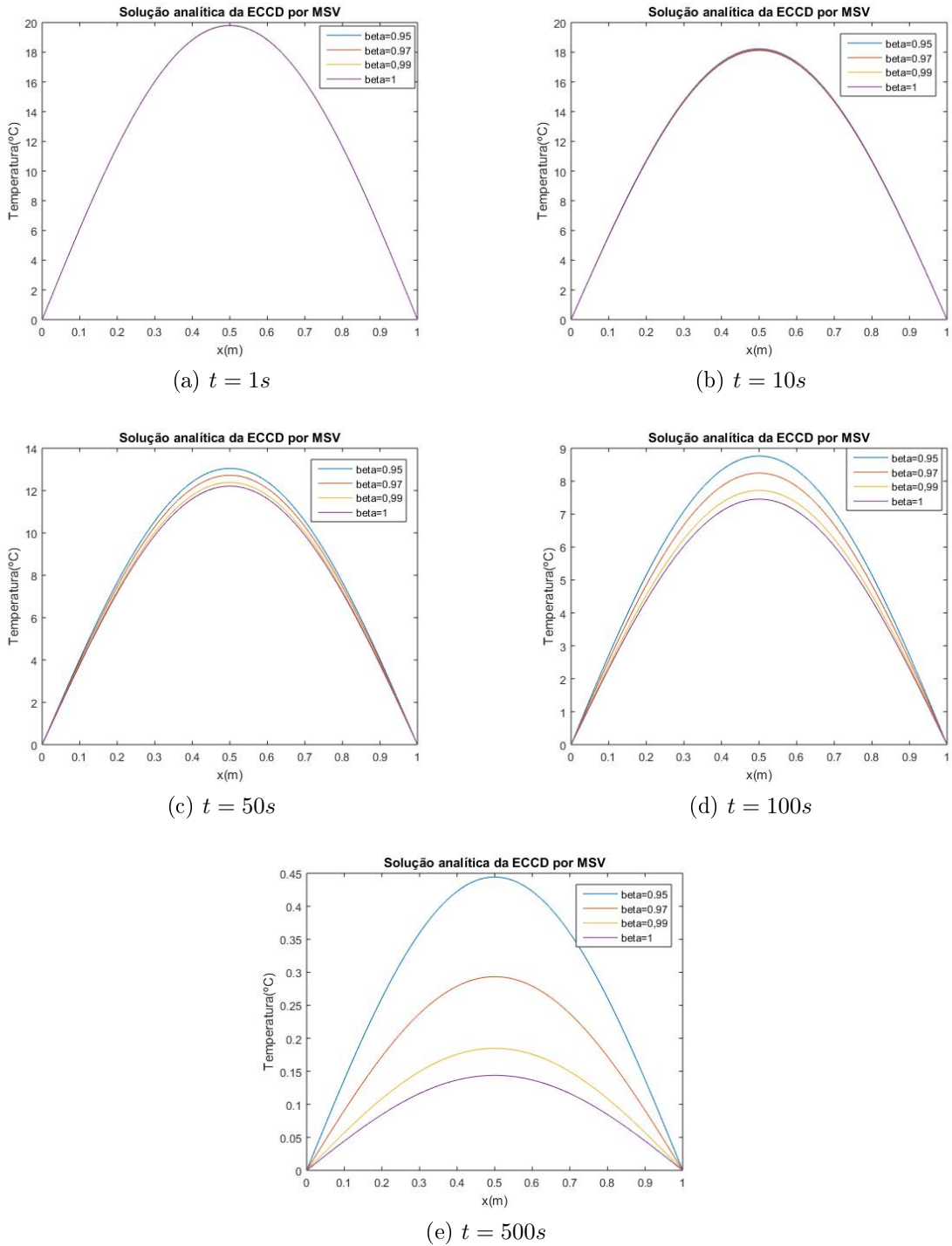


Figura 5.5: Perfil de temperatura considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$  e  $T_0 = 20^\circ C$ .

Assim como na seção anterior, em ambas as figuras a curva roxa equivalente a solução analítica inteira, pois quando coloca-se  $\beta = 1$  na eq.(5.24), volta-se a eq.(2.15). Devido a diferentes condições que regem o problema analisado neste momento, os gráficos obtidos possuem comportamento bem diferentes dos da seção anterior.

Como a nossa parte espacial, na eq.(5.24), é composta de uma função trigonométrica seno, ao plotar o gráfico no espaço, obtém-se curvas que se assemelham a parábolas.

Porém, como nosso objetivo aqui é avaliar o comportamento de acordo com os diferentes parâmetros de deformação, o tempo  $t = 100s$  basta. Note que quanto menor o valor de  $\beta$ , a curva atinge temperaturas mais altas. Dependendo do fenômeno físico em que estes conceitos serão aplicados, esta informação pode ser de grande relevância, pois o comportamento detalhado nos gráficos acima podem indicar novamente isolamento térmico.

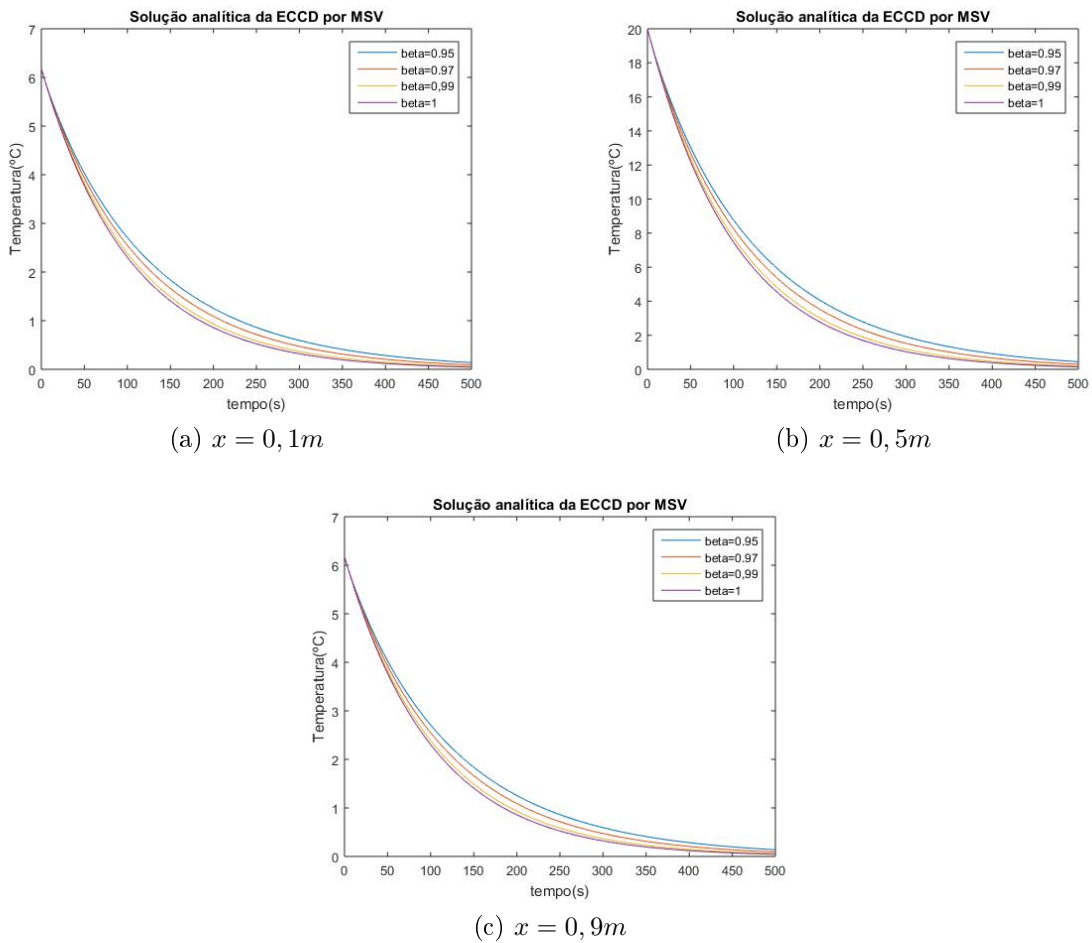


Figura 5.6: Perfil de temperatura considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$ , e  $T_0 = 20^\circ C$ .

Na figura 5.6, analisa-se o comportamento da temperatura em relação ao tempo, note que logo no início do evento, segundo o gráfico, as alterações causadas no problema são mínimas, tendo um intervalo de tempo que visualmente são quase irrelevantes.

Porém, no meio da barra essas variações já ficam evidentes, tornando assim importante a presença do parâmetro de deformação,  $\beta$ , na solução. A final, mais uma vez, o problema tende a aproximar as curvas, de certa forma isto já era esperando. Vendo que o problema em questão não possui uma fonte geradora de calor constante, por isso a temperatura diminui cada vez mais com o passar do tempo.

Nota-se ainda que quanto menor for o valor de  $\beta$ , maior será o tempo necessário para o decaimento da temperatura no material. O material associado à curva com  $\beta = 0.95$  esfria mais lentamente que as demais. Ou seja, é melhor isolante térmico.

Conclui-se que materiais com valores menores para  $\beta$ , por terem estruturas menos conexas ou mesmo fractais, dificultam a transferência de calor. Isso poderia ser usado na prática, para testar materiais. Caso o material esteja desgastado, a transferência de calor fica mais limitada, tornando este material um isolante térmico.

O grau de desgaste de um determinado material poderia ser indicado pelo parâmetro  $\beta$ . Assim, uma espectroscopia térmica poderia ser criada para a indústria.

### 5.3 Equação de Cattaneo-Vernotte Deformada

No capítulo 3 foi obtida a ECV, a partir da lei de Fourier. Nesta etapa o objetivo é obter a equação de Cattaneo-Vernotte deformada (ECVD). Para esse fim, faz-se uma expansão deformada de Taylor, baseada na ref. [ABDELJAWAD, 2015].

$$q(x, t + \tau) \simeq q(x, t_0) + \frac{\tau^\beta}{\beta} \frac{\partial^\beta q}{\partial t^\beta} = -k\nabla T, \quad (5.25)$$

$0 < \beta < 1$ , então

$$q(x, t_0) + \frac{\tau^\beta}{\beta} \frac{\partial^\beta q}{\partial t^\beta} = -k\nabla T, \quad (5.26)$$

Na eq.(5.26), é fácil ver que o fluxo de calor não ocorre mais instantaneamente, e também depende da deformação da derivada. Fazendo as substituições apropriadas, obtém-se:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\tau^\beta}{\beta} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^\beta T}{\partial t^\beta} = \frac{k}{\rho c} \nabla^2 T, \quad (5.27)$$

No entanto, esta não é a única maneira de encontrar formas deformadas da equação de Cattaneo-Vernotte. Considerando a equação de continuidade com a derivada deformada no tempo, reescrevendo-a da seguinte maneira:

$$\nabla q = -\rho c \frac{\partial^\beta T}{\partial t^\beta}, \quad 0 < \beta < 1 \quad (5.28)$$

Novamente, usando a derivada deformada  $\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}$  na equação de continuidade e fazendo as substituições, obtém-se:

$$\frac{\partial^\beta T}{\partial t^\beta} + \frac{\tau^\beta}{\beta} \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} \frac{\partial^\beta T}{\partial t^\beta} = \frac{k}{\rho c} \nabla^2 T. \quad (5.29)$$

Note que a eq.(5.29) tem um problema dimensional. Para resolver isso foi adicionado um parâmetro de deformação  $h$ , que tem dimensão  $s^{1-\beta}$ .

$$\frac{\partial^\beta T}{\partial t^\beta} + \frac{\tau^\beta}{\beta} \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} \frac{\partial^\beta T}{\partial t^\beta} = \alpha h \nabla^2 T. \quad (5.30)$$

Note que, se  $\tau$  tende a zero, você tem de reobter ECCD, e assim a solução deve coincidir. A equação acima foi escolhida como base para os próximos cálculos.

## 5.4 Soluções analíticas da equação de Cattaneo-Vernotte deformada

A seguir, será apresentados dois métodos para encontrar a solução da equação de Cattaneo-Vernotte deformada. Os métodos escolhidos nessa parte do trabalho, são os mesmos utilizados para resolver a ECV na forma usual, nos apêndices C e D.

### 5.4.1 Método da Solução Tentativa

Considerando a equação unidimensional de Cattaneo-Vernotte deformada (5.30), que foi obtida na seção acima 5.3, utilizando esta equação para o mesmo problema estudado na subseção 3.4.1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\beta T(x,t)}{\partial t^\beta} + \frac{\tau^\beta}{\beta} \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} \frac{\partial^\beta T(x,t)}{\partial t^\beta} &= \bar{\alpha} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l \\ T(0,0) &= T_h, \\ T(l,0) &= T_i. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Onde,  $\bar{\alpha} = h\alpha$ ,  $T_h$  e  $T_i$  são as temperaturas impostas nos contornos. Sendo  $T_i$  a temperatura inicial do material estudado (no nosso caso carne processada), e  $T_h$  a temperatura da superfície que entrará em contato com o material (chapa aquecida).

Uma possível solução para o problema 5.31 foi proposta, a fim de incorporar as variáveis  $x$  e  $t$  em uma função exponencial esticada.

$$T(x,t) = Ae^{ax} e^{bt^\beta}, \quad (5.32)$$

Onde  $A$ ,  $a$ , e  $b$  são constantes, com dimensões das grandezas de temperatura, espaço e tempo, respectivamente. Substituindo a eq.(5.32) no problema proposto, e fazendo os devidos cálculos das derivadas, tem-se:

$$Ab\beta e^{ax} e^{bt^\beta} + Ab^2\beta^2 e^{ax} e^{bt^\beta} \frac{\tau^\beta}{\beta} = \bar{\alpha} Aa^2 e^{ax} e^{bt^\beta}. \quad (5.33)$$

Simplificando a equação acima

$$\tau^\beta \beta b^2 + \beta b - \bar{\alpha} a^2 = 0. \quad (5.34)$$

Com uma simples análise dimensional, é possível perceber que, a eq.(5.34) respeita as condições propostas no início do desenvolvimento do cálculos. Resolvendo esta equação,

encontram-se os valores para a constante b.

$$b = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\tau^\beta \beta \bar{\alpha} a^2}}{2\tau^\beta \beta}. \quad (5.35)$$

Pode-se reescrever a eq.(5.32), da seguinte maneira:

$$T(x, t) = Ae^{ax} e^{-\frac{t^\beta}{2\tau^\beta}} \left[ e^{\frac{t^\beta}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau^{2\beta}} - 4\frac{\bar{\alpha}}{\beta\tau^\beta} \left\{ \frac{1}{l} \ln \frac{T_i}{T_h} \right\}^2}} + e^{-\frac{t^\beta}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau^{2\beta}} - 4\frac{\bar{\alpha}}{\beta\tau^\beta} \left\{ \frac{1}{l} \ln \frac{T_i}{T_h} \right\}^2}} \right] \quad (5.36)$$

Para obter as demais constantes, faz-se necessário o uso das condições de contorno do problema.

Substituindo então  $T(0, 0) = T_h$ , na eq.(5.32), tem-se:

$$T(0, 0) = Ae^{a0} e^{b0^\beta} e^0 + e^0 = T_h, \quad (5.37)$$

$$2A = T_h, \quad (5.38)$$

$$A = \frac{T_h}{2}. \quad (5.39)$$

Substituindo então  $T(l, 0) = T_i$ , na eq.(5.32), tem-se:

$$T(l, 0) = \frac{T_h}{2} e^{al} e^{b0^\beta} e^0 + e^0 = T_i, \quad (5.40)$$

$$T_h e^{al} = T_i, \quad (5.41)$$

$$e^{al} = \frac{T_i}{T_h}, \quad (5.42)$$

$$al = \ln \left( \frac{T_i}{T_h} \right), \quad (5.43)$$

$$a = \frac{1}{l} \ln \left( \frac{T_i}{T_h} \right) \quad (5.44)$$

Substituindo as equações (5.39 e 5.44) na (5.36), obtém-se a solução analítica do problema 5.31 dada por:

$$T(x, t) = \frac{T_h}{2} e^{\frac{x}{l} \ln \frac{T_i}{T_h}} e^{-\frac{t^\beta}{2\tau^\beta}} \left\{ e^{\frac{t^\beta}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau^{2\beta}} - 4\frac{\bar{\alpha}}{\beta\tau^\beta} \left\{ \frac{1}{l} \ln \frac{T_i}{T_h} \right\}^2}} + e^{-\frac{t^\beta}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau^{2\beta}} - 4\frac{\bar{\alpha}}{\beta\tau^\beta} \left\{ \frac{1}{l} \ln \frac{T_i}{T_h} \right\}^2}} \right\} \quad (5.45)$$

### 5.4.1.1 Interpretação Gráfica

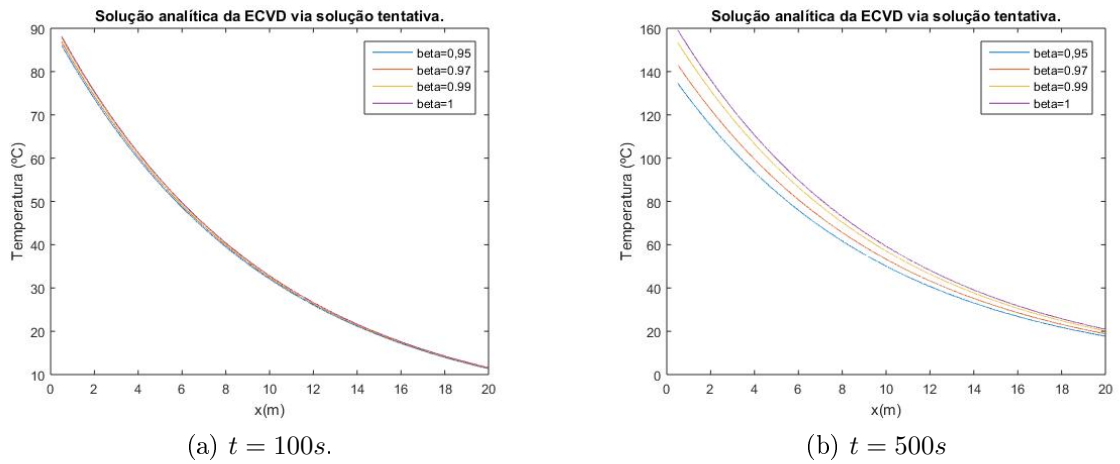


Figura 5.7: Perfil de temperatura em tempos diferentes, considerando  $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-7} m^2/s$ ,  $T_0 = 20^\circ C$ ,  $T_h = 160^\circ C$  e  $\tau = 15s$ .

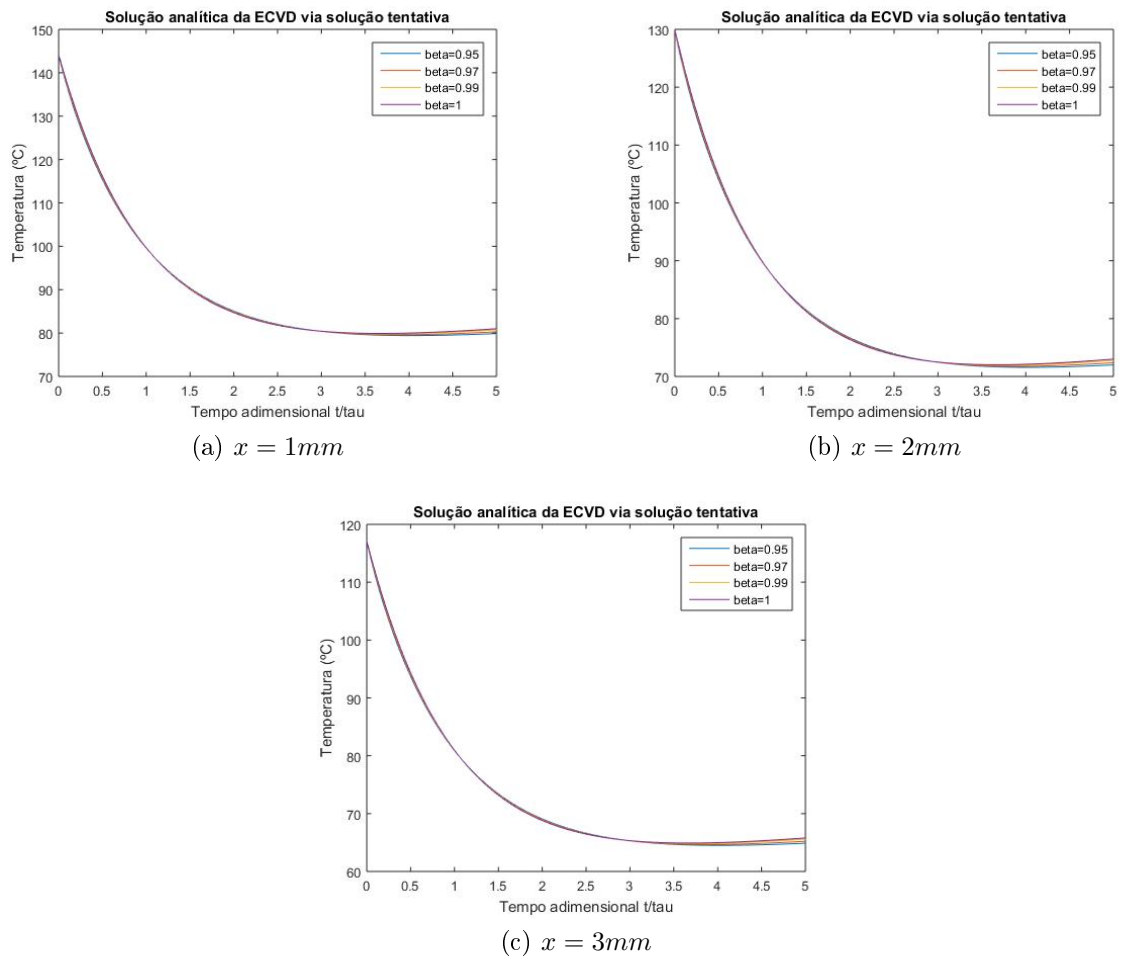


Figura 5.8: Perfil de temperatura, em posições diferentes, considerando  $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-7} m^2/s$ ,  $T_0 = 20^\circ C$ ,  $T_h = 160^\circ C$ , e  $\tau = 15s$ .

