

UFRRJ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
MODELAGEM MATEMÁTICA E  
COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO

Método de ponto proximal para cômputo de filtro de  
média riemanniano em DTI-RM

Charlan Dellon da Silva Alves

Seropédica, RJ

Abril, 2014



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM  
MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

MÉTODO DE PONTO PROXIMAL PARA CÔMPUTO DE  
FILTRO DE MÉDIA RIEMANNIANO EM DTI-RM

CHARLAN DELLON DA SILVA ALVES

*Sob a orientação do professor*

**Ronaldo Malheiros Gregório**

*Sob a Co-orientação do professor*

**Angel Ramon Sanchez Delgado**

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciências, no Curso de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, área de concentração em Inteligência Computacional e Otimização.

Seropédica, RJ

Abril, 2014

538.362

A474m

T

Alves, Charlan Dellon da Silva, 1989-  
Método de ponto proximal para cômputo de  
filtro de média riemanniano em DTI-RM /  
Charlan Dellon da Silva Alves. - 2014.  
49 f.: il.

Orientador: Ronaldo Malheiros Gregório.  
Dissertação (mestrado) - Universidade  
Federal Rural do Rio de Janeiro, Curso de  
Pós-Graduação em Modelagem Matemática e  
Computacional, 2014.

Bibliografia: f. 46-49.

1. Ressonância magnética - Teses. 2.  
Imagem de ressonância magnética - Teses.  
3. Filtros digitais (Matemática) - Teses.  
4. Processamento de imagens - Tese. I.  
Gregório, Ronaldo Malheiros, 1978-. II.  
Universidade Federal Rural do Rio de  
Janeiro. Curso de Pós-Graduação em  
Modelagem Matemática e Computacional. III.  
Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

**CHARLAN DELLON DA SILVA ALVES**

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciências, no Curso de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, área de concentração em Inteligência Computacional e Otimização.

Dissertação aprovada em, 08 Abril de 2014

---

**Ronaldo Malheiros Gregório Dr. da**  
**UFRRJ**  
Orientador

---

**Ricardo Farias**  
Prof. Ph.D. da UFRJ

---

**José Airton Chaves Cavalcante Jr.**  
Prof. Dr. da UFRRJ

Seropédica, RJ  
Abril, 2014

*Este trabalho é dedicado a toda minha família em especial para minha querida filha Luna.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me conceder forças para prosseguir nesta jornada. A minha família por estar sempre do meu lado, principalmente nos momentos ruins. Aos amigos, ao meu orientador Ronaldo pela paciência e ajuda durante todo processo de construção deste trabalho, à CAPES pelo apoio financeiro, à FAPERJ por conceder a licença Matlab e a Workstation para a realização dos testes computacionais e todos aqueles que contribuíram de forma significativa para o desenvolvimento deste trabalho.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,  
mas transformai-vos pela renovação da mente,  
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:  
o que é bom, o que lhe é agradável, o que é perfeito.  
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

# Resumo

ALVES, Charlan Dellon da Silva. **Método de ponto proximal para cômputo de filtro de média riemanniano em DTI-RM**. 2014. 49p. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional). Instituto de ciências exatas, Departamento de Matematica, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2014.

Este trabalho tem como objetivo principal aplicar o método de ponto proximal com decomposição de Schur ao cômputo da média riemanniana, como filtro de imagem em difusão tensorial de imagem por ressonância magnética (DTI-RM). Em DTI-RM, a imagem é subdividida em unidades volumétricas denominadas voxels. Analiticamente, cada voxel é a representação tridimensional de informações matemáticas referentes a uma matriz simétrica definida positiva, de ordem 3. Geometricamente, o voxel assume a forma de um elipsóide, cujos os eixos são dados pelos autovetores da matriz correspondente a ele, e os respectivos comprimentos dos eixos, pelos autovalores associados. Uma das principais etapas do processamento de imagens em DTI-RM é a filtragem. Nessa etapa, técnicas de suavização e limpeza de ruídos oriundos do aparelho utilizado para aquisição são comumente empregadas. Primeiramente, em nosso trabalho, os tensores são gerados a partir de uma sequência de imagens reais captadas por um aparelho de ressonância magnética, posteriormente, a função de plotagem de dados tensoriais do Matlab é empregada para visualizar a imagem do campo tensorial. Na etapa seguinte, implementamos o filtro de média riemanniana em Matlab que foi aplicado em cada imagem gerada anteriormente com o intuito de suavizá-las. Para realizar esta tarefa é necessário a resolução de um problema de otimização para cada voxel percorrido, definido através de informações acerca de seus tensores vizinhos. Em geral, ruídos são caracterizados por voxels cujas matrizes de representação contêm autovalores negativos e suas representações geométricas são dadas por elipsóides cuja orientação contraria a da difusão anisotrópica para região observada. Para filtrar ruídos, geralmente substituí-se o voxel deficiente por uma média calculada a partir de seus vizinhos mais próximos. Nessa pesquisa propomos a metodologia de ponto proximal em variedades de Hadamard como ferramenta para determinação da média riemanniana. Do ponto de vista teórico, tal metodologia representa o que se tem de mais sofisticado em otimização padecendo apenas de análise de desempenho quando aplicado a situações reais.

**Palavras-chaves:** filtro de média riemanniana, difusão tensorial de imagens, método de ponto proximal.



# Abstract

ALVES, Charlan Dellon da Silva. **Proximal point method for computation of average filter in Riemannian DT-MRI**. 2014. 49p. Dissertation (Master in Mathematical and Computational Modelling). Instituto de ciências exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2014.

This paper aims to apply the proximal point method with Schur decomposition to the computation of the Riemannian average as image filter in diffusion tensor magnetic resonance imaging (DT-MRI). In DT-MRI, the image is subdivided into volumetric units called voxels. Analytically, each voxel is the three-dimensional representation of mathematical information relating to a symmetric positive definite matrix of order 3. Geometrically, the voxel takes the form of an ellipsoid whose axes are given by the eigenvectors of the matrix corresponding to it, and the respective lengths of the axes, the eigenvalues. One of the main stages of the processing images in DT-MRI is filtering. At this stage, smoothing techniques and cleaning noises coming from the apparatus used for acquisition are commonly employed. First, in our study, the tensors are generated from a given sequence of real images captured by an resonance magnetic machine, subsequently, a function plotting tensor data from Matlab is used to display the image of the tensor field. In the next step, we implemented the filter of Riemannian average in Matlab that was applied in each image generated previously with the objective of soften it. To accomplish this task is necessary solving an optimization problem for each voxel traversed, defined by information about their neighbors tensor. In geral, noise are characterized by voxels whose representations matrices contain negatives eigenvalues e their geometric representations are given by ellipsoids whose orientation is contrary to the observed anisotropic diffusion region. To filter out noise, usually is replaced defective voxel by an average calculated from its nearest neighbors. In this research we propose a methodology of proximal point in Hadamard manifold as a tool for determining the Riemannian average. From the theoretical point of view, this methodology is which has of most sophisticated in optimization suffering only performance analysis when applied to real situations.

**Key-words:** Riemannian average filter , diffusion tensor images , method of proximal point.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Volume de imagens de ressonância magnética. . . . .	27
Figura 2 – Fatia obtida usando a ferramenta Matlab. . . . .	27
Figura 3 – Representação do elipsóide e seus autovalores e autovetores, (PEREIRA, 2008). . . . .	29
Figura 4 – Esquema de filtragem de uma imagem. . . . .	35
Figura 5 – Imagem representada por Elipsóide. . . . .	36
Figura 6 – Filtragem referente aos dados da tabela 1. . . . .	37
Figura 7 – Imagem com a região de interesse definida. . . . .	38
Figura 8 – Comparação das imagens antes e após a aplicação do filtro. . . . .	38
Figura 9 – Imagem real do cérebro destacando a região de interesse para aplicação do filtro. . . . .	39
Figura 10 – Imagem real e filtrada em um plano tridimensional. . . . .	40
Figura 11 – Destacando região de interesse para filtragem. . . . .	40
Figura 12 – Região de interesse definida na figura 11. . . . .	40
Figura 13 – Resultado da filtragem (a). . . . .	41
Figura 14 – Resultado da filtragem (b). . . . .	41
Figura 15 – Resultado da filtragem (c). . . . .	41
Figura 16 – Resultado da filtragem (d). . . . .	42
Figura 17 – Imagens completa, RI real e filtrada. . . . .	42
Figura 18 – Redução do número de tensores ruidosos após aplicação do filtro de média riemanniana. . . . .	43
Figura 19 – Aplicação do filtro em uma imagem completa. . . . .	43
Figura 20 – Dupla aplicação do filtro em uma região de interesse. . . . .	44

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Experimentos computacionais com os métodos. . . . .	37
--	----

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Variedades riemanniana: um resumo dos conceitos básicos</b>	<b>14</b>
2.1	Variedades Diferenciáveis	14
2.1.1	Espaço Tangente	14
2.2	Geometria Riemanniana	14
2.2.1	Métrica Riemanniana	14
2.2.2	Geodésica e Aplicação exponencial	15
2.2.3	Convexidade em Variedade de Hadamard	16
<b>3</b>	<b>O cone das matrizes simétricas definidas positivas</b>	<b>17</b>
3.1	Conceitos de Análise matricial	17
3.2	A barreira logarítmica	17
3.3	Distância no cone das matrizes simétricas definidas positivas	18
3.4	Espaço de tensores $S_{++}^n$	20
3.4.1	Exponencial e Logaritmo	20
3.4.2	Raíz Quadrada	21
3.5	Tipos de Médias	21
3.5.1	Médias em métricas de matrizes simétricas positivas definidas	22
<b>4</b>	<b>Ponto proximal com decomposição de Schur</b>	<b>23</b>
4.1	Método de ponto proximal aplicado a média riemanniana em $S_{++}^n$	23
4.2	Algoritmo de ponto proximal com decomposição Schur	24
<b>5</b>	<b>Formação de Imagem por DTI-RM</b>	<b>26</b>
5.1	Princípio da formação de imagem por DTI-RM	26
5.1.1	Aspectos da difusão e sua representação	26
5.1.2	Cálculo do tensor	29
5.1.3	Índices invariantes	30
<b>6</b>	<b>Filtro de Média Riemanniana de dados tensoriais</b>	<b>33</b>
6.1	Filtro de Média Riemanniana	33
<b>7</b>	<b>Resultados</b>	<b>36</b>
<b>8</b>	<b>Conclusão e Trabalhos futuros</b>	<b>45</b>
	<b>Referências</b>	<b>46</b>

# 1 Introdução

Com os avanços tecnológicos na medicina, foram desenvolvidas novas técnicas não invasivas e eficazes para detectar tumores ou anomalias em seres vivos. Uma dessas técnicas é a ressonância magnética (RM). Utilizando RM é possível, por exemplo, explorar a estrutura anatômica do cérebro em seres humanos. Um dos caminhos mais comumente empregados para geração e representação de imagens em ressonância magnética é a difusão tensorial de imagens.

Com o desenvolvimento de novas modalidades de imagem, novos algoritmos têm sido propostos para manipulá-las, com o intuito de se adequar a crescente complexidade no processamento de imagens. Além disso, trabalhos recentes tem demonstrado o interesse da comunidade científica no processamento de dados de imagem que não estão definidos em espaços euclideo, mas sim, em variedades curvas (ZHANG; HANCOCK, 2006), (ZHANG; EDWIN, 2009) e (PENNEC et al., 2005).

Exemplos que nos interessam aqui incluem apenas dados tensoriais, em difusão tensorial de imagens por ressonância magnética (DTI-RM), como explicitados por (PENNEC et al., 2005), (WESTIN et al., 2002) e (ZHANG; EDWIN, 2009), que apresentam-se como ferramenta de imagem médica para a exploração não-invasiva da estrutura anatômica da matéria branca cerebral in vivo. Devido à alta dimensionalidade dos dados e as restrições impostas pelo espaço curvo, técnicas tradicionais de processamento de imagem tornam-se inaplicáveis.

DTI-RM é uma técnica relativamente recente de geração de imagens que trabalha com a mensuração das tendências do movimento aleatório das moléculas de água em um dado meio. Normalmente estas moléculas se movem desordenadamente em altas velocidades, em todas as direções, colidindo umas com as outras. Tais colisões dão origem ao movimento de difusão.

Ademais, DTI-RM tem se mostrado uma técnica promissora no estudo clínico de patologias do cérebro, como esclerose múltipla, Alzheimer, AVC e evolução tumoral, auxiliando no planejamento neuro-cirúrgico dessas doenças (SYMMS et al., 2004), (ASSAF et al., 2003) e (ERIKSSON et al., 2001).