Nas figuras acima, assim como nos casos anteriores a curva roxa representa a solução inteira, pois ao substituir  $\beta = 1$  na eq.(5.45), encontra-se a eq.(3.16).

A figura 5.7 analisa o perfil de temperatura do problema regido pela ECVD, solucionado por meio do método de solução tentativa. Note que as variações se tornam mais perceptíveis, a medida que, escolhem-se valores maiores para o tempo.

Observe que quanto menor o valor de beta mais baixas são as temperaturas em relação as demais curvas. Note que, novamente, isso indica que o material é um condutor térmico pior do que os caracterizados pelo parâmetro beta maior. Elevar a temperatura desse material é mais difícil e ele é melhor isolante térmico.

Na figura 5.8, foi mantido o parâmetro  $\frac{t}{\tau}$  usado na figura 3.2, pois foi tomado como base o artigo da ref.[CHOI et al., 2016]. Foram feitas simulações para diferentes posições. Porém, para os parâmetros considerados, a variação entre as curvas são quase imperceptíveis.

#### 5.4.1.2 Interpretação alternativa

Assim como foi feito no artigo da ref. [CHOI et al., 2016], e no C foi analisado separadamente alguns termos da equação. Para verificar se existe alguma forma de simplificar a eq.(5.45), e obter uma solução particular, com outra interpretação..

Serão consideradas as duas funções abaixo, que fazem parte da eq.(5.45), porém nesse momento serão analisadas separadamente.

$$f^1(t) = e^{\frac{t^\beta}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau^{2\beta}} - 4 \frac{\bar{\alpha}}{\beta \tau^\beta} \left\{ \frac{1}{l} \ln \frac{T_i}{T_h} \right\}^2}}, \quad (5.46)$$

$$f^2(t) = e^{-\frac{t^\beta}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau^{2\beta}} - 4 \frac{\bar{\alpha}}{\beta \tau^\beta} \left\{ \frac{1}{l} \ln \frac{T_i}{T_h} \right\}^2}}, \quad (5.47)$$



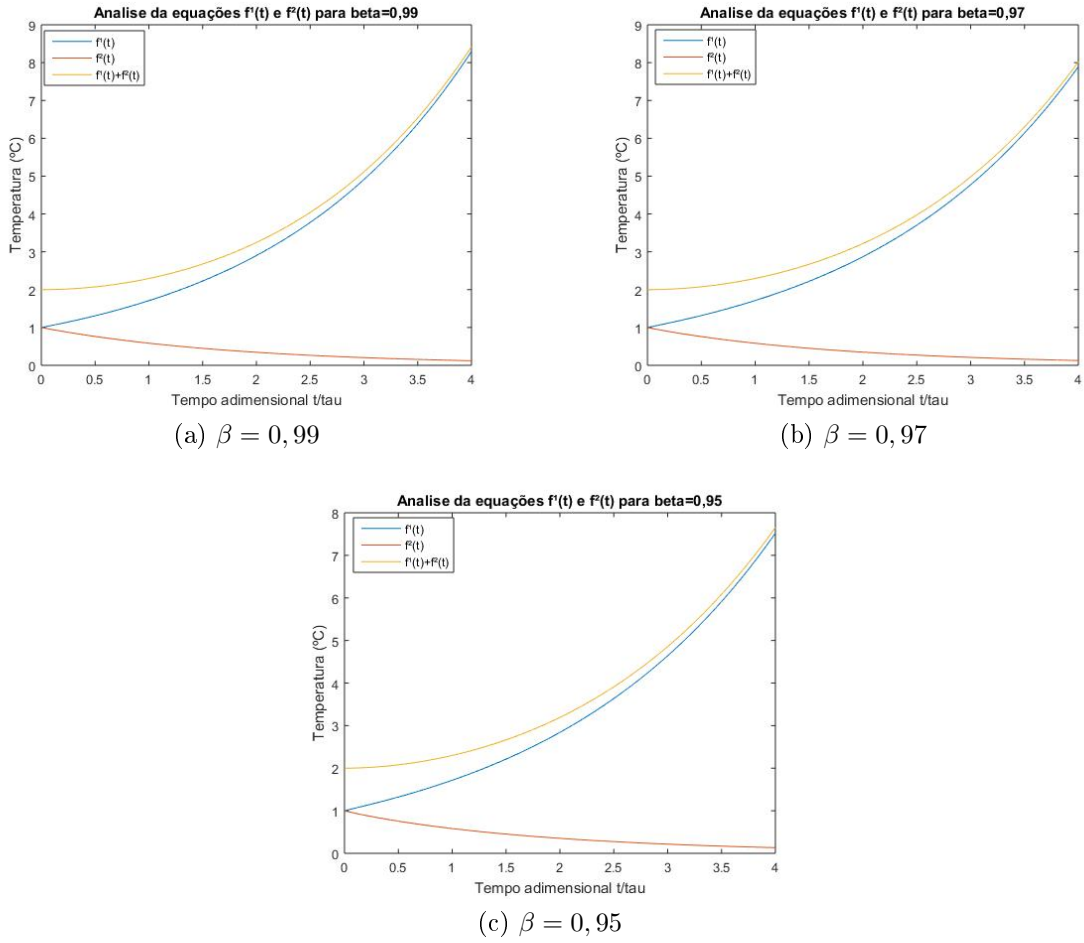


Figura 5.9: O comportamento das funções  $f^1$  e  $f^2$ .

A figura 5.9, mostra três gráficos distintos, onde apesar dos diferentes valores para o parâmetro de deformação  $\beta$ , as curvas se comportam de maneira semelhante a figura 10.1.

Nos três casos referidos, observa-se que a curva que representa  $f^1$  cresce exponencialmente. Porém, a curva associada à  $f^2$  assume valores desprezíveis com o aumento o passar do tempo.

Com o auxílio do software MATLAB, foi traçada uma terceira curva, esta calcula a soma das duas parcelas estudadas. Conclui-se assim, que quanto maior o tempo, menos é a contribuição da curva  $f^2$ , deixando assim a soma das duas bem próxima da própria  $f^1$ . Com isso, foi assumido que assim como foi feito na ref.[CHOI et al., 2016], a parcela que representa  $f^2$  na solução analítica pode ser descartada, mesmo que os valores de  $\beta$  sejam diferentes. Simplificando assim a eq.(5.45), e propondo outra solução, com  $A=Th$ , obtém-se:

$$T(x, t) = T_h e^{\frac{x}{l} \ln \frac{T_i}{T_h}} e^{-\frac{t^\beta}{2\tau^\beta}} \left\{ e^{\frac{t^\beta}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau^{2\beta}} - 4 \frac{\alpha}{\beta \tau^\beta} \left\{ \frac{1}{l} \ln \frac{T_i}{T_h} \right\}^2}} \right\} \quad (5.48)$$

A eq.(5.48) é a solução particular, alternativa para ECVD por solução tentativa. Analisando graficamente esse resultado obtém-se:

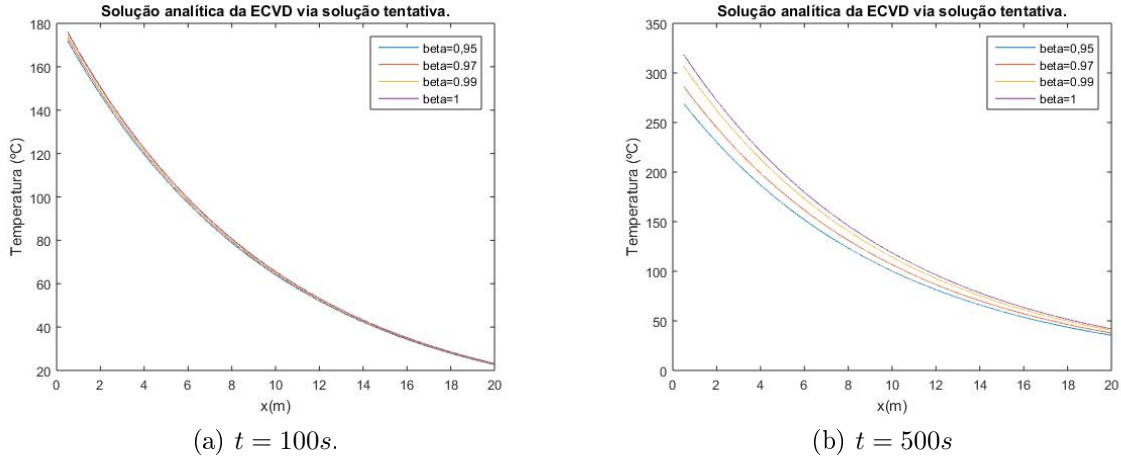


Figura 5.10: Perfil de temperatura, para tempo diferentes, considerando  $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-7} m^2/s$ ,  $T_0 = 20^\circ C$ ,  $T_h = 160^\circ C$ , e  $\tau = 15s$ .

#### 5.4.2 Método de Separação de Variáveis

Note que a seção acima usa o método proposto na ref.[CHOI et al., 2016], mas como o próprio autores concluem, apesar dele ser matematicamente bem mais simples, dependendo do fenômeno abordado ele pode fornecer alguns resultados não muito precisos.

Logo, buscando mostrar que também é possível resolver uma EDP deformada por um método mais tradicional, no próximo problema será usado o MSV.

Considerando a eq.(5.30), nesta subseção foi resolvido o problema que possui as mesmas condições do apêndice D, tendo com base uma haste fina, homogênea, termicamente condutora, de seção transversal e difusividade térmica constantes.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^\beta T}{\partial t^\beta} + \frac{\tau^\beta}{\beta} \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} \frac{\partial^\beta T}{\partial t^\beta} &= \bar{\alpha} \nabla^2 T \quad 0 < x < 1, \\
 T(0, t) = T(l, t) &= 0, \quad t > 0, \\
 T(x, 0) &= T_0 \text{sen} \left( \frac{\pi x}{l} \right), \\
 T_t^\beta(x, 0) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

Assim como para a forma inteira, visando simplificar os cálculos, o problema será adimensionalizado. Para isto, é necessário fazer as seguintes substituições:

$$u = \frac{T}{T_0}, \quad X = \frac{x}{l} \quad e \quad \theta^\beta = t^\beta \left( \frac{\bar{\alpha}}{l^2} \right).$$

Obtendo assim o seguinte problema adimensionalizado:

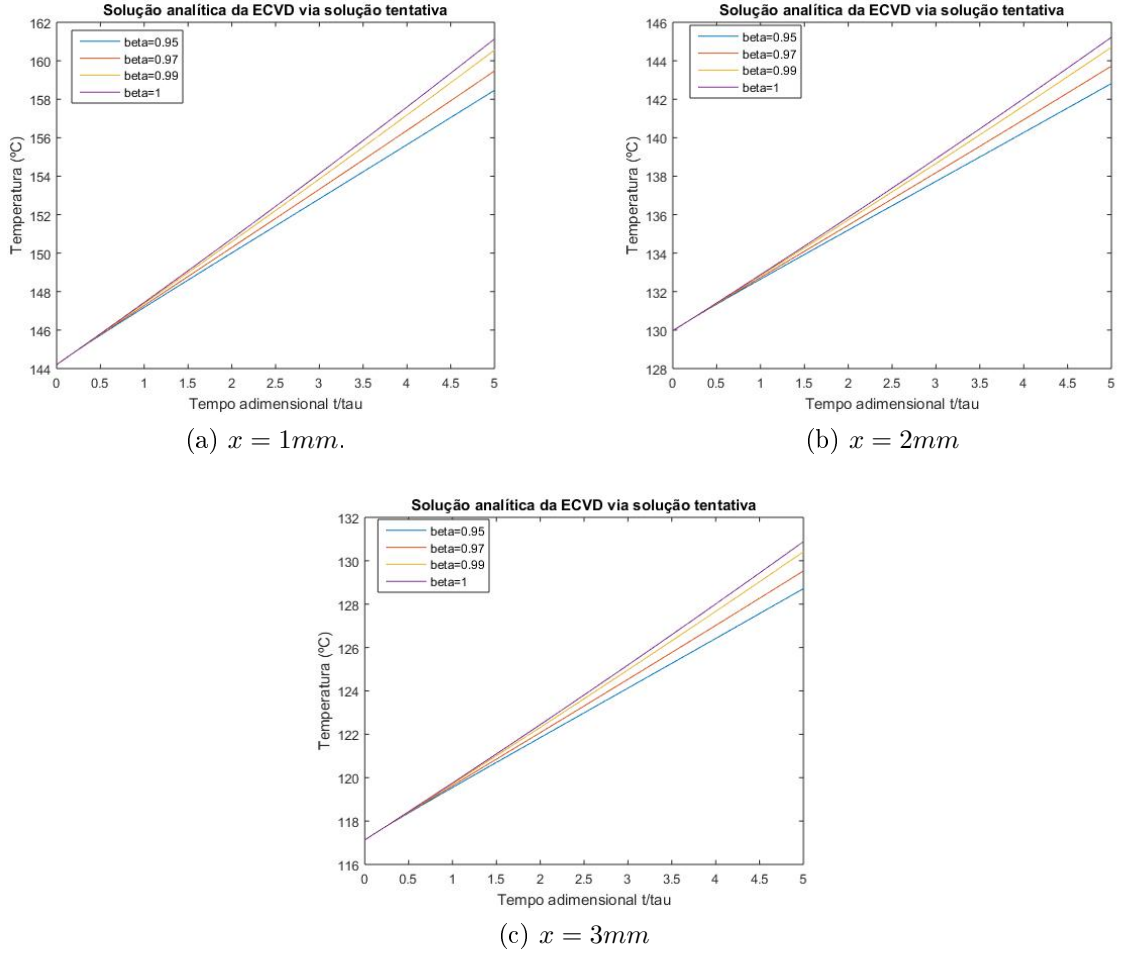


Figura 5.11: Perfil de temperatura, para diferentes posições, considerando  $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-7} m^2/s$ ,  $T_0 = 20^\circ C$ ,  $T_h = 160^\circ C$ , e  $\tau = 15s$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^\beta u}{\partial \theta^\beta} + \tau_0 \frac{\partial^\beta}{\partial \theta^\beta} \frac{\partial^\beta u}{\partial \theta^\beta} &= \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}, & 0 < X < 1, \\
 u(0, \theta) = u(1, \theta) &= 0, & \theta > 0, \\
 u(X, 0) &= \text{sen}(\pi X), & X \in (0, 1), \\
 \frac{\partial u^\beta}{\partial \theta^\beta}(X, 0) &= 0, & X \in (0, 1).
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

Onde  $\tau_0 = \frac{\tau \beta \bar{\alpha}}{\beta l^2}$ , e sabendo que  $l = 1$ . Usando o método de separação de variáveis.

$$u(X, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(X) \phi_n(\theta). \tag{5.51}$$

Obtém-se assim dois problemas:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \psi_n(X)}{dX^2} &= -\gamma \psi_n(X), & 0 < X < 1, \\
 \psi_n(X) &= \text{sen}(n\pi X), \\
 \psi_n(0) = \psi_n(1) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

e

$$\begin{aligned}\tau_0 \frac{d^\beta}{d\theta^\beta} \frac{d^\beta \phi_n(\theta)}{d\theta^\beta} + \frac{d^\beta \phi_n(\theta)}{d\theta^\beta} &= -\gamma \phi_n(\theta), \quad \theta > 0, \\ \phi_n(0) &= 1, \\ \theta^{1-\beta} \frac{d\phi_n(0)}{d\theta} &= 0.\end{aligned}\tag{5.53}$$

O problema 5.52 pode ser resolvido de maneira análoga a feita no apêndice D, obtendo assim o mesmo resultado para a parte espacial:

$$\psi(X) = \text{sen}(\pi X).\tag{5.54}$$

Agora resolvendo o problema 5.53, sabendo que  $n = 1$ . Pode-se propor  $\phi(\theta) = Ae^{\rho \frac{\theta^\beta}{\beta}}$  como uma possível solução deformada. Substituindo a proposta de solução, no problema, obtém-se:

$$\tau_0 \frac{d^\beta}{d\theta^\beta} \frac{d^\beta \left( Ae^{\rho \frac{\theta^\beta}{\beta}} \right)}{d\theta^\beta} + \frac{d^\beta \left( Ae^{\rho \frac{\theta^\beta}{\beta}} \right)}{d\theta^\beta} = -\gamma Ae^{\rho \frac{\theta^\beta}{\beta}},\tag{5.55}$$

Resolvendo as derivadas:

$$\tau_0 A \rho^2 e^{\frac{\rho \theta^\beta}{\beta}} + A \rho e^{\frac{\rho \theta^\beta}{\beta}} = -\gamma A e^{\rho \frac{\theta^\beta}{\beta}}\tag{5.56}$$

$$\tau_0 \rho^2 + \rho + \gamma = 0\tag{5.57}$$

É obtida uma equação característica (5.57), que tem como solução:

$$\rho = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\tau_0 \pi^2}}{2\tau_0},\tag{5.58}$$

$$\rho = \frac{-1}{2\tau_0} \pm \frac{\sqrt{1 - 4\tau_0 \pi^2}}{2\tau_0},\tag{5.59}$$

Será considerado:

$$\omega = \frac{\sqrt{1 - 4\tau_0 \pi^2}}{2\tau_0} = \frac{\sqrt{4\pi^2 \left( \frac{1}{4\pi^2} - \tau_0 \right)}}{2\tau_0} = \frac{\pi \sqrt{\tau_c - \tau_0}}{\tau_0}, \text{ onde } \tau_c = \frac{1}{4\pi^2}.$$

Mais uma vez, fazendo os cálculos de maneira análoga ao que foi realizado no apêndice D, tem-se três casos:

- $\Delta > 0$ ;

$$\tau_0 < \tau_c.$$

- $\Delta = 0$ ;

$$\tau_0 = \tau_c.$$

- $\Delta < 0$ .

$$\tau_0 > \tau_c.$$

No primeiro caso, quando  $\Delta > 0$ , significa que existem duas raízes reais distintas para equação, logo uma possível solução é:

$$\phi(\theta) = C1e^{[-\frac{1}{2\tau_0} + \omega] \frac{\theta^\beta}{\beta}} + C2e^{[-\frac{1}{2\tau_0} - \omega] \frac{\theta^\beta}{\beta}}, \quad (5.60)$$

Aplicando as condições do problema  $\theta^{1-\beta} \frac{d\phi(0)}{d\theta^\beta} = 0$  e  $\phi(0) = 1$ , encontra-se as seguintes constantes:

$$\begin{aligned} C1 &= \frac{2\tau_0 + 1}{4\tau_0\omega}, \\ C2 &= \frac{-1 + 2\tau_0\omega}{4\tau_0\omega}, \end{aligned} \quad (5.61)$$

Substituindo as constantes encontradas (5.61), na eq.(5.60), tem-se:

$$\phi(\theta) = \frac{2\tau_0 + 1}{4\tau_0\omega} e^{[-\frac{1}{2\tau_0} + \omega] \frac{\theta^\beta}{\beta}} + \frac{-1 + 2\tau_0\omega}{4\tau_0\omega} e^{[-\frac{1}{2\tau_0} - \omega] \frac{\theta^\beta}{\beta}}, \quad (5.62)$$

Ao reorganizar a equação acima, encontra-se:

$$\phi(\theta) = e^{[-\frac{\theta^\beta}{2\tau_0\beta}] \cosh\left(\frac{\omega\theta^\beta}{\beta}\right) + \frac{\sinh\left(\frac{\omega\theta^\beta}{\beta}\right)}{\sqrt{1 - 4\pi^2\tau_0}}. \quad (5.63)$$

No segundo caso, quando  $\Delta = 0$ , existem duas raízes reais iguais, então a solução será da forma:

$$\phi(\theta) = C1e^{[-\frac{1}{2\tau_0}] \frac{\theta^\beta}{\beta}} + C2\frac{\theta^\beta}{\beta} e^{[-\frac{1}{2\tau_0}] \frac{\theta^\beta}{\beta}}, \quad (5.64)$$

Aplicando as condições do problema  $\theta^{1-\beta} \frac{d\phi(0)}{d\theta^\beta} = 0$  e  $\phi(0) = 1$ , é encontrado as seguintes constantes:

$$\begin{aligned} C1 &= 1, \\ C2 &= \frac{1}{2\tau_0}, \end{aligned} \quad (5.65)$$

Substituindo as constantes encontradas (5.65), na eq.(5.64), tem-se:

$$\phi(\theta) = 1e^{[-\frac{1}{2\tau_0}] \frac{\theta^\beta}{\beta}} + \frac{1}{2\tau_0} \frac{\theta^\beta}{\beta} e^{[-\frac{1}{2\tau_0}] \frac{\theta^\beta}{\beta}}, \quad (5.66)$$

Ao reorganizar a equação acima, encontra-se:

$$\phi(\theta) = e^{[-\frac{\theta^\beta}{2\tau_0\beta}] \left[1 + \frac{\theta^\beta}{2\tau_0\beta}\right]}. \quad (5.67)$$

No último caso, quando  $\Delta < 0$ , existem duas raízes complexas para compor a solução, assim:

$$\phi(\theta) = C1e^{[-\frac{1}{2\tau_0}]^{\frac{\theta^\beta}{\beta}}} \cos\left(\frac{\omega\theta^\beta}{\beta}\right) + C2e^{[-\frac{1}{2\tau_0}]^{\frac{\theta^\beta}{\beta}}} \text{sen}\left(\frac{\omega\theta^\beta}{\beta}\right), \quad (5.68)$$

Aplicando as condições do problema  $\theta^{1-\beta}\frac{d\phi(0)}{d\theta^\beta} = 0$  e  $\phi(0) = 1$ , encontra-se as seguintes constantes:

$$\begin{aligned} C1 &= 1, \\ C2 &= \frac{1}{2\tau_0\omega}, \end{aligned} \quad (5.69)$$

Substituindo as constantes encontradas (5.69), na eq.(5.68), tem-se:

$$\phi(\theta) = e^{[-\frac{1}{2\tau_0}]^{\frac{\theta^\beta}{\beta}}} \cos\left(\frac{\omega\theta^\beta}{\beta}\right) + \frac{1}{2\tau_0\omega} e^{[-\frac{1}{2\tau_0}]^{\frac{\theta^\beta}{\beta}}} \text{sen}\left(\frac{\omega\theta^\beta}{\beta}\right), \quad (5.70)$$

Ao reorganizar a equação acima, encontra-se:

$$\phi(\theta) = e^{[-\frac{\theta^\beta}{2\tau_0\omega}]^{\frac{\theta^\beta}{\beta}}} \left[ \cos\left(\frac{\omega\theta^\beta}{\beta}\right) + \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega\theta^\beta}{\beta}\right)}{\sqrt{|1-4\pi^2\tau_0|}} \right]. \quad (5.71)$$

A solução do problema, é a junção das soluções aqui encontradas nas equações (5.54), (5.63), (5.67) e (5.71):

$$u(X, \theta) = \text{sen}(\pi X) e^{-\frac{\theta^\beta}{2\tau_0\omega}} \Theta, \quad (5.72)$$

$$\Theta = \begin{cases} \cosh\left(\frac{\omega\theta^\beta}{\beta}\right) + \frac{\text{senh}\left(\frac{\omega\theta^\beta}{\beta}\right)}{\sqrt{1-4\pi^2\tau_0}}, & \text{para } \tau_0 < \tau_c \\ \left[1 + \frac{\theta^\beta}{2\tau_0\omega}\right], & \text{para } \tau_0 = \tau_c \\ \left[\cos\left(\frac{\omega\theta^\beta}{\beta}\right) + \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega\theta^\beta}{\beta}\right)}{\sqrt{|1-4\pi^2\tau_0|}}\right], & \text{para } \tau_0 > \tau_c \end{cases} \quad (5.73)$$

Reescrevendo 5.72 e 5.73, de maneira dimensional:

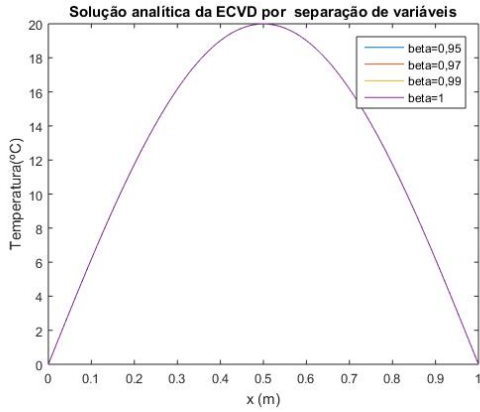
$$T(x, t) = T_0 \text{sen}(\pi x) e^{-\frac{t^\beta \bar{\alpha}}{2\tau_0\omega}} \Theta. \quad (5.74)$$

$$\Theta = \begin{cases} \cosh\left(\frac{\omega t^\beta \bar{\alpha}}{\beta}\right) + \frac{\text{senh}\left(\frac{\omega t^\beta \bar{\alpha}}{\beta}\right)}{\sqrt{1-4\pi^2\tau_0}}, & \text{para } \tau_0 < \tau_c \\ \left[1 + \frac{t^\beta \bar{\alpha}}{2\tau_0\omega}\right], & \text{para } \tau_0 = \tau_c \\ \left[\cos\left(\frac{\omega t^\beta \bar{\alpha}}{\beta}\right) + \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega t^\beta \bar{\alpha}}{\beta}\right)}{\sqrt{|1-4\pi^2\tau_0|}}\right], & \text{para } \tau_0 > \tau_c \end{cases} \quad (5.75)$$

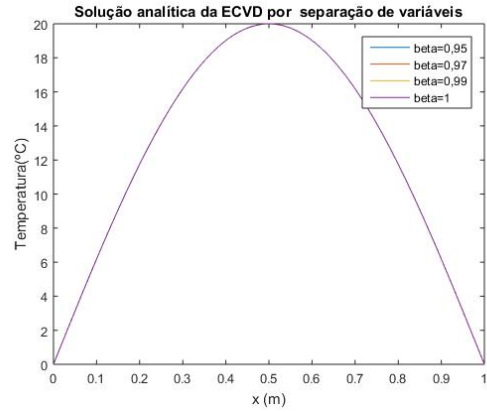
Onde  $\tau_c = \frac{1}{4\pi^2}$  e  $\tau_0 = \frac{\tau^\beta \bar{\alpha}}{\beta l^2}$ .

### 5.4.2.1 Interpretação Gráfica

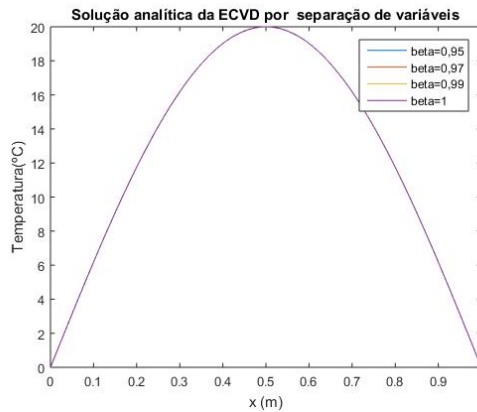
Analisando a eq.(5.74) por meio de gráficos. Verificando assim sua validade. Observe que nas figuras representadas abaixo, a curva em roxo refere-se ao valor de  $\beta = 1$ , ou seja, é quando obtém-se a solução dada pela eq.(3.21), obtida através do problema 3.18, que não possui deformação.



(a)  $\tau = 10s$  e  $\tau_0 < \tau_c$ .

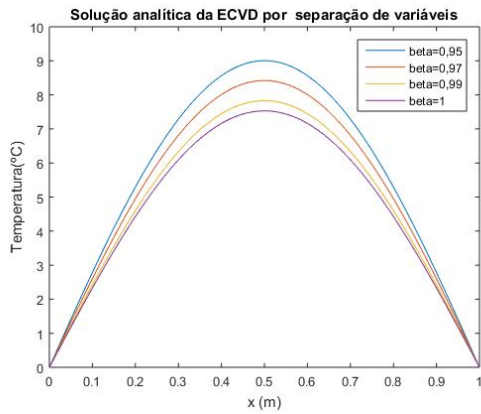


(b) Considerando  $\tau = 25.33029\dots s$  tem-se:  $\tau_0 < \tau_c$  para  $\beta \neq 1$  e  $\tau_0 = \tau_c$  para  $\beta = 1$ .

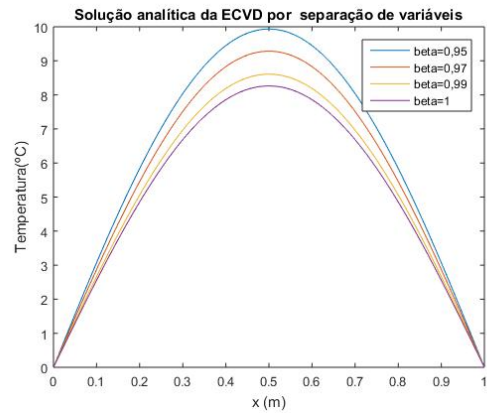


(c)  $\tau = 50s$  e  $\tau_0 > \tau_c$ .

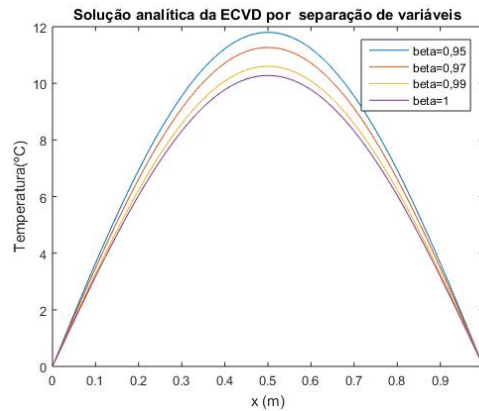
Figura 5.12: Perfil de temperatura considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$ ,  $T_0 = 20^\circ C$  e  $t = 1s$ .



(a)  $\tau = 10s$  e  $\tau_0 < \tau_c$ .



(b) Considerando  $\tau = 25.33029\dots s$  tem-se:  $\tau_0 < \tau_c$  para  $\beta \neq 1$  e  $\tau_0 = \tau_c$  para  $\beta = 1$ .



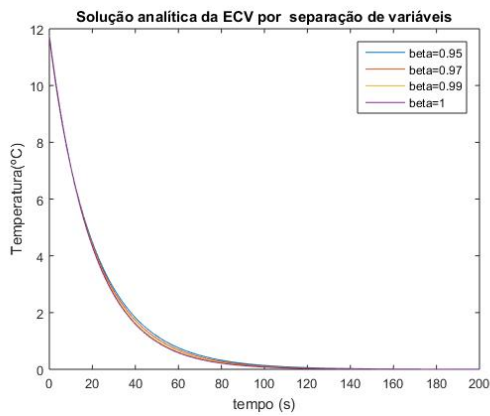
(c)  $\tau = 50s$  e  $\tau_0 > \tau_c$ .

Figura 5.13: Perfil de temperatura considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$ ,  $T_0 = 20^\circ C$  e  $t = 100s$

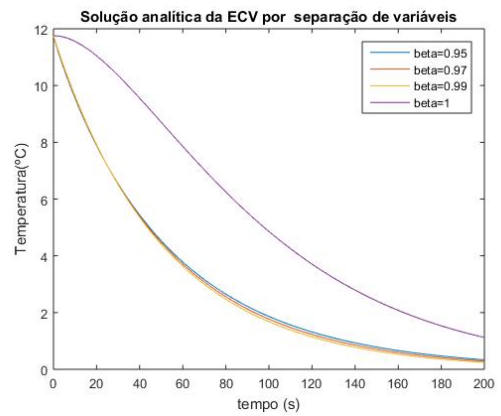
Note que para  $t = 1s$ , os diferentes parâmetros de deformação ainda não produzem alterações entre as curvas, que correspondem a mesma curva obtida para a solução analítica clássica da ECV 3.21.

Porém na figura 5.13, percebe-se que para  $t = 100s$ , as diferenças entre as curvas para diferentes  $\beta$  ficam mais explícitas. Onde para  $\beta$  menores, a temperatura atinge valores mais elevados.

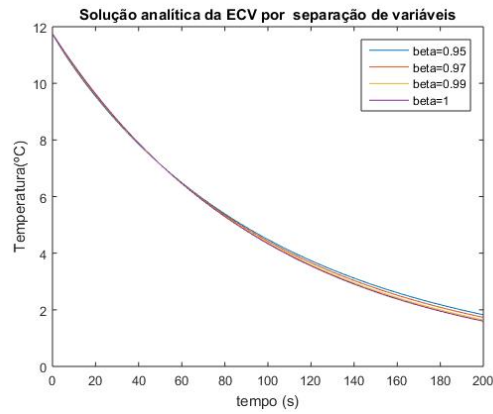




(a)  $\tau = 10s$  e  $\tau_0 < \tau_c$ .

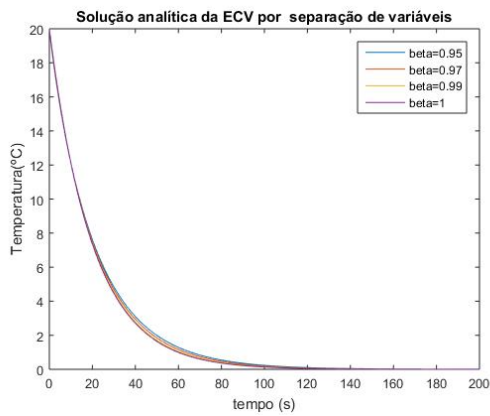


(b)  $\tau = 25.33029\dots s$ ,  $\tau_0 < \tau_c$  para  $\beta \neq 1$  e  $\tau_0 = \tau_c$  para  $\beta = 1$ .

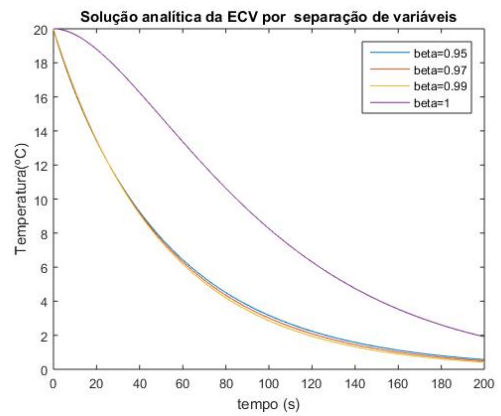


(c)  $\tau = 50s$  e  $\tau_0 > \tau_c$ .

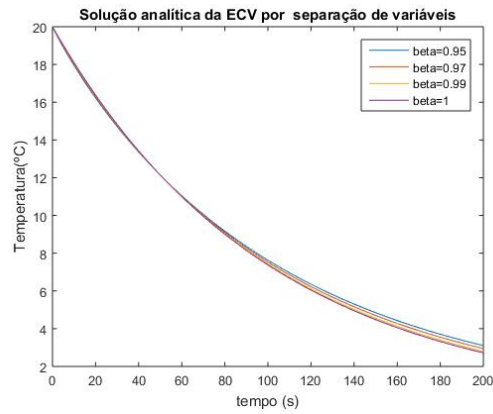
Figura 5.14: Perfil de temperatura considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$ ,  $T_0 = 20^\circ C$  e  $x = 0,2m$



(a)  $\tau = 10s$  e  $\tau_0 < \tau_c$ .

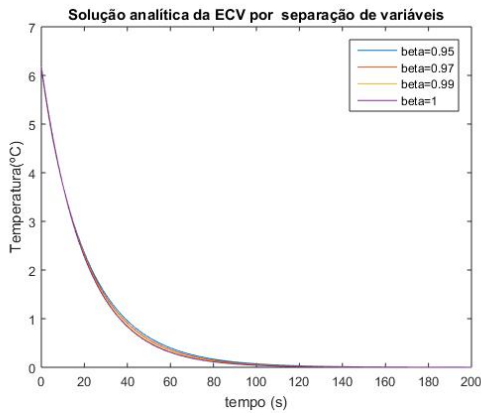


(b)  $\tau = 25.33029\dots s$ ,  $\tau_0 < \tau_c$  para  $\beta \neq 1$  e  $\tau_0 = \tau_c$  para  $\beta = 1$ .

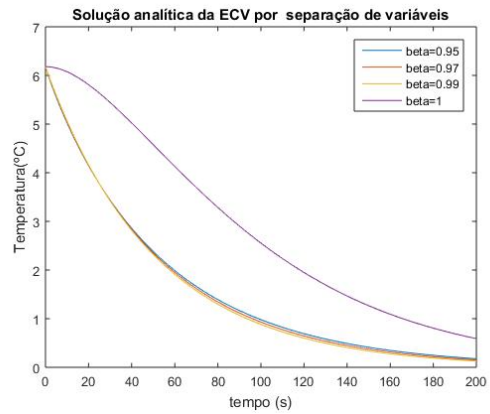


(c)  $\tau = 50s$  e  $\tau_0 > \tau_c$ .

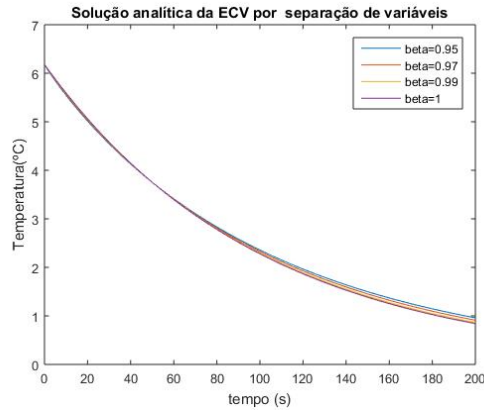
Figura 5.15: Perfil de temperatura considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$ ,  $T_0 = 20^\circ C$  e  $x = 0,5m$



(a)  $\tau = 10s$  e  $\tau_0 < \tau_c$ .



(b)  $\tau = 25.33029\dots s$ ,  $\tau_0 < \tau_c$  para  $\beta \neq 1$  e  $\tau_0 = \tau_c$  para  $\beta = 1$ .



(c)  $\tau = 50s$  e  $\tau_0 > \tau_c$ .

Figura 5.16: Perfil de temperatura considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$ ,  $T_0 = 20^\circ C$  e  $x = 0,9m$

As figuras 5.14, 5.15 e 5.16, referem-se as curvas para diferentes valores de  $\beta$ , nas posições  $x = 0,22m$ ,  $x = 0,5m$  e  $0,9m$ . Note que em 5.14b, 5.15b e 5.16b, existe uma grande divergência, entre a solução analítica clássica ( $\beta = 1$ ) e as demais. Isso ocorre porque como a solução analítica encontrada na eq.(5.74), é dividida em casos, quando o  $\beta = 1$  recai-se diante do caso onde  $\tau_0 = \tau_c$ . Porém, quando  $\beta \neq 1$  tem-se o caso onde  $\tau_0 < \tau_c$ .

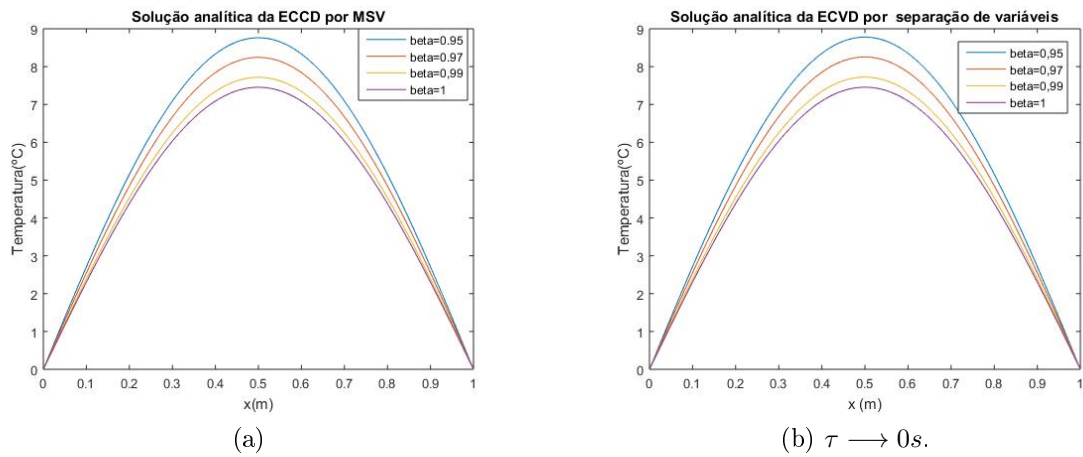


Figura 5.17: Perfil de temperatura considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$ ,  $T_0 = 20^\circ C$  e  $t = 100s$ .