Uma das principais etapas do processamento de imagens em DTI-RM é a filtragem. Nessa etapa, técnicas de suavização e limpeza de ruídos, oriundos do aparelho utilizado para aquisição, são comumente empregadas. Em geral, ruídos são caracterizados por voxels cujas matrizes de representação contêm autovalores negativos e suas representações geométricas são dadas por elipsóides cuja orientação contraria a da difusão anisotrópica para região observada.

Neste trabalho, estamos particularmente interessados na aplicação da média riemanniana (centro de massa) de matrizes simétricas definidas positivas na filtragem de imagens em DTI-RM. Para isso usamos técnicas de geometria riemanniana e elementos do espaço tensorial, uma vez que nossos dados de entrada são tensores, neste caso, matrizes simétricas definidas positivas. Para a determinação da média riemanniana empregamos o método de ponto proximal proposto por (GREGORIO; OLIVEIRA, 2009).

Do ponto de vista teórico, a metodologia de ponto proximal representa o estado da arte em relação à métodos de otimização, padecendo apenas de análise de desempenho quando aplicado a situações reais. Em nosso caso, o método encontra-se bem fundamentado teoricamente, com convergência já assegurada na literatura científica. No presente trabalho, apenas empregamos uma pequena alteração na forma de se computar um dos iterados do método. Para filtragem, o método é empregado recursivamente até que todos os voxels deficientes (tensor com autovalores negativos) sejam excluídos da imagem original e a mesma seja suavizada.

No segundo e terceiro capítulos deste trabalho apresentamos um resumo dos elementos matemáticos envolvendo conceitos de geometria riemanniana e do cone das matrizes simétricas positivas definidas para entendimento do método de ponto proximal. No quarto capítulo, descrevemos, sucintamente, o método de ponto proximal com decomposição Schur.

O quinto capítulo descreve o processo de formação de imagem por DTI-RM e como procedemos para gerar os tensores a partir de dados reais de imagem.

No sexto capítulo, relaxamos o filtro gaussiano introduzido por (ZHANG; EDWIN, 2009), obtendo uma versão mais simplificada, denominada filtro de média riemanniana. Nessa etapa, definimos o procedimento adotado para a aplicação do filtro em uma imagem.

## 2 Variedades riemanniana: um resumo dos conceitos básicos

Para uma melhor compreensão do nosso trabalho, introduziremos alguns conceitos básicos e resultados acerca de Geometria Riemanniana dando ênfase às variedades de Hadamard. Não entraremos em detalhes como exemplos e demonstrações, para não fugirmos do foco principal do trabalho. Sugerimos a consulta de outras referências, como (CARMO, 1992) e (SAKAI, 1996), para maiores detalhes.

### 2.1 Variedades Diferenciáveis

#### 2.1.1 Espaço Tangente

Seja  $M$  uma variedade diferenciável e conexa. O espaço tangente a  $M$  em  $p$  é denotado por  $T_pM$  e  $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$  representa seu fibrado tangente. Um campo de vetores  $X$  em  $M$  de classe  $C^s$ , para algum inteiro  $s \geq 0$ , é uma aplicação  $X : M \rightarrow TM$ , dada por  $p \mapsto X_p \in T_pM$ , de classe  $C^s$ . Denotamos o espaço dos campos de vetores em  $M$  de Classe  $C^s$  por  $\Psi^s(M)$ .

### 2.2 Geometria Riemanniana

#### 2.2.1 Métrica Riemanniana

Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ . Definimos por métrica riemanniana à correspondência que associa a cada ponto  $p \in M$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  diferenciável em  $T_pM$ .  $\| \bullet \|_p = (\langle \bullet, \bullet \rangle_p)^{\frac{1}{2}}$  é a norma correspondente à  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ . Chamamos o par  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_p)$  de variedade Riemanniana.

**Definição 2.2.1.** *Sejam  $M$  uma variedade riemanniana e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . O gradiente de  $f$ , denotado por  $\text{grad } f$ , é o único campo em  $\Psi^0(M)$  que satisfaz*

$$\langle \text{grad } f(p), v \rangle_p = df_p \cdot v \quad (2.1)$$

para todo  $p \in M$ ,  $v \in T_pM$  onde  $df_p \cdot v$  é a derivada direcional de  $f$ , na direção  $v$ .

Conhecida a métrica riemanniana, podemos determinar o comprimento de uma curva suave  $c$  ligando dois pontos quaisquer  $p_1, p_2 \in M$ . Considere  $c : [a, b] \rightarrow M$

satisfazendo  $c(a) = p_1$  e  $c(b) = p_2$ . O comprimento riemanniano de  $c$  é definido por

$$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\|_{c(t)} dt, \quad (2.2)$$

e a distância riemanniana entre  $p_1$  e  $p_2$  define-se como

$$d(p_1 p_2) = \inf\{L(c) : c \in C_{p_1 p_2}\} \quad (2.3)$$

onde  $C_{p_1 p_2}$  é o conjunto de todas as curvas suaves conectando  $p_1$  à  $p_2$ .

**Definição 2.2.2.** *Uma curva diferenciável  $c$  é dita normal se  $\|c'(t)\|_{c(t)}$  é constante, para todo  $t \in (a, b)$ .*

Segue que o comprimento de uma curva normal é dada por  $\|c'(t)\|_{c(t)}(b - a)$ .

## 2.2.2 Geodésica e Aplicação exponencial

Seja  $M$  uma variedade riemanniana. Uma curva suave  $\gamma : I \rightarrow M$  é denominada *geodésica* se

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0, \quad (2.4)$$

para todo  $t \in I$ , onde  $\frac{D\gamma'(t)}{dt}$  é a derivada covariante do campo  $\gamma'(t)$  (à saber,  $\frac{D\gamma'(t)}{dt}$  representa a projeção ortogonal de  $\gamma''(t)$  sob  $T_{\gamma(t)}M$ , para cada  $t \in I$ ). Decorre imediatamente que se  $\gamma$  é uma geodésica,  $\|\gamma'(t)\|^2 = \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \equiv \text{constante}$ .

**Definição 2.2.3.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa. Para cada  $p \in M$ , a aplicação exponencial em  $p$ , representada por  $\exp_p$ , é definida por*

$$\exp_p : T_p M \rightarrow M \quad (2.5)$$

$$v \mapsto \exp_p v = \gamma_v(1) \quad (2.6)$$

$$\exp_p tv = \gamma_v(t) \quad (2.7)$$

onde  $\gamma_v$  é a geodésica em  $M$ , tal que  $\gamma_v(0) = p$ ,  $\gamma'_v(0) = v$ .

**Definição 2.2.4.** *Uma variedade riemanniana  $M$  é geodesicamente completa se para todo  $p \in M$ , a aplicação  $\exp_p$  está definida para todo  $v \in T_p M$ , ou seja, se as geodésicas  $\gamma(t)$  que partem de  $p$  estão definidas para todos os valores do parâmetro  $t \in \mathbb{R}$ .*

**Teorema 2.2.1** (Teorema Holf-Rinow). *Seja  $M$  uma variedade riemanniana. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- i) *Para cada ponto  $p \in M$ ,  $\exp_p$  está definida em todo  $T_p M$ , isto é,  $M$  é uma variedade riemanniana completa.*



- ii)  $(M, d)$  é completo como espaço métrico, onde  $d$  é distância riemanniana.
- iii) Os subconjuntos limitados e fechados de  $M$  são compactos. Além disso, cada uma das afirmações acima implica que
- iv) Para quaisquer dois pontos  $p_1$  e  $p_2 \in M$  existe um segmento geodésico  $\gamma$  ligando  $p_1$  à  $p_2$  com  $L(\gamma) = d(p_1, p_2)$ . A geodésica  $\gamma$  com esta propriedade é chamada minimizante.

**Teorema 2.2.2** (Hadamard). *Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa com curvatura seccional não-positiva. Então  $M$  é difeomórfica a  $\mathbb{R}^n$ , com  $n = \dim M$ . Isto é,  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  é um difeomorfismo, para todo  $p \in M$ .*

*Demonstração.* Ver Lema 3.2 de (CARMO, 1992), p. 149, ou Teorema 4.1 de (SAKAI, 1996), p. 221.  $\square$

### 2.2.3 Convexidade em Variedade de Hadamard

Veremos que essas propriedades são similares às obtidas em análise convexa, em espaços euclidianos. Para mais informações acerca de análise convexa em espaços euclidianos, veja (HIRIART-URRUTY; LEMARÉCHAL, 1993), (IZMAILOV; SOLODOV, 2005) e em variedades Riemannianas (SAKAI, 1996).

Dizemos que um conjunto  $\Omega \subset M$  é convexo se qualquer segmento geodésico minimizante em  $M$ , com extremidades em  $\Omega$  está totalmente contido em  $\Omega$ .

**Definição 2.2.5.** *Seja  $\Omega$  um subconjunto convexo de uma variedade riemanniana  $M$ .  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é dita convexa se, para qualquer segmento geodésico minimizante  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ ,*

$$f(\gamma(\alpha \cdot a + (1 - \alpha) \cdot b)) \leq (1 - \alpha) \cdot f(\gamma(a)) + \alpha \cdot f(\gamma(b)),$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Se a desigualdade anterior for estrita, para todo  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $f$  é denominada estritamente convexa.

**Teorema 2.2.3.** *Sejam  $\Omega \subseteq M$  convexo e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  convexa. Dado  $p \in \Omega$  e  $u \in T_p M$ ,  $u$  é dito subgradiente de  $f$  em  $p$  se*

$$f(q) \geq f(p) + \langle u, \exp_p^{-1} q \rangle_p, \quad (2.8)$$

para todo  $q \in \Omega$ , onde  $\exp_p^{-1} q$  é o vetor tangente à geodésica que conecta  $p$  a  $q$ , em  $p$ .

## 3 O cone das matrizes simétricas definidas positivas

Neste capítulo propomos um estudo sucinto acerca das matrizes simétricas positivas definidas. Para maiores esclarecimentos, sugerimos a consulta de [HORN e JOHNSON \(1985\)](#).

### 3.1 Conceitos de Análise matricial

Segundo [GREGÓRIO \(2008\)](#), o produto interno  $x^T y$  em  $\mathbb{R}^n$ , onde  $x$  e  $y$  são vetores dados, pode ser facilmente estendido ao espaço das matrizes retangulares levando em consideração a aplicação  $vec : M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \cdot n}$ , definida por  $vec(A) = (a_{11}, \dots, a_{n1}, a_{12}, \dots, a_{n2}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{nn})^T$ , que transforma matrizes em vetores. Dadas matrizes  $A, B \in M_{n \times n}$ , o produto interno entre  $A$  e  $B$ , denotado por  $A \bullet B$ , pode ser escrito como

$$A \bullet B = vec(B)^T vec(A) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} = tr(B^T A), \quad (3.1)$$

com norma resultante dada por

$$(A \bullet A)^{\frac{1}{2}} = tr(A^T A)^{\frac{1}{2}} = \|A\|_F, \quad (3.2)$$

onde  $\|A\|_F$  é a norma de Frobenius de  $A$ .

**Teorema 3.1.1** (Teorema espectral para matrizes simétricas). *Uma matriz  $A$  é simétrica se, e somente se, existe uma matriz  $Q$ ,  $n \times n$ , tal que  $Q^T Q = Q Q^T = I$  e  $Q^T A Q = \Lambda$ , onde  $\Lambda$  é real e diagonal.  $\Lambda = Q^T A Q$  é a decomposição de Schur em autovalores da matriz  $A$ .*

**Definição 3.1.1.** *Uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$  é semidefinida positiva se  $x^T A x \geq 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e definida positiva se  $x^T A x > 0$ , para todo  $x \neq 0$ .*

### 3.2 A barreira logarítmica

Segundo [GREGORIO e OLIVEIRA \(2009\)](#), o sucesso dos algoritmos primais-duais em programação semidefinida depende da escolha adequada de uma barreira para o interior do cone das matrizes simétricas semidefinidas positivas, denominado conjunto das matrizes simétricas definidas positivas e denotado por  $S_{++}^n$ . Existem diferentes propostas

de barreiras para o conjunto das matrizes simétricas definidas positivas (veja por exemplo a função traço em (MOSHEYE; ZIBULEVSK, 2000)).