Assim como em 3.4.2.1, é possível comparar as soluções encontradas para equação de Cattaneo-Vernotte deformada e para equação de Fourier deformada, obtidas através da solução dos problemas via separação de variáveis. Note que assim como em 3.7, os gráficos são exatamente iguais, com isso é verificado que mesmo na forma deformada, quando considera-se  $\tau$  tendendo a zero na equação de Cattaneo-Vernotte, ela recai na equação de Fourier deformada.

## 6 MÉTODO NUMÉRICO

### 6.1 Modelagem Computacional

Em inúmeras situações de processos físicos surge com a necessidade de uma implementação numérica, para a solução do problema abordado. A simulação computacional vem se tornando um bom método para aumentar a eficiência e agilidade na interpretação de alguns problemas de condução de calor. Porém exigem um domínio aprofundado do ferramental matemáticos e computacional.

Segundo [ARAÚJO; MENDES; BASTOS, 2001], modelar processos e situações físicas significa identificar todos os fatores que fazem parte do cenário de desenvolvimento do produto ou acontecimento, entendendo seu inter-relacionamento e as reações no decorrer do tempo.

Sendo uma área de conhecimento multidisciplinar, é possível encontrar estudos envolvendo a modelagem computacional em contextos tão vastos quanto as engenharias, ciências exatas, biológicas, humanas e economia. A engenharia mecânica, por exemplo, utiliza diversos tipos de simulações computacionais para obter melhorias em máquinas, deslocamentos de fluidos, equipamentos, transferência de calor, entre outras.

O autor [DE FREITAS et al., 2015], busca algumas generalizações para a equação de Richards, que governa o fenômeno de infiltração da água, em meios porosos. Devido o uso do cálculo fracionário, torna-se necessário o uso de programas computacionais, para simular numericamente o problema, por isso o autor usou o método de diferenças finitas.

A transferência de calor também é uma área bem explorada na modelagem computacional. A própria ECV já foi utilizada como base em numerosos estudos. Dependendo do fenômeno que se deseja modelar, a simulação numérica se mostra bem mais eficiente e até mesmo menos trabalhosa do que buscar a solução analítica.

Em seu artigo, [MICKENS; JORDAN, 2004], utilizam um esquema de diferenças finitas não padrão, para um problema em uma haste sólida e fina, em que a condução de calor dentro dela é regida pela lei de Cattaneo-Vernotte. O autores realizam uma comparação entre a solução analítica e a numérica para finalizar as conclusões do artigo.

Em 2016, [DA SILVA, 2016] deu uma contribuição a esse estudo [MICKENS; JORDAN, 2004], mostrando-se que o método não-usual de DF, é usado para melhorar as taxas de convergência, recuperar as propriedades qualitativas, elimina as oscilações não lineares, conseguir estabilizar ou dar consistência.

A aplicação de soluções numéricas na ECV são extremamente abrangentes. Outro trabalho dedicado para tal estudo [CHEYUO, 2015], propôs uma ECV fracionária em um meio semi infinito médio. Além de resolver analiticamente, o autor utilizou um esquema de DF implícita para obter a solução numérica, e assim comparou as soluções.

A busca por modelar computacionalmente alguns dos problemas propostos nesse trabalho, traz mais consistência a pesquisa, abrindo o campo de aplicação até mesmo para equações não lineares ou/e com condições não lineares, visto que grande parte dos problemas reais, se enquadram nesse perfil e por isto possuem soluções analíticas extremamente difíceis de serem encontradas ou até mesmo impossíveis.

Foram definidos então alguns conceitos básicos para a implementação do método de (DF), para assim aplicá-lo em dois dos nossos problemas, tanto na forma deformada, quanto na forma inteira.

## 6.2 Série de Taylor

Seja  $f : (a, b) \times (0, T) \longleftrightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável até a ordem  $n + 1$  em  $(a, b)$  com  $\frac{\partial^{(n+1)}u}{\partial x^{(n+1)}}$  contínua em  $(a, b)$  e seja  $x \in (a, b)$ . Então existem um  $\epsilon \in (a, b)$  tal que [DE OLIVEIRA, 2016];

$$u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + \Delta x \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + \dots + \frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} u(x, t)}{\partial x^{n-1}} + \frac{\Delta x^n}{n!} \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial x^n} + O(\Delta x^{n+1}). \quad (6.1)$$

Onde o erro de Langrange é dado por:

$$O(\Delta x^{n+1}) = \frac{(\Delta x^{n+1})}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} u(\epsilon, t)}{\partial x^{n+1}}. \quad (6.2)$$

A Série de Taylor relaciona os valores da função e suas derivadas, num ponto  $x$ , com valores dessa mesma função numa vizinhança de  $x$ . Quando  $x = 0$ , chama-se de Série de Mac-Laurin.

## 6.3 Método de Diferenças Finitas

No método de DF, as derivadas são aproximadas pela diferença entre os valores das soluções discretas e as soluções são aproximadas, através da série de Taylor.

O método de DF discretiza as variáveis, deste modo, as derivadas existentes são substituídas. Usando-se a série de Taylor para calcular as soluções discretas da função. Calculando assim a diferença entre essas soluções, e substituindo as derivadas.

### 6.3.0.1 Diferença finita progressiva no tempo

Neste caso, o objetivo é encontrar o operador de diferenças progressivas para a derivada de primeira ordem no tempo, e para isto, desenvolve-se a série de Taylor. Neste

primeiro momento, sera considerado apenas até  $n = 1$  [DE OLIVEIRA, 2016].

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + O(\Delta t^2). \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + O(\Delta t). \quad (6.4)$$

Sabendo que  $O(\Delta t) := -\frac{O(\Delta t^2)}{\Delta t}$ .

Acima encontra-se a derivada temporal de 1º ordem, para encontrar a derivada de 2º ordem, mais uma vez expandindo a série de Taylor, porém até  $n = 3$ .

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} + O(\Delta t^4). \quad (6.5)$$

### 6.3.0.2 Diferença finita regressiva no tempo

Neste caso, o objetivo é encontrar o operador de diferenças regressivas para a derivada de primeira ordem no tempo, e para isto, será desenvolvida a série de Taylor, porém apenas até  $n = 1$  [DE OLIVEIRA, 2016].

$$u(x, t - \Delta t) = u(x, t) - \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + O(\Delta t^2). \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{u(x, t) - u(x, t - \Delta t)}{\Delta t} + O(\Delta t). \quad (6.7)$$

Sabendo que  $O(\Delta t) := -\frac{O(\Delta t^2)}{\Delta t}$ .

Assim como o que aconteceu acima, foi encontrado a derivada de ordem 1 no tempo. Novamente, expandindo-se a série de Taylor, até  $n = 3$ .

$$u(x, t - \Delta t) = u(x, t) - \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} + O(\Delta t^4). \quad (6.8)$$

### 6.3.0.3 Diferença finita centrada no tempo

Para derivada de segunda ordem no tempo encontra-se o operador de diferenças centradas, logo somando a eq.(6.5) e a eq.(6.8), tem-se:

$$u(x, t + \Delta t) + u(x, t - \Delta t) = 2u(x, t) + \Delta t^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + 2O(\Delta t^4). \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{u(x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \Delta t)}{\Delta t^2} + O(\Delta t). \quad (6.10)$$

Sabendo que  $O(\Delta t) := -\frac{2O(\Delta t^4)}{\Delta t^2}$ .

### 6.3.0.4 Diferença finita centrada no espaço

Para derivada de segunda ordem no espaço encontra-se o operador de diferenças centradas, considerando a série de Taylor desenvolvida até a quarta parcela, fazendo assim um truncamento em  $n = 3$  [DE OLIVEIRA, 2016].

#### Diferença finita progressiva no espaço

$$u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + \Delta x \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + O(\Delta x^4). \quad (6.11)$$

#### Diferença finita regressiva no espaço

$$u(x - \Delta x, t) = u(x, t) - \Delta x \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + O(\Delta x^4). \quad (6.12)$$

Para obter a diferença finita centrada basta somar a eq.(6.11) e a eq.(6.12).

$$u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) = 2u(x, t) + \Delta x^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + 2O(\Delta x^4). \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} + O(\Delta x). \quad (6.14)$$

Sabendo que  $O(\Delta x) := -\frac{2O(\Delta x^4)}{\Delta x^2}$ .

## 6.4 Modelagem numérica da equação de condução de calor clássica

Considerando o problema já resolvido analiticamente 2.14. Para igualar a notação acima, considerando  $T = u$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0 & t > 0; \\ u(x, 0) &= T_0 \text{sen} \left( \frac{\pi x}{l} \right) & x \in (0, l); \\ u_t(x, 0) &= 0, & x \in (0, l). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Para iniciar a equação de condução de calor será discretizada. Usam-se os operadores de diferenças finitas progressivas 6.4 e centradas 6.14, para a aproximação das derivadas de primeira ordem no tempo e segunda ordem no espaço. Obtendo então:

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = \alpha \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2}, \quad (6.16)$$

Com resíduos da ordem de  $O(\Delta t)$  e  $O(\Delta x)$ . A equação acima nos motiva a usar a seguinte notação para facilitar o entendimento.



$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \alpha \left[ \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right], \quad (6.17)$$

$$u_j^{n+1} = \alpha \Delta t \left[ \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right] + u_j^n, \quad (6.18)$$

Definindo  $\sigma = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ , tem-se:

$$u_j^{n+1} = (1 - 2\sigma)u_j^n + \sigma(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n). \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (6.19)$$

Com a eq.(6.19), tem-se um esquema numérico explícito, onde a solução no instante de tempo  $n + 1$ , depende apenas das soluções em passos de tempos anteriores. Fazendo as simulações numéricas no software Matlab, obtêm-se os seguintes resultados:

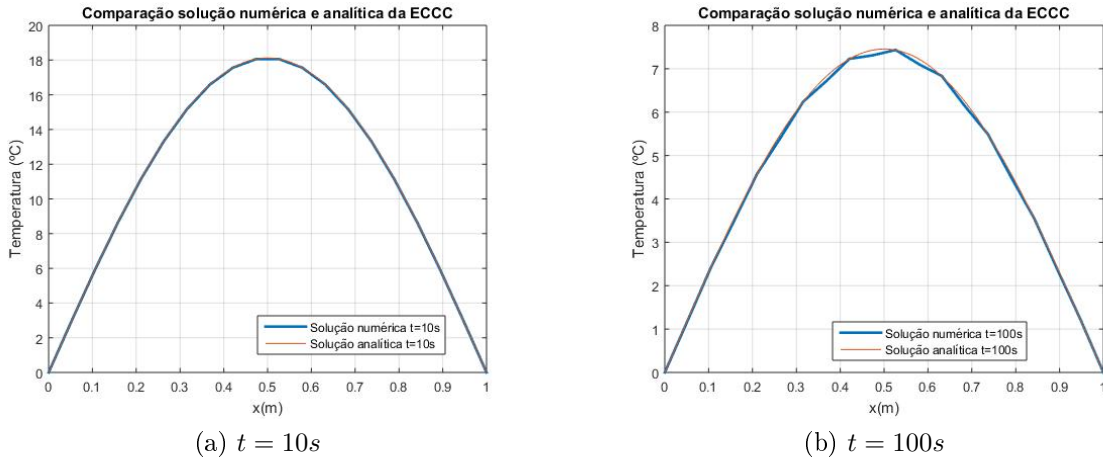


Figura 6.1: Análise comparativa da solução numérica e analítica, considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$  e  $T_0 = 20^\circ C$ .

Para obter a curva referente a solução numérica na figura 6.1a, foi considerado  $J + 1 = 20$  e  $N + 1 = 20$ , com isso nosso domínio foi um quadrado com  $J.N = 361$  pontos interiores. A figura 6.1b, foi mantido  $J + 1 = 20$ , porém como o tempo de observação escolhido foi maior, foi considerado então  $N + 1 = 50$ , e assim obtêm-se um retângulo como domínio com  $J < N = 931$  pontos interiores.

Os gráficos acima, deixam claro que o método escolhido (DF) é eficiente quando comparado com a solução analítica encontrada pela eq.(2.15). Concluí-se também, que ao ser aumentado o número de pontos interiores, como foi feito abaixo, mais precisa a curva se torna, porém o custo computacional eleva.

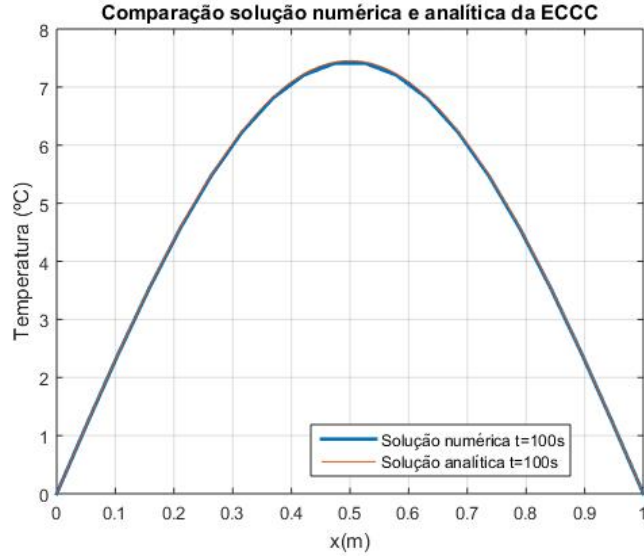


Figura 6.2: Análise comparativa da solução numérica e analítica, considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$ ,  $T_0 = 20^\circ C$ ,  $t = 100s$  e  $N = 99$ .

### 6.5 Modelagem numérica da equação de condução de calor deformada

Considerando o problema já resolvido analiticamente 5.14. Para igualar a notação acima, considerando  $T = u$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial t^\beta} &= \bar{\alpha} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \\
 u(0,t) &= u(l,t) = 0 & t > 0; \\
 u(x,0) &= T_0 \text{sen} \left( \frac{\pi x}{l} \right) & x \in (0,l); \\
 u_t^\beta(x,0) &= 0, & x \in (0,l).
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Aplicando a propriedade 6 de derivada deformada conforme, o problema 6.20 é reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 t^{1-\beta} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \bar{\alpha} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \\
 u(0,t) &= u(l,t) = 0 & t > 0; \\
 u(x,0) &= T_0 \text{sen} \left( \frac{\pi x}{l} \right) & x \in (0,l); \\
 t^{1-\beta} u_t(x,0) &= 0, & x \in (0,l).
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

erá feito a discretização do problema 6.21 de maneira análoga ao da seção anterior. Serão usados os operadores de diferenças finitas progressivas 6.4 e centradas 6.14 para a aproximação da derivada de primeira ordem no tempo e da derivada de segunda ordem no espaço, tem-se então:

$$t^{1-\beta} \frac{u(x,t + \Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} = \alpha \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x,t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2}, \tag{6.22}$$

Com resíduos da ordem de  $O(\Delta t)$  e  $O(\Delta x)$ . Será mantido o uso da notação usada na seção anterior, visando simplificar a escrita dos cálculos

$$t^{1-\beta} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \alpha \left[ \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right], \quad (6.23)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \alpha t^{\beta-1} \left[ \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right], \quad (6.24)$$

$$u_j^{n+1} = \alpha t^{\beta-1} \Delta t \left[ \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right] + u_j^n, \quad (6.25)$$

Definindo  $\sigma = \alpha t^{\beta-1} \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ . Recaindo na mesma solução encontrada na eq.(6.19), porém agora com um  $\sigma$  diferente do anterior:

$$u_j^{n+1} = (1 - 2\sigma)u_j^n + \sigma(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n). \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (6.26)$$

Com a eq.(6.26), tem-se um esquema numérico explícito, onde a solução no instante de tempo  $n + 1$ , depende apenas das soluções em passos de tempos anteriores. Fazendo as simulações numéricas no software Matlab, obtém-se o seguinte resultado:

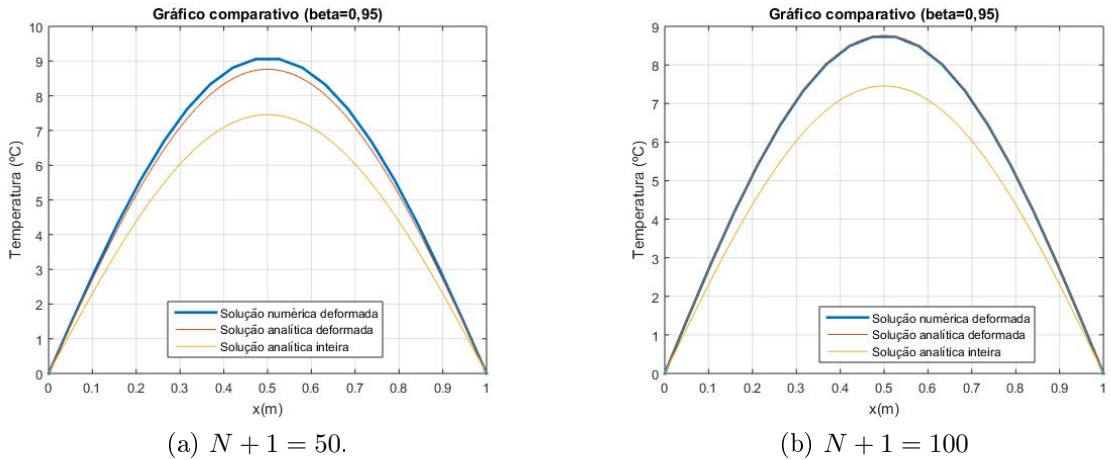


Figura 6.3: Análise comparativa das soluções numérica e analítica deformadas e a analítica inteira, considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$ ,  $T_0 = 20^\circ C$ ,  $t = 100s$  e  $\beta = 0.95$ .

Na figura 6.3, foi feito a comparação das três soluções obtidas para o problema de condução de calor clássico, que possui condições de contorno e condição inicial. Note que na figura 6.3a, utiliza-se apenas 931 pontos interiores, já em 6.3b tem-se 1881 pontos interiores. Chega-se a conclusão que, quanto mais pontos é considerado, mais precisa a curva que representa a solução numérica fica.

Duas curvas representam o problema 5.14, possuindo assim uma deformação na derivada temporal. A curva em vermelho é a nossa solução analítica deformada 5.24 e a azul é a solução aproximada feita pelo método de diferenças finitas 6.26. Note que

a solução analítica condiz aproximadamente com a numérica, mostrando assim que o método DF, é satisfatório.

Portanto, pode-se concluir que, mesmo com as derivadas deformadas embutidas no nosso problema, é possível aplicar métodos numéricos em nosso problema e obter uma solução que coincidem com a solução analítica.

Outra observação importante, é a diferença explícita entre essas duas curvas, que representam as soluções deformadas, e a curva amarela, que representa a solução analítica inteira. Para o valor do parâmetro de deformação escolhido, a diferença de temperatura ficou mais evidente.

Essa divergência, influencia no comportamento de muito fenômenos de natureza complexa. Justificando assim o uso do cálculo deformado em algumas situações. Para determinar de fato, quando o uso do cálculo deformado fornecerá resultados mais precisos, é necessária uma verificação com base em evidências experimentais.

Mas é claro que essas conclusões abrem caminhos para muitas outras pesquisas, uma delas é qual o valor do parâmetro de deformação que dever ser colocado em cada caso. Nosso trabalho tem como um de seus objetivos expor a funcionalidade dos métodos tradicionais, quando aplicados nesses problemas deformados. O aprofundamento de alguns tópicos terão que ser desenvolvidos em alguns outros trabalhos no futuro.

No momento, é possível ainda visualizar por meio do gráficos, que quanto mais nosso parâmetro de deformação fica próximo do valor 1, chega-se mais próximo da curva analítica de ordem inteira (como já foi mencionado nas análises feitas no capítulo 5).