Ainda relata GREGÓRIO (2008) que a escolha da barreira padrão  $-\ln \det(X)$ , apresentada por ROTH AUS (1960), talvez represente a escolha mais natural possível de barreira em  $S_{++}^n$ . O conjunto  $S_{++}^n$  pode ser caracterizado como  $\{X \in S^n : \lambda_i(X) > 0, i = 1, \dots, n\}$ , onde  $S^n$  denota o conjunto de matrizes simétricas. Topologicamente,  $S^n = T_X S_{++}^n$ , para qualquer ponto  $X \in S_{++}^n$ . Note que, se  $X \in S_{++}^n$ , para  $x \in \mathbb{R}^n$  igual a um autovetor de  $X$ ,  $x^T X x = \lambda > 0$ , onde  $\lambda$  é o autovalor de  $X$  associado ao autovetor  $x$ , supondo  $x$  normalizado. Por outro lado, a recíproca também é válida, ou seja, se os autovalores de uma matriz simétrica  $X$  são todos positivos então  $X$  é uma matriz simétrica definida positiva. Esse resultado constitui o que denomina-se por teorema espectral para matrizes simétricas definidas positivas. Veja (HORN; JOHNSON, 1985) para demonstração e maiores detalhes. Para este conjunto, pode-se aplicar a barreira logarítmica

$$F(X) = - \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i(X). \quad (3.3)$$

Podemos verificar que esta função é estritamente convexa e  $F(X) \rightarrow \infty$  quando pelo menos um autovalor de  $X$  tende a zero.

### 3.3 Distância no cone das matrizes simétricas definidas positivas

Nessa seção, apresentamos a expressão da distância riemanniana em  $S_{++}^n$ , e outros resultados pertinentes. Não nos atemos as demonstrações. A síntese da expressão da distância em  $S_{++}^n$  pode ser encontrado em (NESTEROV; TODD, 2002).

Segundo ROTH AUS (1960),  $S_{++}^n$  munido da métrica definida por  $F''$ , é uma variedade riemanniana de curvatura seccional não-positiva ou variedade de Hadamard. O teorema de Hadamard garante então que as curvas que minimizam distâncias entre dois pontos quaisquer em  $S_{++}^n$ , denominadas geodésicas, são obtidas de maneira única.

De acordo com o Lema 1.4 em ROTH AUS (1960), a hessiana de 3.3, em um ponto  $P \in S_{++}^n$ , é a transformação linear  $F'' : S^n \rightarrow S^n$ , que satisfaz  $F''(P)H = P^{-1}HP^{-1}$ . É fácil ver que se  $H \in S^n$ ,  $H \neq 0$ , então

$$\langle F''(P)H, H \rangle_F = \langle P^{-1}HP^{-1}H \rangle_F = \text{Tr}(P^{-1}HP^{-1}H) = \text{Tr}([P^{-1}H]^2) = \|P^{-1}H\|_F^2 > 0,$$

o que mostra que  $F''(P)$  é definida positiva em  $S^n$  e, portanto,  $F$  é estritamente convexa como afirmado anteriormente. Segue que, para cada  $P \in S_{++}^n$ ,  $F''(P)$  define um produto interno em  $S^n$ .

O produto interno e a norma correspondente são dados por

$$\langle A, B \rangle_P = \text{Tr}(P^{-1}AP^{-1}B), \quad \|A\|_P = \langle A, A \rangle_P^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\text{Tr}\{(P^{-1}A)^2\}}, \quad (3.4)$$

para qualquer  $P \in S_{++}^n$  e  $A, B \in T_P S_{++}^n = S^n$ . Para calcular a distância entre duas matrizes  $P_1$  e  $P_2$ , podemos lançar mão da distância euclideana do espaço  $M^{n \times n}$ , isto é

$$d_F(P_1, P_2) = \|P_1 - P_2\|_F \quad (3.5)$$

No entanto, torna-se mais apropriado ao objetivo proposto utilizar a distância riemanniana induzida por 3.4, que é intrínseca à  $S_{++}^n$ .

**Teorema 3.3.1.** *Seja Considere a variedade riemanniana  $(S_{++}^n, \langle, \rangle_P)$ , com  $\langle, \rangle_X$  como definido em 3.4. Dados  $X, Y \in S_{++}^n$ , denote por  $\lambda_i(X^{-\frac{1}{2}}YX^{\frac{1}{2}})$  o  $i$ -ésimo autovalor de  $X^{-\frac{1}{2}}YX^{\frac{1}{2}}$ . Então a distância riemanniana entre  $X$  e  $Y$ , denotada simplesmente por  $d(X, Y)$ , é dada por*

$$d(X, Y) = \left[ \sum_{i=1}^n \ln^2 \lambda_i(X^{-\frac{1}{2}}YX^{\frac{1}{2}}) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.6)$$

e o segmento geodésico  $\gamma$  conectando  $X$  a  $Y$ , por

$$\gamma(t) = X^{\frac{1}{2}} \left( X^{-\frac{1}{2}}YX^{\frac{1}{2}} \right)^t X^{\frac{1}{2}}. \quad (3.7)$$

*Demonstração.* Ver [NESTEROV e TODD \(2002\)](#). □

Decorre imediatamente de 3.7 que se  $\Lambda, \bar{\Lambda} \in S_{++}^n$  são diagonais, então o segmento geodésico ligando  $\Lambda$  e  $\bar{\Lambda}$  contém apenas matrizes diagonais. Em outras palavras, o conjunto das matrizes diagonais definidas positivas, denotado por  $\Omega_{++}^n$ , é um subconjunto convexo de  $S_{++}^n$ .

Em [MOAKHER \(2005\)](#), podemos encontrar a expressão da geodésica  $\zeta$ , em  $S_{++}^n$ , que satisfaz  $\zeta(0) = X$ ,  $\zeta'(0) = V$ . Analiticamente ela é dada por

$$\zeta(t) = X^{\frac{1}{2}} e^{tX^{-\frac{1}{2}}VX^{-\frac{1}{2}}} X^{\frac{1}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Segundo [ROTHAUS \(1960\)](#), a distância riemanniana 3.6 é invariante sob inversão, isto é

$$d(P^{-1}, Q^{-1}) = d(P, Q), \quad (3.9)$$

e é invariante sob transformações congruentes, ou seja,

$$d(P, Q) = d(S^T P S, S^T Q S), \quad \forall S \in Gl(n). \quad (3.10)$$

onde  $Gl(n)$  é o conjunto das matrizes quadradas não-singulares de orden  $n$ .