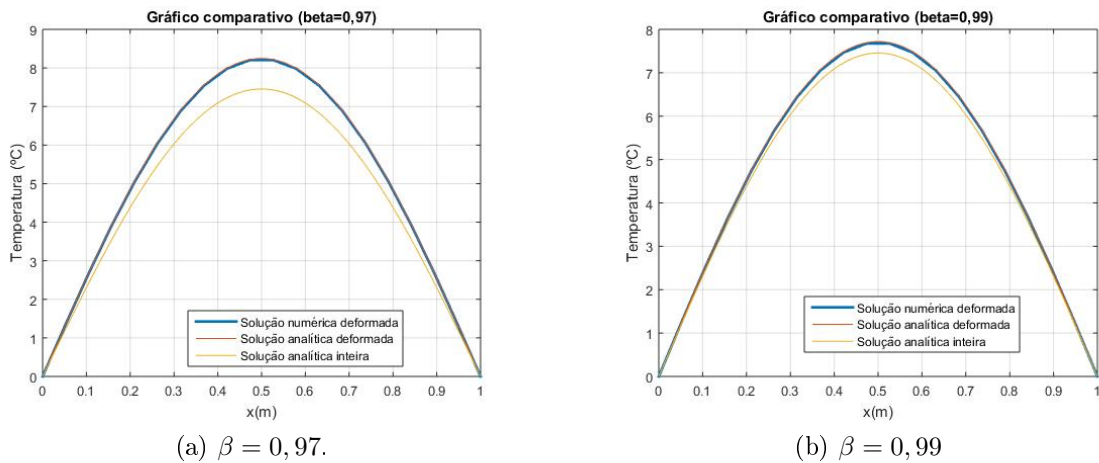


Figura 6.4: Análise comparativa das soluções numérica e analítica deformadas e a analítica inteira, considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$ ,  $T_0 = 20^\circ C$ ,  $t = 100s$ ,  $J + 1 = 20$  e  $N + 1 = 100$ .

### 6.6 Modelagem numérica da equação de Cattaneo-Vernotte clássica

Considerando o problema 3.18. Onde  $T = u$ .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \frac{\alpha}{\tau} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, & -0 < x < l, \\
u(0,t) = u(l,t) &= 0, & t > 0, \\
u(x,0) &= T_0 \text{sen} \left( \frac{\pi x}{l} \right), & x \in (0, l), \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 0, & x \in (0, l).
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Inicialmente, discretizando a ECV, assim como foi feito anteriormente para ECCC e ECCD. Para isso, será usado os operadores de diferenças finitas progressivas 6.4 e centradas 6.10 e 6.14.

$$\begin{aligned}
\frac{u(x,t+\Delta t) - 2u(x,t) + u(x,t-\Delta t)}{\Delta t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} &= \\
\frac{\alpha}{\tau} \frac{u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2}, &
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Com resíduos da ordem de  $O(\Delta t)$  e  $O(\Delta x)$ . A equação acima nos motiva a usar a seguinte notação para facilitar o entendimento.

$$\left[ \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} \right] + \frac{1}{\tau} \left[ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right] = \frac{\alpha}{\tau} \left[ \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right], \tag{6.29}$$

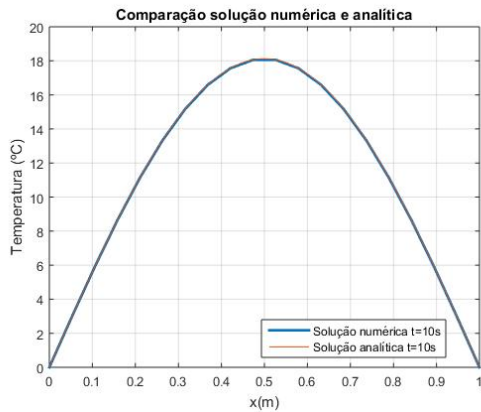
$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = -\frac{\Delta t^2}{\tau} \left[ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right] + \Delta t^2 \frac{\alpha}{\tau} \left[ \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right], \tag{6.30}$$

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} - \frac{u_j^{n+1} \Delta t}{\tau} + \frac{u_j^n \Delta t}{\tau} + \Delta t^2 \frac{\alpha}{\tau} \left[ \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right], \tag{6.31}$$

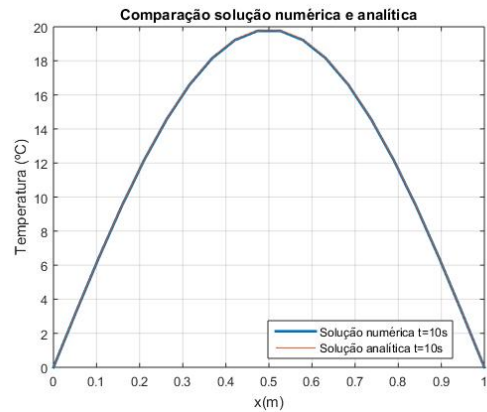
$$u_j^{n+1} \left( 1 + \frac{\Delta t}{\tau} \right) = \left( 2 + \frac{\Delta t}{\tau} \right) u_j^n - u_j^{n-1} + \Delta t^2 \frac{\alpha}{\tau} \left[ \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right], \tag{6.32}$$

$$u_j^{n+1} = \frac{\left( 2 + \frac{\Delta t}{\tau} \right) u_j^n - u_j^{n-1} + \Delta t^2 \frac{\alpha}{\tau} \left[ \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right]}{\left( 1 + \frac{\Delta t}{\tau} \right)}. \tag{6.33}$$

Com a eq.(6.33), tem-se um esquema numérico explícito, onde a solução no instante de tempo  $n + 1$ , depende apenas das soluções em passos de tempos anteriores. Fazendo as simulações numéricas no software Matlab, obtém-se os seguintes resultados:



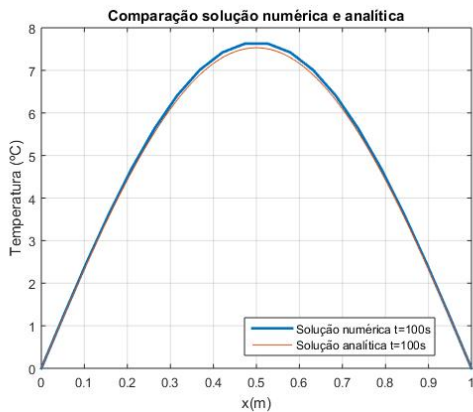
(a)  $\tau = 10s$ .



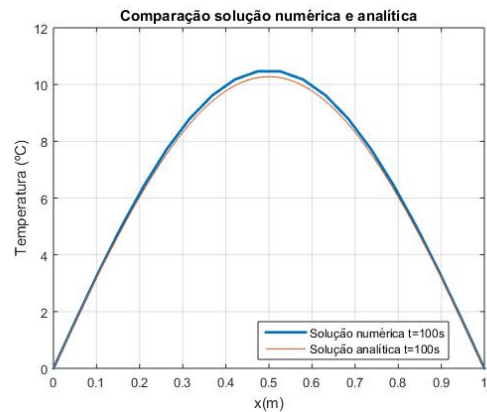
(b)  $\tau = 50s$

Figura 6.5: Análise comparativa das soluções numérica e analítica da equação de Cattaneo-Vernotte, considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$ ,  $T_0 = 20^\circ C$  e  $t = 10s$ .

Na figura 6.5, nas curvas considerando o  $t = 10s$ , é possível visualizar que nos gráficos as curvas parecem ser iguais.



(a)  $\tau = 10s$ .



(b)  $\tau = 50s$

Figura 6.6: Análise comparativa das soluções numérica e analítica da equação de Cattaneo-Vernotte, considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$ ,  $T_0 = 20^\circ C$  e  $t = 100s$ .

Para obter a curva referente a solução numérica na figura 6.5, foi considerado, outra vez,  $J + 1 = 20$  e  $N + 1 = 20$ . Na figura 6.6, foi escolhido, novamente,  $N + 1 = 50$ , vendo que o tempo considerado foi de 100 segundos.

A medida que é considerado esse valor para o tempo, uma pequena diferença nas soluções aparece. Em valores de  $x$  próximos do meio da superfície, essa diferença é um pouco mais evidente, quando considera-se  $\tau = 50s$ .

Os gráficos acima, deixam claro que o método escolhido (DF) é eficiente quando comparado com a solução analítica encontrada pela eq.(3.21). Nota-se também, que a medida que o tempo aumenta, existe um pequena diferença entre os gráficos, que pode ser facilmente resolvida, se o número de pontos interiores na discretização for aumentado.

## 6.7 Modelagem numérica da equação de Cattaneo-Vernotte deformada

Considerando o problema 5.49. Onde  $T = u$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} + \frac{\tau^\beta}{\beta} \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} \frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} &= \bar{\alpha} \nabla^2 u \quad 0 < x < 1, \\ u(0, t) = u(l, t) &= 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= T_0 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{l} \right), \\ u_t^\beta(x, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Antes de começar a discretização, será aplicada a propriedade 6, na equação deformada.

$$t^{1-\beta} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^\beta}{\beta} \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} \left[ t^{1-\beta} \frac{\partial u}{\partial t} \right] = \bar{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6.35)$$

$$t^{1-\beta} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^\beta}{\beta} (1-\beta) t^{1-2\beta} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^\beta}{\beta} t^{2-2\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \bar{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6.36)$$

Para facilitar a aplicação do método de diferenças finitas, será considerado  $\gamma_1 = t^{1-\beta}$ ,  $\gamma_2 = \frac{\tau^\beta}{\beta} (1-\beta) t^{1-2\beta}$  e  $\gamma_3 = \frac{\tau^\beta}{\beta} t^{2-2\beta}$ . Tem-se então:

$$(\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma_3 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \bar{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6.37)$$

Substituindo as derivadas pelos operadores de diferenças finitas progressivas 6.4 e centradas 6.10 e 6.14. Tem-se que:

$$\begin{aligned} (\gamma_1 + \gamma_2) \left[ \frac{u(x, t+\Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} \right] + \gamma_3 \left[ \frac{u(x, t+\Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t-\Delta t)}{\Delta t^2} \right] = \\ \bar{\alpha} \left[ \frac{u(x+\Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x-\Delta x, t)}{\Delta x^2} \right], \end{aligned} \quad (6.38)$$

Com resíduos da ordem de  $O(\Delta t)$  e  $O(\Delta x)$ . Reescrevendo a equação acima, de maneira mais simplificada.

$$(\gamma_1 + \gamma_2) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \gamma_3 \left[ \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} \right] = \bar{\alpha} \left[ \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right], \quad (6.39)$$

$$\gamma_3 u_j^{n+1} - 2\gamma_3 u_j^n + \gamma_3 u_j^{n-1} = -(\gamma_1 + \gamma_2) \Delta t (u_j^{n+1} - u_j^n) + \bar{\alpha} \Delta t^2 \left[ \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right], \quad (6.40)$$

$$\gamma_3 u_j^{n+1} = 2\gamma_3 u_j^n - \gamma_3 u_j^{n-1} - (\gamma_1 + \gamma_2) \Delta t u_j^{n+1} + (\gamma_1 + \gamma_2) \Delta t u_j^n + \bar{\alpha} \Delta t^2 \left[ \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right], \quad (6.41)$$

$$u_j^{n+1} = \frac{(2\gamma_3 + (\gamma_1 + \gamma_2)\Delta t)u_j^n - \gamma_3 u_j^{n-1} + \bar{\alpha}\Delta t^2 \left[ \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right]}{(\gamma_3 + (\gamma_1 + \gamma_2)\Delta t)}, \quad (6.42)$$

Com a eq.(6.42), obtém-se um esquema numérico explícito, onde a solução no instante de tempo  $n + 1$ , depende apenas das soluções em passos de tempos anteriores. Fazendo as simulações numéricas no software Matlab, obtém-se os seguintes resultados:

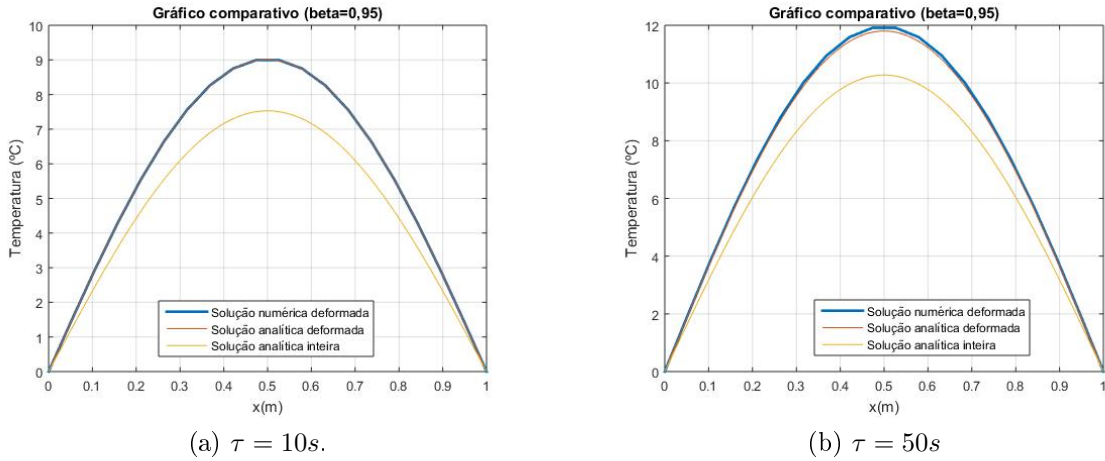


Figura 6.7: Análise comparativa das soluções numérica, analítica deformada e a analítica inteira, considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$ ,  $T_0 = 20^\circ C$ ,  $t = 100s$  e  $\beta = 0,95$ .

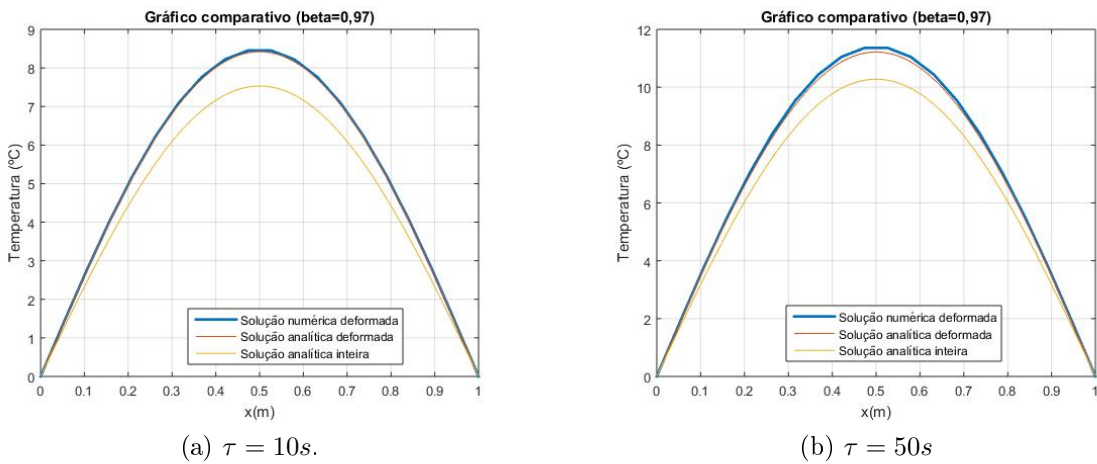
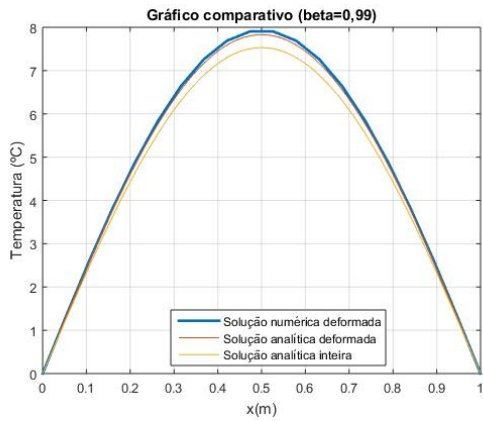
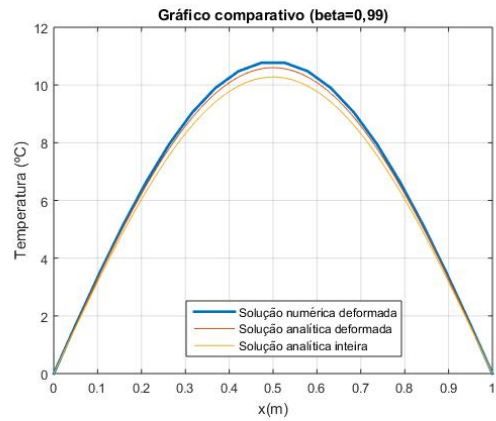


Figura 6.8: Análise comparativa das soluções numérica, analítica deformada e a analítica inteira, considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$ ,  $T_0 = 20^\circ C$ ,  $t = 100s$  e  $\beta = 0,97$ .





(a)  $\tau = 10s$ .



(b)  $\tau = 50s$

Figura 6.9: Análise comparativa das soluções numérica, analítica deformada e a analítica inteira, considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$ ,  $T_0 = 20^\circ C$ ,  $t = 100s$  e  $\beta = 0,99$ .

Assim como nas subseções acima, as curvas que representam a solução numérica deformada (6.42) e a solução analítica deformada (5.74), estão bem próximas, principalmente quando  $\tau = 10s$ .

Nas figuras, 6.7, 6.8 e 6.9, foram feitas as comparações das três soluções obtidas para o problema regido pela equação de Cattaneo-Vernotte (3.18, 5.49, 6.34).

A curva em vermelho corresponde a solução do problema na sua forma deformada feito pelo método de separação de variáveis. A curva em azul, é o mesmo problema deformado, porém ao invés de resolvido analiticamente, foi utilizado o método de diferenças finitas, e assim obtém-se uma solução numérica.

Note que, como esperado a solução analítica e numérica do modelo deformado, tende a coincidir, a medida que é considerado mais pontos interiores.

A terceira curva presente nas figuras (em amarelo), corresponde ao problema de Cattaneo-Vernotte, na versão usual. Ela possui uma diferença maior em relação as outras, devido a escolha do parâmetro de deformação. Porém, na figura 6.9 essa diferença diminui devido a proximidade do valor escolhido para  $\beta$  de 1.

Novamente o método numérico coincide com as soluções analíticas encontradas, e mostra que o cálculo deformado pode nos fornecer resultados um pouco diferentes do cálculo usual. Algo que, quando comparado com dados experimentais, pode se ajustar melhor a estes, fornecendo uma modelagem mais precisa de alguns fenômenos físicos.

## 7 CÁLCULO VARIACIONAL DEFORMADO

### 7.1 Cálculo Variacional

Neste capítulo será apresentado um método variacional capaz de obter as equações de Euler Lagrange, que descrevem a dinâmica de condução de calor. O cálculo variacional clássico não permite tratar adequadamente sistemas não conservativos.

Foi proposto funcionais de ação para um problema variacional, com derivadas deformadas embutidas na função lagrangiana  $L$ , permitindo lidar com sistemas conservativos e não conservativos. Esse formalismo abrange a mecânica quântica e clássica, sistemas complexos e teoria de campo.

Nessa abordagem, considera-se um sistema variacional que envolve derivadas deformadas locais, tais como a derivada conforme, a derivada de Hausdorff, a de Katugampola ou  $q$ -derivada. Podendo assim generalizar o problema por uma lagrangiana que depende também da maior ordem da derivada deformada.

### 7.2 Abordagem Variacional com derivadas embebidas

Foram usadas duas abordagens para encontrar as equações de condução de calor de Fourier e não Fourier, clássicas e deformadas.

A primeira foi proposta no trabalho [LEOPOLDINO et al., 2019], onde o autor considera um problema variacional, com derivadas estruturais chamadas de Hausdorff, que em alguns casos são equivalentes a derivada deformada conforme.

Considerando um funcional com derivadas deformadas:

$$J[y] = \int_a^b L(x, y, D_x^1 y, D_x^\beta y, D_x^\beta (D_x^1 y)) dx$$

O processo  $\delta$ -variacional é usual. Note que, no intervalo  $[a, b]$  o funcional e a forma intervalar tem derivada deformada.

Para encontrar a equação estendida de Euler-Lagrange, introduzindo a seguinte equação  $\beta$ -deformada no funcional  $J[y]$ , e assim encontrar a condição para que  $J[y]$  tenha mínimo local.