**Definição 3.3.1.** *Seja  $f : S_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . O gradiente natural de  $f$ , definido por  $grad f : S_{++}^n \rightarrow S^n$ , é a aplicação que satisfaz  $\langle grad f(P), \bar{S} \rangle_P = \langle \nabla f(P), \bar{S} \rangle_F, \forall \bar{S} \in S^n$  onde  $\nabla f(P)$  é o gradiente euclidiano de  $f$ , calculado em  $P$ .*

*Como  $\langle grad f(P), \bar{S} \rangle_P = \langle P^{-1} grad f(P) P^{-1}, \bar{S} \rangle_F$ , segue imediatamente que*

$$grad f(P) = P \nabla f(P) P. \quad (3.11)$$

## 3.4 Espaço de tensores $S_{++}^n$

### 3.4.1 Exponencial e Logarítmo

Temos agora como foco principal o espaço  $S_{++}^n$  como espaço de tensores, (veja (PENNEC et al., 2005) para maiores esclarecimentos). Nosso objetivo é evidenciar algumas propriedades intrínsecas à  $S_{++}^n$ , bem com à estrutura riemanniana ali definida. A exponencial de qualquer matriz pode ser definida usando a série  $exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ , onde  $A$  é uma matriz definida positiva. Como  $A$  é definida positiva, podemos simplificar esta representação da seguinte forma: seja  $Q \Lambda Q^T$  a decomposição de Schur de  $A$  ( veja (FALEIROS, 2013) para maiores detalhes), onde  $Q \in Gl(n)$  é uma matriz ortogonal, ou seja,  $Q^T Q = Q Q^T = I$  e  $\Lambda = DIAG(\lambda_i)$ , a matriz diagonal contendo os autovalores de  $A$  em sua diagonal. Com isso, podemos escrever qualquer potência de  $A$  sob a forma  $A^k = Q \Lambda^k Q^T$  onde  $\Lambda^k = DIAG(\lambda_i^k)$ . Com essa fatoração, podemos mapear a exponencial  $A$  através da série.

$$exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} Q \Lambda^k Q^T. \quad (3.12)$$

A série acima converge, qualquer que seja a escolha de  $A \in S^n$ . Seja  $A$  um tensor simétrico definido positivo. Como  $A$  pode ser representado por uma matriz simétrica definida positiva, com base na decomposição de Schur, tem-se  $A = Q \Lambda Q^T$ . Segue daí que, a função

$$ln(A) = Q ln(\Lambda) Q^T, \quad \text{onde } ln(\Lambda) = DIAG(ln(\lambda_i)) \quad (3.13)$$

está bem definida. A expressão para a função logarítmica de tensores simétricos definidos positivos descrita anteriormente pode ser obtida a partir de uma série de potências, assim como feito com a função exponencial em (PENNEC et al., 2005).

Podemos perceber que a função logarítmica é a inversa da exponencial. Assim, a matriz exponencial realiza o mapeamento um-a-um entre o espaço de matrizes simétricas e o espaço de tensores.

### 3.4.2 Raíz Quadrada

Seja  $A \in S_{++}^n$  um tensor simétrico definido positivo. Denomina-se por raiz quadrada de  $A$ , o tensor  $B \in S_{++}^n$  que satisfaz  $BB = A$ . Nesse caso  $B$  é representado por  $A^{\frac{1}{2}}$ .

**Lema 3.4.1.** *Seja  $A = Q\Lambda^2Q^T$  a diagonalização de  $A$ , então,  $A^{\frac{1}{2}} = Q\Lambda Q^T$  é a raiz quadrada de  $A$  e é obtida de maneira única.*

*Demonstração.* Considere duas matrizes  $A_1^{\frac{1}{2}}$  e  $A_2^{\frac{1}{2}}$  raízes quadradas positivas de  $A$ . Então,  $A_1^{\frac{1}{2}} = A$  e  $A_2^{\frac{1}{2}} = A$ . Assim, diagonalizando, temos as matrizes diagonais  $\Lambda_1^2 = \Lambda_2^2$ . Dessa forma,  $A_1^{\frac{1}{2}} = A_2^{\frac{1}{2}}$ .  $\square$

Seguindo este raciocínio temos a seguinte propriedade:

$$A^{\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{1}{2}(\ln A)\right). \quad (3.14)$$

## 3.5 Tipos de Médias

Há quase 2500 anos atrás, os Gregos antigos definiram uma lista de 10 (atualmente 11) distintas "médias" (MOAKHER, 1981) e (SPIESSER, 1993). Todas elas são construídas usando proporções geométricas. Algumas são bem conhecidas: média aritmética, média geométrica e a média harmônica.

Essas médias, originalmente, foram criadas para 2 números positivos e depois foram naturalmente generalizadas para um conjunto finito de números positivos. Neste caso, para um conjunto de  $m$  números positivos,  $x_1, \dots, x_m$ , a média aritmética é o número  $\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$ . Essa média possui uma propriedade variacional, ou seja, ela pode ser obtida como segue

$$\bar{x} = \arg \min_{x>0} \sum_{i=1}^m d_e(x_i, x)^2 \quad (3.15)$$

onde  $d_e(x, y) = |x - y|$  é a distância euclidiana usual em  $\mathbb{R}$ .

A média geométrica de  $x_1, \dots, x_m$ , dada por  $\bar{x} = \sqrt[m]{x_1 x_2 \dots x_m}$ , também possui uma formulação variacional. Ela pode ser definida como

$$\bar{x} = \arg \min_{x>0} \sum_{i=1}^m d_h(x_i, x)^2, \quad (3.16)$$

onde  $d_h(x, y) = |\log x - \log y|$  é a distância hiperbólica entre  $x$  e  $y$ .

A média harmônica de um conjunto de  $m$  números positivos, é simplesmente dada pela inversa da média aritmética, isto é,

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x_i)^{-1}. \quad (3.17)$$

Segundo MOAKHER (2002), se  $M$  é uma variedade riemanniana com métrica  $d(\cdot, \cdot)$ , então, fazendo analogia as formulações apresentadas em 3.15 e 3.16, a média riemanniana entre  $m$  pontos  $x_1, \dots, x_m \in M$  é definida por

$$\bar{x} = \arg \min_{x \in M} \sum_{i=1}^m d(x_i, x)^2. \quad (3.18)$$

Ainda segundo MOAKHER (2002), esta definição não garante solução única. Como observado, para um conjunto de dados, ao qual é, ao mesmo tempo, um subconjunto de um cone convexo, diferentes noções de médias podem ser introduzidas, com respeito a diferentes métricas.

### 3.5.1 Médias em métricas de matrizes simétricas positivas definidas

Usando a equação 3.4 juntamente com a função distância, podemos introduzir duas diferentes noções de média em  $S_{++}^n$ .

**Definição 3.5.1.** *A média no caso euclidiano, isto é, associada a métrica 3.5, de  $m$  matrizes simétricas definidas positivas  $X^1, \dots, X^m$  é definida como*

$$\mu_e = \arg \min_{X \in S_{++}^n} \sum_{i=1}^m \|X^i - X\|_F^2. \quad (3.19)$$

**Definição 3.5.2.** *A média no caso riemanniano, isto é, associada a métrica riemanniana 3.6, de  $m$  matrizes simétricas definidas positivas  $X^1, \dots, X^m$  é definida como*

$$\mu_r = \arg \min_{X \in S_{++}^n} \sum_{i=1}^m d^2(X^i, X). \quad (3.20)$$

## 4 Ponto proximal com decomposição de Schur

Uma versão do método de ponto proximal para variedades de Hadamard é apresentada por (FERREIRA; OLIVEIRA, 2002). Em GREGORIO e OLIVEIRA (2009), está fundamentado o algoritmo de ponto proximal com decomposição Schur para matrizes simétricas semidefinidas positivas. Este algoritmo está voltado para problemas convexos e irrestritos em  $S_{++}^n$  com respeito a métrica dada pela hessiana de 3.3.

Esta metodologia consiste em subdividir o espaço de busca  $S_{++}^n$  em dois espaços, um contendo matrizes diagonais definidas positivas e outro, o grupo ortogonal, ambos visto sob a ótica riemanniana.

Segundo GREGORIO e OLIVEIRA (2009), o algoritmo de ponto proximal com decomposição Schur possui estrutura semelhante à dos métodos preditores-corretores, onde, primeiramente fixa-se uma matriz ortogonal e determina-se a solução do subproblema definido no conjunto das matrizes diagonais definidas positivas e em seguida, fixa-se esta solução obtida e dá-se um passo corretor no grupo ortogonal.

A viabilidade do método é assegurada pelo teorema de Schur para matrizes simétricas positivas definidas e o teorema espectral para matrizes simétricas definidas positivas (HORN; JOHNSON, 1985).

Esses teoremas garantem que toda matriz simétrica  $A$  pode ser decomposta sob a forma  $Q\Lambda Q^T$ , com  $Q$  ortogonal,  $\Lambda$  diagonal com os elementos da diagonal positivos.

### 4.1 Método de ponto proximal aplicado a média riemanniana em

$$S_{++}^n$$

O problema de média riemanniana em  $S_{++}^n$  segundo MOAKHER (2005), consiste em

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m d^2(X^i, Y), \\ & \text{sujeito a} && Y \in S_{++}^n, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde  $X^i \in S_{++}^n, i = 1 \dots, m$ , são dados de entrada do problema, com a distância  $d$  em  $S_{++}^n$  definida em 3.6.

Seja  $f$  a função objetivo do problema da média riemanniana de matrizes simétricas definidas positivas. Dado  $X^0 \in S_{++}^n, \beta^0 > 0$ , segundo GREGORIO e OLIVEIRA (2009),



a iteração principal do algoritmo de ponto proximal para determinar a solução do problema da média riemanniana em  $S_{++}^n$  pode ser reescrito como

$$X^{k+1} = \arg \min \{ f(Y) + \frac{1}{2} \beta^k d^2(X^k, Y) \mid Y \in S_{++}^n \}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.2)$$

Em MOAKHER (2005), está definido que o gradiente euclidiano de  $f_X(Y) = \frac{1}{2} d^2(X, Y)$  é dado por  $\nabla f_X(Y) = \ln(X^{-1}Y)Y^{-1}$ . Segue então, da relação 3.11, que  $\text{grad } f_X(Y) = Y \ln(X^{-1}Y)Y^{-1}Y = Y \ln(X^{-1}Y)$ .

**Teorema 4.1.1.** *A sequência  $\{X^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  gerada por 4.2 está bem definida e é caracterizada por*

$$\sum_{i=1}^m \ln(X^{i-1}X^{k+1}) = -\beta^k \ln(X^{k-1}X^{k+1}). \quad (4.3)$$

*Demonstração.* Ver Teorema 3.3 em FERREIRA e OLIVEIRA (2002). □

**Teorema 4.1.2.** *Seja  $\{X^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  a sequência gerada por 4.2. Se  $\{\beta^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  é tal que  $\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{\beta^k}) = +\infty$ , então  $\lim_{k \rightarrow \infty} X^k = X^*$ , onde  $X^* = \text{argmin}\{f(X) \mid X \in S_{++}^n\}$ .*

*Demonstração.* Ver Teorema 6.1 em FERREIRA e OLIVEIRA (2002). □

## 4.2 Algoritmo de ponto proximal com decomposição Schur

Segundo GREGORIO e OLIVEIRA (2009), uma das vantagens desse método é a presença de uma versão inexata, onde o iterado  $X^{k+1}$  é obtido de maneira aproximada. Admita que  $k$  é a iteração corrente do algoritmo de ponto proximal. Dados  $\Lambda_0^k \in \Omega_{++}^n$ ,  $Q_0^k \in O_n$ ,  $\beta^0, \epsilon^0 > 0$ , (onde  $O_n$  corresponde ao conjunto das matrizes ortogonais), pela versão inexata do algoritmo de ponto proximal com decomposição Schur, inicie

$$Y_0^k = (X^k)^{\frac{1}{2}} Q_0^k \Lambda_0^k Q_0^{kT} (X^k)^{\frac{1}{2}} \text{ e } j = 0.$$

Se  $\| \sum_{i=1}^m \ln(X^{i-1}Y_j^k) + \beta^k \ln(X^{k-1}Y_j^k) \|_F = 0$  então, pelo Teorema 4.3 temos que  $Y_j^k = X^{k+1}$ . Para versão inexata essa condição é relaxada para  $\| \sum_{i=1}^m \ln(X^{i-1}Y_j^k) + \beta^k \ln(X^{k-1}Y_j^k) \|_F < \epsilon^k$ . Caso contrário, calcula-se  $\bar{\Lambda}_{j+1}^k$  como solução do problema

$$\min \{ f(X^{k\frac{1}{2}} Q_j^k \Lambda Q_j^{kT} X^{k\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} \beta^k f_{X^k}(X^{k\frac{1}{2}} Q_j^k \Lambda Q_j^{kT} X^{k\frac{1}{2}}) \mid \Lambda \in \Omega_{++}^n \}. \quad (4.4)$$