Considerando um novo funcional deformado dependente do parâmetro  $\epsilon$ , e a variável dependente  $y(x)$ :

$$y(x) = y * (x) + \epsilon \eta(x), \tag{7.1}$$

Onde  $y * (x)$  é a função objetivo,  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  e  $\epsilon$  é um parâmetro. Aplicando

as derivadas deformada e usual na eq.(7.1):

$${}_{\beta}D_x^{\beta}y(x) = {}_{\beta}D_x^{\beta}y * (x) + \epsilon_{\beta}D_x^{\beta}\eta(x), \quad (7.2)$$

$$D_x^1y(x) = D_x^1y * (x) + \epsilon D_x^1\eta(x), \quad (7.3)$$

$${}_{\beta}D_x^{\beta}(D_x^1y(x)) = {}_{\beta}D_x^{\beta}(D_x^1y * (x)) + \epsilon_{\beta}D_x^{\beta}(D_x^1\eta(x)), \quad (7.4)$$

onde  ${}_{\beta}D_x^{\beta}\eta(x) = (x - \beta)^{1-\beta} \frac{d\eta(x)}{dx}$  e  $D_x^1 = \frac{dx}{dt}$ . Usando a regra da cadeia e o processo  $\delta$ -variacional relativo ao parâmetro, tem-se:

$$\delta_{\epsilon}L = \frac{\partial L}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial L}{\partial(D_x^1y)}D_x^1\eta(x) + \frac{\partial L}{\partial({}_{\beta}D_x^{\beta}y)}D_x^{\beta}\eta(x) + \frac{\partial L}{\partial({}_{\beta}D_x^{\beta}(D_x^1y))}D_x^{\beta}(D_x^1\eta(x)) \quad (7.5)$$

A integração por parte é realizada com a integral deformada de maneira similar ao caso inteiro, e usando a condição de transversalidade usual para um valor extremo. Obtém-se que  $\delta_{\epsilon} = 0$ . Fazendo os devidos cálculos, foi obtida uma versão estendida para equação de Euler-Lagrange.

$$\frac{\partial L}{\partial y} - D_x^1y \left( \frac{\partial L}{\partial(D_x^1y)} \right) - D_x^1 \left[ (x - a)^{1-\beta} \frac{\partial L}{\partial({}_{\beta}D_x^{\beta}y)} \right] + D_x^2 \left[ (x - \beta)^{1-\beta} \frac{\partial L}{\partial({}_{\beta}D_x^{\beta}(D_x^1y))} \right] = 0. \quad (7.6)$$

Os cálculos para obtenção da equação acima (7.2), também foram expostos no artigo submetido [LEOPOLDINO et al., 2019].

Uma outra abordagem que pode ser utilizada é considerando a opção 1 do [WEBERSZPIL; HELAYËL-NETO, 2016], onde assumi-se:  $\beta$ -integral,  $\delta$  usual, derivada deformada conforme embutida. Nesta abordagem será utilizado uma densidade lagrangiana.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, D_t^{\beta}\phi, \partial_x\phi). \quad (7.7)$$

**Densidade lagrangiana:** Em geral, é a função do campo, de suas derivadas temporais e espaciais.

**Princípio Hamiltoniano:** Este princípio garante que a ação estacionária com relação as variações infinitesimais dos campos, deixam os valores dos campos, nos instantes iniciais e finais, invariantes, isto é:  $\phi(x, t_1) = \phi_1(x)$  e  $\phi(x, t_2) = \phi_2(x)$ . Assim tem-se que  $\delta\phi(t_1, x) = \delta\phi(t_2, x) = 0$ . Por outro lado, limita-se o sistema, de modo que o deslocamento dos pontos finais deve ser zero. Ou de outro modo, os campos se anulam na superfície,

no infinito. Assim:  $\delta\phi(x, t) = 0$  para  $x = -\infty$  ou  $x = \infty$ . Considerando  $\delta S = 0$ , tem-se:

$$\delta S = S[\phi(x, t) + \delta\phi(x, t) - S[\phi(x, t)]] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} \delta\mathcal{L} dx \quad (7.8)$$

Calculando  $\delta\mathcal{L}$ .

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} + \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\delta\dot{\phi}}_{\text{(I)}} + \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\phi)}\delta\partial_x(\phi)}_{\text{(II)}}, \quad (7.9)$$

$$(I) \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \frac{\partial\delta\dot{\phi}}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\delta\dot{\phi}}_{\text{(A)}} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \right) \delta\dot{\phi}, \quad (7.10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\phi)} \frac{\partial}{\partial x} (\delta\phi) = \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\phi)}\delta\phi}_{\text{(B)}} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\phi)} \right) \delta\phi,$$

Pelo princípio hamiltoniano, tem-se que A e B são nulos.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\phi)} \right) \right] = 0. \quad (7.11)$$

Pelo lema fundamental do cálculo variacional obtém-se versão estendida da equação de Euler-Lagrange para sistema contínuo.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\phi)} \right) = 0 \quad (7.12)$$

Considerando agora que  $t \rightarrow t^{\beta-1}$  na integral imprópria de Riemann, tem-se:

$$S_\beta = \int_{t_1}^{t_2} t^{\beta-1} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{L}(\phi, D_t^\beta \phi, \partial_x \phi), \quad (7.13)$$

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(D_t^\beta \phi)} \delta(D_t^\beta \phi)}_{\text{III}} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x \phi)} \delta(\partial_x \phi), \quad (7.14)$$

Como apenas o termo (III) é diferente do caso anterior, refazendo as contas apenas para este.

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(D_t^\beta \phi)} D_t^\beta (\delta\phi) t^{\beta-1} dt \quad (7.15)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(D_t^\beta \phi)} t^{1-\beta} \frac{\partial}{\partial t} (\delta\phi) t^{\beta-1} dt \quad (7.16)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_t^\beta \phi)} \right) \delta \phi \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_t^\beta \phi)} \right) dt \quad (7.17)$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} t^{1-\beta} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_t^\beta \phi)} \right) t^{\beta-1} \right] dt \quad (7.18)$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} D_t^\beta \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_t^\beta \phi)} \right] dt_\beta, \quad (7.19)$$

Assim, tem-se:

$$\delta S_\beta = \int_{t_1}^{t_2} dt_\beta \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - D_t^\beta \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_t^\beta \phi)} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \phi)} \right) \right] = 0. \quad (7.20)$$

Pelo lema fundamental do cálculo variacional:

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - D_t^\beta \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_t^\beta \phi)} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \phi)} \right) \right] = 0. \quad (7.21)$$

A eq.(7.21) é uma outra versão estendida da equação de Euler-Lagrange.

Ao incluir campos independentes auxiliares na densidade lagrangiana, e seguindo o mesmo procedimento variacional, obtém-se duas equações de Euler-Lagrange, uma para cada campo. A lagrangiana proposta fica dependente dos campos e de suas derivadas, incluindo o auxiliar.

Com os resultados de equações de Euler-Lagrange estendidas nesta seção, serão propostas algumas lagrangianas e obter suas respectivas equações diferenciais parciais.

### 7.3 Equação de Condução de Calor Clássica

Pode-se mostrar que é possível obter a conhecida equação de Fourier por meio do cálculo variacional deformado. Para alcançar isto, considerando a lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2} ({}_a D_t^{\frac{1}{2}} T)^2 - \frac{1}{2} (\alpha \nabla T)(\nabla T), \quad (7.22)$$

A equação de E-L resulta em:

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} - (t-a) \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0; \quad (7.23)$$

Agora considerando  $a \rightarrow t$ , e assim, obtém-se a ECCC.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \quad (7.24)$$

## 7.4 Equação de Condução de Calor Deformada

Considerando a densidade lagrangiana representada com derivadas deformadas temporais:

$$\mathcal{L}_F = T^* D_t^\beta T + \bar{\alpha} \nabla T \nabla T^*, \quad (7.25)$$

A densidade lagrangiana proposta acima possui um campo de temperatura auxiliar  $T^*$ , que nos fornece duas equações de EL. Note que a lagrangiana acima depende dos campos e de suas derivadas. As equações de E-L 7.21 resultam em:

$$D_t^\beta T = \bar{\alpha} \nabla^2 T \quad (7.26)$$

$$D_t^\beta T^* = -\bar{\alpha} \nabla^2 T^* \quad (7.27)$$

O sinal de menos no termo do lado direito pode ser interpretado como uma relação com a parte externa do sistema. Como o sistema é aberto, existe um fluxo de calor do sistema para a linha de fronteira. Esse fluxo, por sua vez, vai para a região exterior da fronteira.

## 7.5 Equação de Cattaneo-Vernotte

Assim como a ECCC, a ECV também pode ser obtida pelo processo variacional deformado. Para isto, considera-se a lagrangiana abaixo:

$$L = \frac{1}{2} ({}_a D_t^{\frac{1}{2}} T)^2 - \frac{1}{2} (\alpha \nabla T) (\nabla T) + \frac{1}{2} \left( \tau \frac{\partial T}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right), \quad (7.28)$$

A equação de E-L 7.2 resulta em:

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{\partial T}{\partial t} - (t - a) \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0, \quad (7.29)$$

Fazendo  $a \rightarrow t$  tem-se;

$$\tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (7.30)$$

Obtém-se então a equação acima, que é a ECV.

## 7.6 Equação de Cattaneo-Vernotte Deformada

Nessa seção, foi obtido através do método variacional aqui proposto a equação de Cattaneo-Vernotte deformada no tempo. Para encontrar uma equação de Cattaneo-Vernotte deformada, considerando a densidade lagrangiana abaixo:

$$\mathcal{L}_F = \tau(D_t^\beta T)(D_t^\beta T^*) - T^* \frac{D_t^\beta T}{2} + T D_t^\beta T^* - \bar{\alpha}(\nabla T)(\nabla T^*), \quad (7.31)$$

A equação de E-L resulta em:

$$\tau D_t^\beta D_t^\beta T + D_t^\beta T = \bar{\alpha} \nabla^2 T. \quad (7.32)$$

E para o campo complementar de temperatura.

$$\tau D_t^\beta D_t^\beta T^* - D_t^\beta T^* = \bar{\alpha} \nabla^2 T^*. \quad (7.33)$$

Assim como na equação de condução de calor deformada, surge uma interpretação semelhante para o sinal de menos que surge no segundo termo do lado esquerdo. Estando relacionado com a parte externa do sistema.

Mais uma vez, existe o fluxo de calor do sistema indo para uma região exterior da fronteira, justificando assim o uso do sinal. Provavelmente, existem outras interpretações do campo auxiliar e este sinal de menos. Mas, aqui o foco está na equação de Cattaneo-Vernotte deformado pelo tempo, eq. (7.6).

Este capítulo foi de extrema importância neste trabalho. Pois com o uso do cálculo variacional, foi possível encontrar as equações deformadas abordadas em toda essa pesquisa. Sendo, até certo ponto, resultados inovadores, já que se obtêm as equações de calor deformadas no tempo com uma abordagem variacional deformada, e não simplesmente colocando à mão as derivadas deformadas nas equações originais de calor.

Esse estudo, deu origem a uma contribuição em um artigo, cujo título é *Discussing the Extension and Applications of a Variational Approach with Deformed Derivatives*, e foi submetido este ano à revista *Journal of Mathematics and Physics*. Este artigo traz diversos modelos físicos, com suas equações obtidas através do método variacional.

## 8 CONCLUSÃO

### 8.1 Considerações

No capítulo sobre a teoria de Fourier para condução de calor 2, inicia-se este trabalho, com uma explanação sobre a condução de calor descrita pela lei de Fourier. Apresenta-se algumas características históricas e como a equação de condução de calor clássica foi proposta. Foram destacadas sua importância e aplicações, assim como as inconsistências existentes no modelo.

Ainda neste capítulo, apresenta-se as soluções analíticas de dois modelos regidos pela ECCC, resolvidos por meio de dois métodos diferentes. Foram fornecidos gráficos e feito as interpretações relacionando com a física do problema.

Após destacar-se as falhas presentes na equação proposta por Fourier, o capítulo seguinte 3, aborda a teoria não Fourier para condução de calor. Foram explicitados três modelos, encontrados na literatura, que surgiram para sanar as inconsistências presentes na ECCC. Com um enfoque maior no modelo de Cattaneo-Verotte, escolhido como principal fonte de estudo para o trabalho.

Assim como a equação de Fourier, o modelo também apresenta alguns problemas físicos, os quais foram feitos alguns comentários, destacando situações onde o torna incapaz de fornecer uma interpretação completa e eficiente. Ainda no capítulo 3, apresentam-se as soluções analíticas de dois problemas regidos pela ECV, estas foram obtidas por meio de dois métodos de solução diferentes. Sendo que um deles, se baseou na aplicação em uma carne processada.

O capítulo 4, foi dedicado a explicação do cálculo deformado e sua motivação. Justificou-se o uso das derivadas deformadas em diversas situações, assim como, apresentou-se diferentes tipos dessas derivadas deformadas e suas interpretações e conexões. Apesar da derivada deformada conforme ter sido escolhida para dar continuidade ao trabalho. Foi observado nesta pesquisa, que esta possui uma íntima relação com a derivada de Hausdorff, além de ser um caso especial da derivada deformada conformável geral.

Destaca-se também a  $q$ -derivada, proposta por Tsallis, que é muito importante em mecânica estatística, e que existe o interesse em aplicá-las nas ideias abordadas nesta dissertação, em trabalhos futuros.

As soluções analíticas deformadas foram apresentadas no capítulo 5. Nele foram abordadas todos os métodos utilizados nos capítulos anteriores, porém com a derivada deformada conforme presente nas equações. Constatou-se que mesmo com a modificação da álgebra do problema, o ferramental matemático utilizado anteriormente foi eficiente.

Foram realizadas as comparações gráficas das soluções analíticas deformadas obtidas com as soluções analíticas usuais, e constatou-se que ao serem escolhidos valores para



$\beta$  bem menores do que 1, os gráficos apresentam variações maiores quando comparados com a solução usual. Fazendo as interpretações, concluí-se que em materiais com estruturas mais complexas, a condução de calor ocorre com mais dificuldade, tratando-se de um isolamento térmico.

Destaca-se ainda diversos exemplos onde esse estudo pode ser aplicado. Como para verificar como ocorre a condução de calor em materiais desgastados, corroídos, porosos, com geometria irregular, fractais.

Para solidificar os resultados, o capítulo 6 expõe um método numérico para a obtenção de um dos problemas regido pela ECCC, e de um dos problemas regido pela ECV. O método computacional de diferenças finitas, forneceu resultados gráficos, muito semelhantes do encontrado pela soluções analíticas. Tanto nos casos onde consideram-se as equações na sua forma usual, quanto quando consideram-se as equações deformadas.

O capítulo 7, utiliza o cálculo variacional para obter as equações abordadas por esta pesquisa. Assim como nos capítulos 2 e 3, que foram obtidas as equações usuais de Fourier e de Cattaneo-Vernotte, neste capítulo essas equações foram obtidas porém, através de um método variacional. As equações na forma deformada também foram encontradas. Fazendo com que não fosse mais necessário introduzir as derivadas deformadas diretamente nas equações usuais.

### 8.1.1 Considerações Finais

Nesta dissertação, estudaram-se equações de condução de calor em que as derivadas foram deformadas para formas de operadores locais. Foram obtidas as soluções analíticas e numéricas para as equações de Fourier e Cattaneo-Vernotte deformadas.

As soluções analíticas encontradas para cada problema abordado, para a ECCC, possuem interpretação física.

No caso, da ECV, a primeira solução proposta, que foi por solução tentativa, apesar de possuir resultados com interpretações físicas distintas, pode ainda ser aprimorada, através da mudança das condições de contorno. Porém, a solução encontrada pelo método de separação de variáveis, está coerente e indica ser capaz de modelar o problema físico.

A partir da releitura das equações que descrevem a dinâmica de condução de calor, através de deformações nas derivadas, os parâmetros de deformação sinalizam a influência nos resultados e soluções.

Ao considerar-se o estudo de equações com derivadas locais deformadas, o parâmetro de deformação possui a capacidade de captar características da heterogeneidade presentes em todo o domínio do sólido considerado. Algo de extrema importância, quando trabalha-se com materiais porosos, corroídos, fissurados e/ou fractais, com geometria complexa. Ao modelar-se sistemas complexos com os operadores de derivadas tradicionais, os resultados podem não descrever adequadamente, nos casos aqui estudados, a dinâmica de

condução de calor.

Ao modelar as equações propostas usando a derivada deformada, chega-se a conclusão que, para os valores menores de  $\beta$ , o material aparenta ser um pior condutor de calor. Nesse contexto, várias aplicações são possíveis, e uma delas é para verificar se um determinado material está desgastado, e qual o nível deste desgaste.

Foram escolhidos dois modelos, resolvidos analiticamente, para implementar computacionalmente suas soluções numéricas. Como não foram fornecidos dados experimentais, um modelo numérico faz-se necessário, para a validação do resultados obtidos. Em ambos os casos, as curvas obtiveram resultados bem próximos. Para obter uma precisão maior, basta aumentar o número de pontos internos considerados.

Este trabalho fornece também, um método variacional capaz de lidar com sistemas dissipativos. Com esse método foi possível obter as equações de condução de calor com e sem derivadas deformadas. Solidificando a pesquisa, pois dessa forma, não é mais necessário que se coloque na "mão" as derivadas deformadas nas equações.

Além da obtenção pelo cálculo variacional, o trabalho ainda apresentou outras duas maneiras de obtenção dessas equações deformadas, a primeira foi através da expansão de Taylor deformada, que nos forneceu a equação de Cattaneo-Vernotte na sua forma deformada. A segunda foi por meio de integração direta, com a substituição do núcleo de integração, neste caso, obteve-se uma equação da onda deformada [E](#).

## 8.2 Trabalhos futuros

O estudo aqui realizado, no nosso entender, abre perspectivas futuras para o uso do ferramental matemático aqui apresentado. Nesse sentido, pode-se elencar algumas possibilidades futuras e aprimoramentos. Dentre elas, é possível citar algumas:

- O aprimoramento da solução analítica tentativa da equação de Cattaneo-Vernotte deformada, sendo consideradas outras condições de contorno talvez;
- Uma aplicação das soluções analíticas obtidas neste trabalho em materiais industriais, visando realizar uma espectroscopia térmica nesses materiais.
- O estudo de derivadas deformadas em equações de condução de calor não lineares, com o uso adicional de métodos computacionais mais robustos.
- Uma aplicação dos diferente tipos de derivadas deformadas na difusão em solos, obtendo assim, através de dados experimentais, as soluções que mais se aproximam da realidade.
- Uso de outras derivadas deformadas, tal como a q-derivada, no contexto da mecânica estatística não aditiva, para estudar os fenômenos de condução de calor, dentre outros.

- A verificação experimental dos modelos aqui proposto e outros. Uma possibilidade é o uso desses modelos para a implementação de espectroscopias térmicas mais sensíveis, incluindo a carne processada.

## 9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABDELJAWAD, T. On conformable fractional calculus. *Journal of computational and Applied Mathematics*, v. 279, p. 57–66, 2015.
- ARAÚJO, C. S.; MENDES, L. A. G.; BASTOS, d. L. Modelagem do desenvolvimento de produtos: caso embraer–experiência e lições aprendidas. In: *Congresso brasileiro de gestão de desenvolvimento de produto*. [S.l.: s.n.], 2001.
- ASKARIZADEH, H.; AHMADIKIA, H. Analytical analysis of the dual-phase-lag heat transfer equation in a finite slab with periodic surface heat flux. *IJE Trans. C: Aspects*, v. 27, n. 6, p. 971–978, 2014.
- AURIAULT, J. L. Cattaneo–Vernotte equation versus fourier thermoelastic hyperbolic heat equation. *International Journal of Engineering Science*, v. 101, p. 45–49, 2016.
- BALANKIN, A. S. Mapping physical problems on fractals onto boundary value problems within continuum framework. *Physics Letters A*, v. 382, n. 4, p. 141–146, 2018.
- BALANKIN, A. S.; ELIZARRARAZ, B. E. Hydrodynamics of fractal continuum flow. *Physical Review E*, v. 85, n. 2, 2012.
- BALANKIN, A. S.; ELIZARRARAZ, B. E. Map of fluid flow in fractal porous medium into fractal continuum flow. *Physical Review E*, v. 85, n. 5, 2012.
- BARNA, I. F.; KERSNER, R. Heat conduction: a telegraph-type model with self-similar behavior of solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 43, n. 37, 2010.
- BIAZAR, J.; ESLAMI, M. Analytic solution for telegraph equation by differential transform method. *Physics Letters A*, v. 374, n. 29, p. 2904–2906, 2010.
- BIOT, J. B. Memoire sur la propagation de la chaleur. *Bibliothèque Britannique*, v. 37, p. 310–329, 1804.
- BORGES, E. P. A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 340, n. 1-3, p. 95–101, 2004.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. *Elementary differential equations and boundary value problems*. [S.l.]: Wiley New York, 1992.
- CATTANEO, C. Sur une forme de l'équation de la chaleur eliminant la paradoxe d'une propagation instantantee. *Compt. Rendu*, v. 247, p. 431–433, 1958.
- CHEN, H.-T.; LIU, K.-C.; XU, X.-J.; LIN, T.-H. Analytical study for the estimation of thermal properties of processed meat based on hyperbolic heat conduction model. *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 25, n. 1, p. 41–56, 2017.
- CHEN, W. Time-space fabric underlying anomalous diffusion. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 28, n. 4, p. 923–929, 2006.

- CHEN, W.; WANG, F.; ZHENG, B.; CAI, W. Non-Euclidean distance fundamental solution of Hausdorff derivative partial differential equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 84, p. 213–219, 2017.
- CHEYUO, B. D. *Numerical solution to fractional Cattaneo heat equation in a semi-infinite medium*. Tese (Doutorado) — Kwame Nkrumah University of science and technology, 2015.
- CHOI, J. H.; YOON, S.-H.; PARK, S. G.; CHOI, S.-H. Analytical solution of the Cattaneo-Vernotte equation (non-fourier heat conduction). *Journal of the Korean Society of Marine Engineering*, v. 40, n. 5, p. 389–396, 2016.
- DA BARBOSA, M. R. *Princípios Fundamentais da transferência de calor*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2004.
- DA SILVA, M. M. *Diferenças Finitas não-usual aplicado ao modelo de Maxwell-Cattaneo em malhas deslocadas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, 2016.
- DE ARAUJO, C. *Transmissão de calor*. [S.l.]: Livros Tecnicos e Cientificos, 1982.
- DE FREITAS, A. A.; VIGO, D. G.; TEIXEIRA, M. G.; VASCONCELLOS, C. A. de. Análise de erros computacionais de um modelo generalizado da equação de Richards. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 3, n. 1, 2015.
- DE OLIVEIRA, P. M. C. Sistemas complexos. *Tempo Brasileiro*, v. 195, p. 109–124, 2013.
- DE OLIVEIRA Árison A. R. *Modelagem computacional do problema de condução de calor*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Pará, 2016.
- DEBNATH, L.; BHATTA, D. *Integral transforms and their applications*. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2006.
- DIAS, R. A. C. *Possibilidade de descrever a condução de calor hiperbólica usando a equação constitutiva de Fourier*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Fluminense, 2011.
- ELZAKI, T. M.; HILAL, E. M.; ARABIA, J.-S.; ARABIA, J.-S. Analytical solution for telegraph equation by modified of Sumudu transform “Elzaki transform”. *Mathematical Theory and Modelling*, v. 2, n. 4, p. 104–111, 2012.
- EROĞLU, B.; AVCI, D.; ÖZDEMİR, N. Optimal control problem for a conformable fractional heat conduction equation. *Acta Physica Polonica A*, v. 132, n. 3, p. 658–662, 2017.
- FOURIER, J. B. J. Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides. *Nouveau Bulletin des Sciences de la Société Philomathique de Paris*, v. 6, p. 112–116, 1808.
- FOURIER, J. B. J. Analytical theory of heat. *University Press*, 1878.
- HAMMAD, M. A.; KHALIL, R. Conformable fractional heat differential equation. *Int. J. Pure Appl. Math*, v. 94, n. 2, p. 215–221, 2014.

- HANCOCK, M. J. The 1-D heat equation: 18.303 linear partial differential equations. *source unknown*, p. 1–41, 2004.
- HUAN-YING, X.; HAI-TAO, Q.; XIAO-YUN, J. Fractional Cattaneo heat equation in a semi-infinite medium. *Chinese Physics B*, v. 22, n. 1, 2013.
- INCROPERA, F. P. I. *Fundamentos de transferência de calor e massa*. 6<sup>a</sup>. ed. [S.l.: s.n.], 2008.
- KATUGAMPOLA, U. N. A new fractional derivative with classical properties. *arXiv preprint arXiv:1410.6535*, 2014.
- KHALIL, R.; ABU-SHAAB, H. Solution of some conformable fractional differential equations. *Int. J. Pure Appl. Math*, v. 103, n. 4, p. 667–673, 2015.
- KHALIL, R.; HORANI, M. A.; YOUSEF, A.; SABABHEH, M. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 264, p. 65–70, 2014.
- LEBON, G.; JOU, D.; AS-VAZQCEZ, J. C.; MUSCHIK, W. Heat conduction at low temperature: A non-linear generalization of the Guyer-Krumhansl equation. *Periodica Polytechnica Chemical Engineering*, v. 41, n. 2, p. 185–196, 1997.
- LEOPOLDINO, A.; WEBERSZPIL, J.; GODINHO, C.; HELAYËL-NETO, J. Discussing the extension and applications of a variational approach with deformed derivatives. *Journal of Mathematics and Physics*, 2019.
- LIU, K.-C.; CHEN, H.-T.; WANG, Y.-N. An inspection to the hyperbolic heat conduction problem in processed meat. *Therm. Sci*, v. 21, p. 303–308, 2017.
- MARÍN, E.; MARÍN, E. Does fourier’s law of heat conduction contradict the theory of relativity? *Latin-American Journal of Physics Education*, v. 5, n. 2, p. 13, 2011.
- MICKENS, R. E.; JORDAN, P. A positivity-preserving nonstandard finite difference scheme for the damped wave equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, v. 20, n. 5, p. 639–649, 2004.
- MISHRA, T. Analytical solution of 2D dual-phase-lagging heat conduction model. *parameters*, v. 2.
- MITRA, K.; KUMAR, S.; VEDEVARZ, A.; MOALLEMI, M. Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat. *Journal of Heat Transfer*, American Society of Mechanical Engineers, v. 117, n. 3, p. 568–573, 1995.
- NAGY, G. B.; ORTIZ, O. E.; REULA, O. A. The behavior of hyperbolic heat equations’ solutions near their parabolic limits. *Journal of Mathematical Physics*, v. 35, n. 8, p. 4334–4356, 1994.
- NOROOZI, M. J.; SAEDODIN, S.; GANJI, D. D. A new solution for nonlinear dual phase lagging heat conduction problem. *Alexandria Engineering Journal*, v. 55, n. 2, p. 1745–1752, 2016.
- PIFER, A. *Teoria analítica do calor de Joseph Fourier: Uma análise das bases conceituais e epistemológicas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, 2015.

- QI, H. T.; XU, H. Y.; GUO, X. W. The Cattaneo-type time fractional heat conduction equation for laser heating. *Computers & Mathematics with Applications*, v. 66, n. 5, p. 824–831, 2013.
- SANTOS, A. V.; VIANA, M. M.; MEDEIROS, F. H.; MOHALLEM, N. D. O incrível mundo dos materiais porosos—características, propriedades e aplicações. *38º volume*, 2016.
- SCHWARZWÄLDER, M. C. *Non-Fourier heat conduction: The Maxwell-Cattaneo equations*. Dissertação (Mestrado) — Universitat Politècnica de Catalunya, 2015.
- TAMMA, K. K.; ZHOU, X. Macroscale and microscale thermal transport and thermo-mechanical interactions: some noteworthy perspectives. *Journal of Thermal Stresses*, v. 21, n. 3-4, p. 405–449, 1998.
- TSALLIS, C. *Introduction to nonextensive statistical mechanics: approaching a complex world*. Nova Iorque: Springer Science & Business Media, 2009.
- TZOU, D. Y. A unified field approach for heat conduction from macro-to micro-scales. *Journal of Heat Transfer*, v. 117, n. 1, p. 8–16, 1995.
- VERNOTTE, P. Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur. *Compt. Rendu*, v. 246, p. 3154–3155, 1958.
- VILAR, S. C. Estudo quantitativo da convecção empregando um modelo acessível aos alunos de física geral. *Revista da Graduação*, v. 5, n. 1, 2012.
- WEBERSZPIL, J. O cálculo fracional, motivações e aplicações. *Tempo Brasileiro*, v. 195, p. 49–69, 2013.
- WEBERSZPIL, J.; CHEN, W. Generalized Maxwell relations in thermodynamics with metric derivatives. *Entropy*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 19, n. 8, p. 407, 2017.
- WEBERSZPIL, J.; HELAYËL-NETO, J. A. Variational approach and deformed derivatives. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 450, p. 217–227, 2016.
- WEBERSZPIL, J.; LAZO, M. J.; HELAYËL-NETO, J. On a connection between a class of q-deformed algebras and the Hausdorff derivative in a medium with fractal metric. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 436, p. 399–404, 2015.
- WEBERSZPIL, J.; SOTOLONGO-COSTA, O. Structural derivative model for tissue radiation response. *Journal of Advances in Physics*, v. 13, n. 4, p. 4779–4785, 2017.
- XU, W.; CHEN, W.; LIANG, Y.; WEBERSZPIL, J. A spatial structural derivative model for ultraslow diffusion. *Journal of Thermal Science*, v. 21, p. S121–S127, 2017.
- YANG, X. J.; BALEANU, D. Fractal heat conduction problem solved by local fractional variation iteration method. *Thermal Science*, v. 17, n. 2, p. 625–628, 2013.
- YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. *Física II: termodinâmica e ondas*. 12ª. ed. [S.l.: s.n.], 2008.
- ZHAO, D.; LUO, M. General conformable fractional derivative and its physical interpretation. *Calcolo*, v. 54, n. 3, p. 903–917, 2017.

ZHOU, H.; YANG, S.; ZHANG, S. Conformable derivative approach to anomalous diffusion. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 491, p. 1001–1013, 2018.

ZHUKOVSKY, K. Exact negative solutions for Guyer–Krumhansl type equation and the maximum principle violation. *Entropy*, v. 19, n. 9, p. 440, 2017.



## 10 APÊNDICE

# APÊNDICE A – SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR CLÁSSICA POR TRANSFORMADA DE FOURIER

## A.1 Introdução

Neste apêndice, está feito de maneira detalhada os cálculos necessários para se obter a solução analítica do problema 2.12, através da aplicação do método da transformada de Fourier [DEBNATH; BHATTA, 2006].

Considerando um problema de condução de calor em uma barra, isolada termicamente, homogênea e infinita.

$$\begin{aligned}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, \\ T(x, 0) &= f(x), & -\infty < x < \infty.\end{aligned}\tag{A.1.1}$$

## A.2 Solução

Assumindo que a função  $f$  é contínua, limitada e integrável em todos os pontos. Assim fazendo a TF, nas eqs.(A.1.1)

$$\frac{d\hat{T}(\omega, t)}{dt} = -4\pi^2\omega^2\alpha\hat{T}(\omega, t),\tag{A.2.1}$$

$$\hat{T}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega).\tag{A.2.2}$$

Pode-se reorganizar a eq.(A.2.1) da seguinte maneira:

$$\frac{d\hat{T}(\omega, t)}{\hat{T}(\omega, t)} = -4\pi^2\omega^2\alpha dt,\tag{A.2.3}$$

Integrando a eq.(A.2.3), tem-se:

$$\ln \hat{T}(\omega, t) = -4\pi^2\omega^2\alpha t + c,\tag{A.2.4}$$

$$\hat{T}(\omega, t) = Ce^{-4\pi^2\omega^2\alpha t}.\tag{A.2.5}$$

Utilizando a condição inicial (A.2.2), obtém-se:

$$\hat{T}(\omega, 0) = Ce^{-4\pi^2\omega^2\alpha 0} = \hat{f}(\omega),\tag{A.2.6}$$

o que implica em que a constante de integração  $C$  seja determinada como:

$$C = \hat{f}(\omega). \quad (\text{A.2.7})$$

Substituindo a eq. (A.2.7) na eq. (A.2.5), obtém-se:

$$\hat{T}(\omega, t) = \hat{f}(\omega)e^{-4\pi^2\omega^2\alpha t}. \quad (\text{A.2.8})$$

Para o próximo passo, que é a aplicação do transformada inversa de Fourier (TIF), é necessário saber dois fundamentos da transformada de Fourier.

**Teorema da convolução:** Se  $F(\omega)$  e  $G(\omega)$  são transformadas de Fourier de  $f(x)$  e  $g(x)$ , então a Transformada de Fourier Inversa do produto  $F(\omega)G(\omega)$  é:

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{x})f(x - \bar{x})d\bar{x}, \quad (\text{A.2.9})$$

**Transformada Inversa de Fourier de uma função Gaussiana:** Funções na forma

$$G(\omega) = e^{-\alpha\omega^2}. \quad (\text{A.2.10})$$

Onde  $\alpha > 0$  é uma constante, são chamadas de funções Gaussianas. A função  $g(x)$  pode ser obtida através de TIF de  $G(\omega)$  como segue:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{-i\omega t}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\omega^2}e^{-i\omega t}d\omega. \quad (\text{A.2.11})$$

O resultado desta integral é:

$$g(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}. \quad (\text{A.2.12})$$

Retornando para eq. (A.2.8), com as informações acima, é possível calcular a TIF como:

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x})\sqrt{\frac{\pi}{\alpha t}}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4\alpha t}}. \quad (\text{A.2.13})$$

Note que, se a condição inicial for especificada como um impulso de Dirac, concentrado na origem, então:

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}}e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}}. \quad (\text{A.2.14})$$

Esta é a solução analítica da equação clássica de condução de calor [DEBNATH; BHATTA, 2006].

## APÊNDICE B – SOLUÇÃO ANALÍTICA DA ECCC PELO MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

### B.1 Introdução

Neste apêndice, está feito de maneira detalhada os cálculos necessários para se obter a solução analítica do problema 2.14, através a aplicação do método de separação de variáveis [MICKENS; JORDAN, 2004].

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \\
 T(0,t) &= T(l,t) = 0 & t > 0; \\
 T(x,0) &= T_0 \text{sen} \left( \frac{\pi x}{l} \right) & x \in (0, l); \\
 T_t(x,0) &= 0, & x \in (0, l).
 \end{aligned} \tag{B.1.1}$$

Onde,  $T_0$  é a temperatura inicial do problema.

### B.2 Solução

Para encontrar a solução analítica, começando pela adimensionalização o problema acima.

$u = \frac{T}{T_0}$ ,  $x = \frac{X}{l}$  e  $\bar{t} = t \frac{k}{l^2}$ . Usando a regra da cadeia, considerando  $l = 1m$  e fazendo algumas simplificações, obtêm-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u(X,\bar{t})}{\partial \bar{t}} &= \frac{\partial^2 u(X,\bar{t})}{\partial X^2}, & 0 < X < 1; \\
 u(0,\bar{t}) &= 0; \\
 u(X,0) &= \text{sen} \pi X; \\
 u_{\bar{t}}(X,0) &= 0.
 \end{aligned} \tag{B.2.1}$$

Pode-se reescrever a equação acima da seguinte maneira:  $u(X,\bar{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(X) \phi_n(\bar{t})$ .

Aplicando a separação de variáveis surgem os dois problemas:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \psi_n(X)}{dX^2} + \gamma \psi_n(X) &= 0 & 0 < X < 1; \\
 \psi_n(0) &= \psi_n(1) = 0; \\
 \psi_n(X) &= \text{sen} \pi X.
 \end{aligned} \tag{B.2.2}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\phi_n(\bar{t})}{d\bar{t}} + \gamma \phi_n(\bar{t}) &= 0 & \bar{t} > 0; \\
 \phi_n(0) &= T_0; \\
 \frac{d\phi_n(0)}{d\bar{t}} &= 0.
 \end{aligned} \tag{B.2.3}$$

Resolvendo o problema B.2.2. Tem-se uma EDO que possui a seguinte solução:

$$\psi_n(X) = C_1 \cos(\sqrt{\gamma} X) + C_2 \text{sen}(\sqrt{\gamma} X);$$

Aplicando as condições de contorno tem-se a solução:  $\psi_n(X) = C_2 \text{sen}(\sqrt{\gamma}X)$ ; nota-se que  $C_2$  é arbitrário, logo  $\text{sen}(\sqrt{\gamma}) = 0$ , então  $\sqrt{\gamma} = n\pi$

Usando a condição  $\psi_n(X) = \text{sen}(\pi X)$ . Logo  $C_2 \text{sen}(n\pi X) = \text{sen}(\pi X)$ , para que essa igualdade seja satisfeita é necessário que  $C_2 = 1$  e  $n = 1$ . Então a solução espacial do problema B.1.1 é:

$$\psi(X) = \text{sen}(\pi X). \quad (\text{B.2.4})$$

Resolvendo o problema B.2.3, tem-se que:

$$\frac{1}{\phi(\bar{t})} \frac{d\phi(\bar{t})}{d\bar{t}} = -\gamma$$

$$\phi(\bar{t}) = C_1 e^{-\gamma \bar{t}}; \text{ Aplicado a condição de contorno. obtêm-se:}$$

$$\phi(\bar{t}) = e^{-\gamma \bar{t}}. \quad (\text{B.2.5})$$

Então substituindo as equações (B.2.4) e (B.2.5) em (B), a solução analítica para a equação de condução de calor clássica, por separação de variáveis, é encontrada.

$$u(X, \bar{t}) = \text{sen}(\pi X) e^{-\pi^2 \bar{t}}. \quad (\text{B.2.6})$$

Voltando para forma adimensional, obtêm-se:

$$T(x, t) = T_0 \text{sen}(\pi x) e^{-\pi^2 \alpha t}. \quad (\text{B.2.7})$$

# APÊNDICE C – SOLUÇÃO ANALÍTICA DA ECV PELO MÉTODO DA SOLUÇÃO TENTATIVA

## C.1 Introdução

Neste apêndice, está feito de maneira detalhada os cálculos necessários para se obter a solução analítica do problema 3.15, através a aplicação do método da solução tentativa [CHOI et al., 2016].

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} &= \frac{\alpha}{\tau} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \\ T(0,0) &= T_h, \\ T(l,0) &= T_i.\end{aligned}\tag{C.1.1}$$

Onde,  $T_h$  e  $T_i$  são as temperaturas impostas nos contornos.

## C.2 Solução

Buscando uma solução analítica para o problema envolvendo a equação C-V, foi proposta uma possível solução que envolva as variáveis  $x$  e  $t$ , pois o perfil de temperatura depende tanto do tempo quanto do espaço. Assim, uma solução tentativa poderia ser

$$T(x,t) = Ae^{ax}e^{bt}.\tag{C.2.1}$$

Onde  $A$ ,  $a$  e  $b$  são constantes arbitrárias, com a unidade de medida  $m^{-1}$  para  $a$  e  $s^{-1}$  para  $b$ .

Substituindo a solução tentativa, dada pela a eq. (C.2.1) na eq. (3.9). Fazendo as devidas derivações, obtém-se as equações abaixo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} &= Abe^{ax}e^{bt}, \\ \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} &= Ab^2e^{ax}e^{bt}, \\ \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} &= Aa^2e^{ax}e^{bt}.\end{aligned}\tag{C.2.2}$$

Substituindo esses resultados, na eq.(C.1.1), resulta em

$$Ab^2e^{ax}e^{bt} + \frac{1}{\tau}Abe^{ax}e^{bt} = \frac{\alpha}{\tau}Aa^2e^{ax}e^{bt}.\tag{C.2.3}$$

Dividindo a eq. (C.2.3) por  $Ae^{ax}e^{bt}$ , tem-se:

$$b^2 + \frac{b}{\tau} = \frac{\alpha}{\tau}a^2.\tag{C.2.4}$$

Fazendo uma análise dimensional da eq. (C.2.4), com o objetivo de verificar sua

consistência dimensional.

$$\begin{aligned} [s^{-1}]^2 + \frac{[s^{-1}]}{s} &= \left[ \frac{m^2}{s^2} \right] [m^{-2}], \\ [s^{-2}] + [s^{-2}] &= \left[ \frac{1}{s^2} \right], \\ [s^{-2}] + [s^{-2}] &= [s^{-2}]. \end{aligned} \quad (\text{C.2.5})$$

Note que como a homogeneidade dimensional é mantida, então a eq. (C.2.4) é dimensionalmente consistente.

O valor da constante  $b$  pode ser encontrado a partir da eq.(C.2.4), pois como tratando-se de uma equação quadrática, as raízes dela podem ser encontradas usando a fórmula de Báskara. Assim, tem-se as possibilidades para a contante  $b$ :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{-\frac{1}{\tau} + \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + 4\frac{\alpha}{\tau}a^2}}{2}, \\ b_2 &= \frac{-\frac{1}{\tau} - \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + 4\frac{\alpha}{\tau}a^2}}{2}. \end{aligned} \quad (\text{C.2.6})$$

Fazendo também a análise dimensional em  $b_1$  ou  $b_2$ , percebe-se que conservam a unidade de medida  $s^{-1}$ , logo os resultado para  $b$  são válidos.

Pode-se reescrever a eq.(C.2.1), da seguinte maneira:

$$T(x, t) = Ae^{ax}e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[ e^{\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{\tau^2} + 4\frac{\alpha}{\tau}a^2}} + e^{-\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{\tau^2} + 4\frac{\alpha}{\tau}a^2}} \right] \quad (\text{C.2.7})$$

Para que a eq. (C.2.7) seja considerada de fato uma solução para o problema (C.1.1), ela deve satisfazer as duas condições de contorno expostas. O uso dessas condições será útil para encontrar as constantes envolvidas na solução proposta. Aplicando a primeira condição de contorno:

$$T(0, 0) = Ae^{a0}e^{b0}(e^0 + e^0) = T_h, \text{ logo} \quad (\text{C.2.8})$$

$$A = \frac{T_h}{2}. \quad (\text{C.2.9})$$

Aplicando a segunda condição de contorno:

$$T(l, 0) = \frac{T_h}{2}e^{al}e^{b0}(e^0 + e^0) = T_i, \text{ deste modo obtém-se} \quad (\text{C.2.10})$$

$$e^{al} = \frac{T_i}{T_h}, \text{ e assim} \quad (\text{C.2.11})$$

$$a = \frac{1}{l} \ln \frac{T_i}{T_h}, \quad (\text{C.2.12})$$

Pode se verificar através de uma análise dimensional que a eq.(C.2.12) atende ao requisito imposto quando a possível solução foi proposta, mantendo sua unidade de

medida  $m^{-1}$ .

Encontradas todas as constantes, substitui-se as eqs.(C.2.9), (C.2.12) e (C.2.6) na eq.(C.2.1):

$$T(x, t) = \frac{T_h}{2} e^{\frac{x}{l} \ln \frac{T_i}{T_h}} \left\{ e^{\frac{-\frac{t}{\tau} + t \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + 4\frac{\alpha}{\tau} \left\{ \frac{1}{l} \ln \frac{T_i}{T_h} \right\}^2}}{2}} + e^{\frac{-\frac{t}{\tau} - t \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + 4\frac{\alpha}{\tau} \left\{ \frac{1}{l} \ln \frac{T_i}{T_h} \right\}^2}}{2}} \right\}, \quad (\text{C.2.13})$$

$$T(x, t) = \frac{T_h}{2} e^{\frac{x}{l} \ln \frac{T_i}{T_h}} \left\{ e^{-\frac{t}{2\tau} + \frac{t}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + 4\frac{\alpha}{\tau} \left\{ \frac{1}{l} \ln \frac{T_i}{T_h} \right\}^2}} + e^{-\frac{t}{2\tau} - \frac{t}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + 4\frac{\alpha}{\tau} \left\{ \frac{1}{l} \ln \frac{T_i}{T_h} \right\}^2}} \right\}, \quad (\text{C.2.14})$$

Reescrevendo as exponenciais como uma multiplicação de potências de mesma base.

$$T(x, t) = \frac{T_h}{2} e^{\frac{x}{l} \ln \frac{T_i}{T_h}} \left\{ e^{-\frac{t}{2\tau}} e^{\frac{t}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + 4\frac{\alpha}{\tau} \left\{ \frac{1}{l} \ln \frac{T_i}{T_h} \right\}^2}} + e^{-\frac{t}{2\tau}} e^{-\frac{t}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + 4\frac{\alpha}{\tau} \left\{ \frac{1}{l} \ln \frac{T_i}{T_h} \right\}^2}} \right\}, \quad (\text{C.2.15})$$

Colocando em evidência o termo  $e^{-\frac{t}{2\tau}}$ , tem-se:

$$T(x, t) = \frac{T_h}{2} e^{\frac{x}{l} \ln \frac{T_i}{T_h}} e^{-\frac{t}{2\tau}} \left\{ e^{\frac{t}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + 4\frac{\alpha}{\tau} \left\{ \frac{1}{l} \ln \frac{T_i}{T_h} \right\}^2}} + e^{-\frac{t}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + 4\frac{\alpha}{\tau} \left\{ \frac{1}{l} \ln \frac{T_i}{T_h} \right\}^2}} \right\}. \quad (\text{C.2.16})$$

A eq. (C.2.16) é a solução analítica para o problema envolvendo a equação de Cattaneo-Vernotte.

### Interpretação alternativa

Fazendo:

$$f_1 = e^{\frac{t}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + 4\frac{\alpha}{\tau} \left\{ \frac{1}{l} \ln \frac{T_i}{T_h} \right\}^2}}. \quad (\text{C.2.17})$$

$$f_2 = e^{-\frac{t}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + 4\frac{\alpha}{\tau} \left\{ \frac{1}{l} \ln \frac{T_i}{T_h} \right\}^2}}. \quad (\text{C.2.18})$$

Ao implementar uma comparação de  $f_1$  e  $f_2$ , nota-se que com o passar do tempo a contribuição do segundo termo para a solução se torna quase nula.

Com o gráfico das curvas acima, nota-se que  $f^2$  vai se aproximando cada vez mais de zero, quando assumi-se valores maiores para o tempo. Com isso, ao serem somadas as curvas  $f^1$  e  $f^2$ , a segunda curva praticamente não altera o valor da primeira.

Assim a figura 10.1, deixa claro que, o termo  $f_2$  tem contribuição mínima para a solução final, podendo ser descartado. Por consequência a solução analítica para o



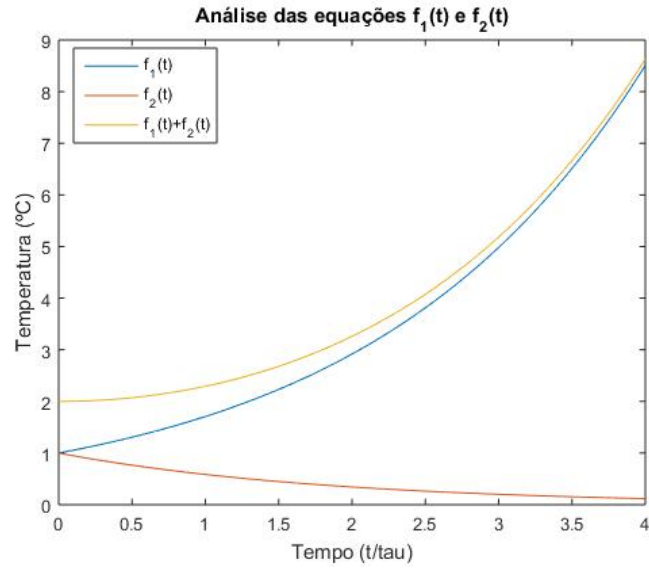


Figura 10.1: Análise do comportamento das funções, considerando  $\alpha = 0,001m^2/s$  ,  $\tau = 15s$ ,  $x = 0,5m$ ,  $T_i = 20^\circ C$  e  $T_h = 50^\circ C$  .

problema proposto se torna mais simples.

$$T(x, t) = \frac{T_h}{2} e^{\frac{x}{l} \ln \frac{T_i}{T_h}} e^{-\frac{t}{2\tau}} e^{\frac{t}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + 4\frac{\alpha}{\tau} \left\{ \frac{1}{l} \ln \frac{T_i}{T_h} \right\}^2}} . \quad (C.2.19)$$

# APÊNDICE D – SOLUÇÃO ANALÍTICA DA ECV PELO MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

## D.1 Introdução

Neste apêndice, está feito de maneira detalhada os cálculos necessários para se obter a solução analítica do problema 3.18, através a aplicação do método de separação de variáveis [MICKENS; JORDAN, 2004].

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} &= \frac{\alpha}{\tau} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, & -0 < x < l, \\
 T(0,t) = T(l,t) &= 0, & t > 0, \\
 T(x,0) &= T_0 \text{sen} \left( \frac{\pi x}{l} \right), & x \in (0, l), \\
 \frac{\partial T}{\partial t}(x,0), & & x \in (0, l).
 \end{aligned} \tag{D.1.1}$$

## D.2 Solução

Para simplificar os cálculos que serão realizado, adimensionalizando o problema acima. Para isto, é necessário fazer as seguintes substituições:

$$u = \frac{T}{T_0}, \quad X = \frac{x}{l} \quad e \quad \theta = t \left( \frac{\alpha}{l^2} \right).$$

Obtendo assim o seguinte problema admensionalizado.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial \theta} + \tau_0 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}, & -0 < X < 1, \\
 u(0,\theta) = u(1,\theta) &= 0, & \theta > 0, \\
 u(X,0) &= \text{sen}(\pi X), & X \in (0, 1), \\
 \frac{\partial u}{\partial \theta}(X,0), & & X \in (0, 1).
 \end{aligned} \tag{D.2.1}$$

Onde  $\tau_0 = \tau \frac{\alpha}{l^2}$ , e sabendo que  $l = 1$ . Usando o método de separação de variáveis.

$$u(X, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(X) \phi_n(\theta). \tag{D.2.2}$$

Obtém-se assim dois problemas:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \psi_n(X)}{dX^2} &= -\gamma \psi_n(X), & -0 < X < 1, \\
 \psi_n(X) &= \text{sen}(n\pi X), \\
 \psi_n(0) = \psi_n(1) &= 0.
 \end{aligned} \tag{D.2.3}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_0 \frac{d^2 \phi_n(\theta)}{d\theta^2} + \frac{d\phi_n(\theta)}{d\theta} &= -\gamma \phi_n(\theta), & \theta > 0, \\
 \phi_n(0) &= 1, \\
 \frac{d\phi_n(0)}{d\theta} &= 0.
 \end{aligned} \tag{D.2.4}$$

Para resolver o problema [D.2.3](#), substituindo  $\psi_n(X)$  por  $y$ , e assim obtém-se a seguinte equação característica:

$$y^2 = -\gamma \quad y = \pm\sqrt{-\gamma}, \quad (\text{D.2.5})$$

Existem três casos para ser analisados:

1 :  $\gamma < 0$ , a equação possui duas raízes reais diferentes.

$$\psi_n(X) = C_1 e^{\sqrt{-\gamma}X} + C_2 e^{-\sqrt{-\gamma}X}, \quad (\text{D.2.6})$$

Aplicando as condições de contorno  $\psi_n(0) = 0$  e  $\psi_n(\gamma) = 0$ . Encontra-se  $C_1 = C_2 = 0$ , uma solução trivial.

2 :  $\gamma = 0$ , a equação possui duas raízes reais iguais.

$$\psi_n(X) = C_1 e^{\sqrt{-\gamma}X} + C_2 X e^{-\sqrt{-\gamma}X}, \quad (\text{D.2.7})$$

Aplicando as condições de contorno  $\psi_n(0) = 0$  e  $\psi_n(\gamma) = 0$ . Encontra-se  $C_1 = C_2 = 0$ , uma solução trivial.

3 :  $\gamma > 0$ , a equação possui duas raízes complexas.

$$\psi_n(X) = C_1 \cos(\sqrt{\gamma}X) + C_2 \sen(\sqrt{\gamma}X), \quad (\text{D.2.8})$$

Aplicando as condições de contorno  $\psi_n(0) = 0$  e  $\psi_n(\gamma) = 0$ . Encontra-se  $C_1 = 0$ , porém  $C_2 \neq 0$  e  $\sen(\sqrt{\gamma}) = 0$ , logo  $\sqrt{\gamma} = n\pi$ . Note que a solução do problema [2.1](#) fica:

$$\psi_n(X) = C_2 \sen(n\pi X), \quad (\text{D.2.9})$$

Porém usando a condição  $\psi_n(X) = \sen(\pi X)$ , tem-se que  $C_2 \sen(n\pi X) = \sen(\pi X)$ , logo  $n = 1$  e  $c_2 = 1$ . Assim a solução final para o problema [2.1](#):

$$\psi(X) = \sen(\pi X). \quad (\text{D.2.10})$$

Agora resolvendo o problema [D.2.4](#) sabendo que  $n = 1$ . Pode-se propor  $\phi(\theta) = e^{\rho\theta}$  como uma possível solução. Substituindo no problema obtém-se:

$$\rho = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\tau_0\pi^2}}{2\tau_0}, \quad (\text{D.2.11})$$

Semelhantemente ao que foi feito anteriormente, é possível analisar três casos:

1 :  $1 - 4\tau_0\pi^2 > 0$ , com isso obtém-se  $\tau_0 < \frac{1}{4\pi^2}$ , considerando  $\frac{1}{4\pi^2} = \tau_c$ , tem-se  $\tau_0 < \tau_c$ , Reescrevendo a eq. (D.2.11):

$$\rho = \frac{-1}{2\tau_0} \pm \frac{\pi\sqrt{\tau_c - \tau_0}}{\tau_0}, \quad (\text{D.2.12})$$

Para simplificar considera-se  $\omega = \frac{\pi\sqrt{\tau_c - \tau_0}}{\tau_0}$ , logo a solução neste caso para o problema 2.2 pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\phi(\theta) = C_1 e^{[-\frac{1}{2\tau_0} + \omega]\theta} + C_2 e^{[-\frac{1}{2\tau_0} - \omega]\theta} \quad (\text{D.2.13})$$

Aplicando as condições de contorno para encontrar os valores das constantes, obtém-se:

$$C_1 = \frac{T_0 + 2\tau_0\omega}{4\tau_0\omega}, \quad (\text{D.2.14})$$

$$C_2 = \frac{2\tau_0\omega - T_0}{4\tau_0\omega}, \quad (\text{D.2.15})$$

Substituindo na eq.(D.2.13) e fazendo os devidos cálculos matemáticos, conclui-se que:

$$\phi(\theta) = e^{-\frac{\theta}{2\tau}} \left[ \frac{\sinh(\omega\theta)}{\sqrt{1 - 4\tau_0\pi^2}} + \cosh(\omega\theta) \right], \quad \text{para } \tau_0 < \tau_c. \quad (\text{D.2.16})$$

2 :  $1 - 4\tau_0\pi^2 = 0$ , conseqüentemente para este caso  $\tau_0 = \tau_c$ , a solução neste caso para o problema 2.2 pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\phi(\theta) = C_1 e^{[-\frac{1}{2\tau_0}]\theta} + C_2 \theta e^{[-\frac{1}{2\tau_0}]\theta} \quad (\text{D.2.17})$$

Aplicando as condições de contorno para encontrar os valores das constantes, encontra-se  $C_1 = 1$  e  $C_2 = \frac{1}{2\tau_0}$ . Substituindo na eq.(D.2.17):

$$\phi(\theta) = e^{[-\frac{\theta}{2\tau_0}]} \left[ 1 + \frac{\theta}{2\tau_0} \right], \quad \text{para } \tau_0 = \tau_c. \quad (\text{D.2.18})$$

3 :  $1 - 4\tau_0\pi^2 < 0$ , de maneira análoga é encontrado  $\tau_0 > \tau_c$ , a solução neste caso para o problema 2.2 pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\phi(\theta) = C_1 e^{[-\frac{\theta}{2\tau_0}]} \cos(\omega\theta) + C_2 e^{[-\frac{\theta}{2\tau_0}]} \sen(\omega\theta) \quad (\text{D.2.19})$$

Aplicando as condições de contorno para encontrar os valores das constantes, obtém-se,  $C_1 = 1$  e  $C_2 = \frac{1}{2\tau_0\omega}$ . Substituindo na eq.(D.2.19):

$$\phi(\theta) = e^{\left[-\frac{\theta}{2\tau_0}\right]} \left[ \cos(\omega\theta) + \frac{\text{sen}(\omega\theta)}{\sqrt{|1-4\tau_0\pi^2|}} \right], \quad \text{para } \tau_0 > \tau_c. \quad (\text{D.2.20})$$

Tomando as soluções encontradas pelas equações D.2.10, D.2.16, D.2.18 e D.2.20, a seguinte solução final adimensional para o problema é obtida:

$$u(X, \theta) = \text{sen}(\pi X) e^{-\frac{\theta}{2\tau_0}} \Theta, \quad (\text{D.2.21})$$

$$\Theta = \begin{cases} \cosh(\omega\theta) + \frac{\text{senh}(\omega\theta)}{\sqrt{1-4\tau_0\pi^2}}, & \text{para } \tau_0 < \tau_c \\ 1 + \frac{\theta}{2\tau_0}, & \text{para } \tau_0 = \tau_c \\ \cos(\omega\theta) + \frac{\text{sen}(\omega\theta)}{\sqrt{|1-4\tau_0\pi^2|}}, & \text{para } \tau_0 > \tau_c \end{cases} \quad (\text{D.2.22})$$

Reescrevendo D.2.21 e D.2.22, de maneira dimensional tem-se:

$$T(x, t) = T_0 \text{sen}(\pi x) e^{-\frac{t\alpha}{2\tau_0}} \Theta. \quad (\text{D.2.23})$$

$$\Theta = \begin{cases} \cosh(\omega t\alpha) + \frac{\text{senh}(\omega t\alpha)}{\sqrt{1-4\tau_0\pi^2}}, & \text{para } \tau_0 < \tau_c \\ 1 + \frac{t\alpha}{2\tau_0}, & \text{para } \tau_0 = \tau_c \\ \cos(\omega t\alpha) + \frac{\text{sen}(\omega t\alpha)}{\sqrt{|1-4\tau_0\pi^2|}}, & \text{para } \tau_0 > \tau_c \end{cases} \quad (\text{D.2.24})$$

# APÊNDICE E – OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE ONDA DEFORMADA

## E.1 Introdução

No capítulo 7, foi utilizado cálculo variacional com derivadas deformadas para encontrar a ECVD. Neste apêndice nosso objetivo também será obter uma equação de Cattaneo-Vernotte deformada, porém será usado um caminho bem diferente do anterior. Será utilizado a técnica de integração direta juntamente com a mudança de núcleo.

## E.2 Integração Direta

Considerando a equação obtida no capítulo 3, através da reescrita da lei de Fourier, adicionando o tempo de relaxação térmico 3.3:

$$q(x, t) + \tau \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} = -k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}. \quad (\text{E.2.1})$$

Multiplicado-a pelo fator integrante  $e^{\frac{t}{\tau}}$  e dividindo-a por  $\tau$ .

$$\frac{\partial q}{\partial t} e^{\frac{t}{\tau}} + \frac{q}{\tau} e^{\frac{t}{\tau}} = -\frac{k}{\tau} \nabla T e^{\frac{t}{\tau}}. \quad (\text{E.2.2})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (e^{\frac{t}{\tau}} \cdot q) = -\frac{k}{\tau} \nabla T e^{\frac{t}{\tau}}. \quad (\text{E.2.3})$$

Integrando a equação no intervalo  $t_0$  à  $t$ .

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} (e^{\frac{t}{\tau}} \cdot q) dt = \int_{t_0}^t -\frac{k}{\tau} \nabla T e^{\frac{t'}{\tau}} dt'. \quad (\text{E.2.4})$$

Obtém-se:

$$e^{\frac{t}{\tau}} q(x, t) - e^{\frac{t_0}{\tau}} \cdot q(x, t_0) = -\frac{k}{\tau} \int_{t_0}^t \nabla T(x, t') e^{\frac{t'}{\tau}} dt'. \quad (\text{E.2.5})$$

Reorganizando a eq.(E.2.5).

$$q(x, t) = \frac{e^{\frac{t_0}{\tau}}}{e^{\frac{t}{\tau}}} \cdot q(x, t_0) - \frac{k}{\tau} \int_{t_0}^t \nabla T(x, t') \frac{e^{\frac{t'}{\tau}}}{e^{\frac{t}{\tau}}} dt'. \quad (\text{E.2.6})$$

$$q(x, t) = e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} \cdot q(x, t_0) - \frac{k}{\tau} \int_{t_0}^t \nabla T(x, t') e^{-\frac{(t-t')}{\tau}} dt'. \quad (\text{E.2.7})$$

Note que se  $\tau \rightarrow \infty$  com  $\frac{k}{\tau}$  finito, tem-se:

$$q(x, t) = q(x, t_0) - \frac{k}{\tau} \int_{t_0}^t \nabla T(x, t') dt'. \quad (\text{E.2.8})$$

Fazendo uma mudança de núcleo do integrando através do núcleo de potências de cauda longa, essa nos garante que:

$$q(x, t) = -\frac{k}{\tau(\beta)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\beta-1} \frac{\partial}{\partial t} \nabla T(\tau) d\tau. \quad (\text{E.2.9})$$

Logo fazendo a mudança, a eq.(E.2.8) se transforma em:

$$q(x, t) = -\frac{k}{\tau} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\beta-1} \nabla T(\tau) d\tau. \quad (\text{E.2.10})$$

Usando o teorema fundamental do cálculo tem-se que:

$${}_{t_0}D_t^\beta q(x, t) = -k \nabla T. \quad (\text{E.2.11})$$

Aplicando o operador nabla na eq.(E.2.11):

$$\nabla {}_{t_0}D_t^\beta q(x, t) = -k \nabla^2 T. \quad (\text{E.2.12})$$

Substituindo a equação da continuidade (3.6), na eq.(E.2.12), tem-se:

$${}_{t_0}D_t^\beta \left( -\rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right) = -k \nabla^2 T. \quad (\text{E.2.13})$$

$$(t - t_0)^{1-\beta} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (\text{E.2.14})$$

Foi encontrada uma equação de onda.

Também é possível substituir na eq.(E.2.12), a equação da continuidade deformada  $\nabla \vec{q} = -\rho c {}_{t_0}D_t^\beta T$ .

$${}_{t_0}D_t^\beta \left( -\rho c {}_{t_0}D_t^\beta T \right) = -k \nabla^2 T. \quad (\text{E.2.15})$$

$${}_{t_0}D_t^\beta {}_{t_0}D_t^\beta T = \frac{k}{\rho c} \nabla^2 T. \quad (\text{E.2.16})$$

Assim obtém-se uma equação da onda deformada.