Para atualizar  $Q_j^k$ , determina-se  $Q_{j+1}^k \in O_n$  e  $\Lambda_{j+1}^k \in \Omega_{++}^n$ , tal que

$$\Lambda_{j+1}^k = Q_{j+1}^k{}^T [X^{k-\frac{1}{2}} \left( X^{k\frac{1}{2}} Q_j^k \bar{\Lambda}_{j+1}^k Q_j^{kT} X^{k\frac{1}{2}} \right) X^{k-\frac{1}{2}}] Q_{j+1}^k. \quad (4.5)$$

Pelo Lema 5, GREGORIO e OLIVEIRA (2009) garante que  $\Lambda_{j+1}^k$  e  $\bar{\Lambda}_{j+1}^k$  são similares. Segue ainda que  $Y_{j+1}^k = X^{k\frac{1}{2}} Q_{j+1}^k \Lambda_{j+1}^k Q_{j+1}^{kT} X^{k\frac{1}{2}} = X^{k\frac{1}{2}} Q_j^k \bar{\Lambda}_{j+1}^k Q_j^{kT} X^{k\frac{1}{2}} = \bar{Y}_{j+1}^k$ . Isso mostra que a forma de atualização de  $Q_j^k$ , como proposto, não altera o valor da função objetivo regularizada. A proposta de atualização de  $Q_j^k$  que substitui a etapa 4.5, corresponde admitir como  $Q_{j+1}^k$ , uma solução local do problema

$$\min \{ f(X^{k\frac{1}{2}} Q \Lambda_{j+1}^k Q^T X^{k\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} \beta^k f_{X^k}(X^{k\frac{1}{2}} Q \Lambda_{j+1}^k Q^T X^{k\frac{1}{2}}) \mid Q \in \mathbf{O}_n \} \quad (4.6)$$

**Lema 4.2.1.** *Existe solução  $Q_{j+1}^k$  para o problema 4.6.*

*Demonstração.* Segue imediatamente do Teorema de Weierstrass.  $\square$

Este algoritmo descreve os passos utilizados para a realização do cálculo da média riemanniana:

Dados  $\epsilon > 0$ ,  $\beta^0 > 0$ ,  $\epsilon^0 > 0$  e  $X^0 \in S_{+++}^3$ ;  
 $k \leftarrow 0$ ;  
 Enquanto  $\| \sum_{i=1}^m \ln(X^{i-1} X^k) \|_F > \epsilon$

Escolha  $\Lambda_0^k \in \Omega_{+++}^3$ ,  $Q_0^k \in \mathbf{O}_3$ ;  
 $Y_0^k \leftarrow (X^k)^{\frac{1}{2}} Q_0^k \Lambda_0^k Q_0^{kT} (X^k)^{\frac{1}{2}}$ ;  
 $j \leftarrow 0$ ;  
 Enquanto  $\| \sum_{i=1}^m \ln(X^{i-1} Y_j^k) + \beta^k \ln(X^{k-1} Y_j^k) \|_F > \epsilon^k$ ;  
 Calcule  $\Lambda_{j+1}^k$  como;  
 $\min \{ f(X^{k\frac{1}{2}} Q_j^k \Lambda_{j+1}^k Q_j^{kT} X^{k\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} \beta^k f_{X^k}(X^{k\frac{1}{2}} Q_j^k \Lambda_{j+1}^k Q_j^{kT} X^{k\frac{1}{2}}) \mid \Lambda \in \Omega_{+++}^n \}$ .  
 Calcule  $Q_{j+1}^k$  como;  
 $\min \{ f(X^{k\frac{1}{2}} Q \Lambda_{j+1}^k Q^T X^{k\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} \beta^k f_{X^k}(X^{k\frac{1}{2}} Q \Lambda_{j+1}^k Q^T X^{k\frac{1}{2}}) \mid Q \in \mathbf{O}_n \}$ .  
 $Y_{j+1}^k \leftarrow (X^k)^{\frac{1}{2}} Q_{j+1}^k \Lambda_{j+1}^k Q_{j+1}^{kT} (X^k)^{\frac{1}{2}}$ ;  
 $j \leftarrow j + 1$ ;  
 Fim;

$X^{k+1} \leftarrow Y_j^k$ ;  
 $\beta^{k+1} \leftarrow \tau_1 \beta^k$  ( $\tau_1 \in (0, 1)$ );  
 $\epsilon^{k+1} \leftarrow \tau_2 \epsilon^k$  ( $\tau_2 \in (0, 1)$ );  
 $k \leftarrow k + 1$ ;  
 Fim.

# 5 Formação de Imagem por DTI-RM

## 5.1 Princípio da formação de imagem por DTI-RM

### 5.1.1 Aspectos da difusão e sua representação

DTI-RM é uma modalidade recente de ressonância magnética (RM) usada para descrever a relativa mobilidade das moléculas de água. Em DTI-RM, um tensor descreve a difusão local da molécula de água onde este é calculado permitindo a qualificação da microestrutura do tecido vivo.

Difusão é um termo utilizado para descrever o movimento randômico das moléculas de água no tecido de acordo com a teoria do movimento browniano. Este movimento é capturado em cada voxel de uma imagem, quando aplicado gradientes de campo magnético.

Existem duas formas de difusão: isotrópica e anisotrópica. A primeira acontece quando as moléculas tem igual probabilidade de se movimentar em todas as direções. Para isso, precisa-se apenas de um coeficiente de difusão,  $D$ , para sua descrição. Já na segunda, existente nos tecidos biológicos, a mobilidade da molécula de água é alterada pela formação celular.

No cérebro, por exemplo, encontramos acentuada diferença de difusão entre as substância branca e cinzenta, onde, na primeira a difusão ocorre preferencialmente ao longo dos eixos mais alongados das estruturas celulares (MORI; ZHANG, 2006).

Com a ressonância magnética (RM), podemos obter por meio da aplicação de gradientes de campo magnético, a difusão, durante a aplicação da sequência de eco spin. Para maiores esclarecimentos veja (MAZZOLA, 2009) e (MCROBBIE et al., 2007).

A intensidade do sinal de RM em cada voxel da imagem é obtida através da aplicação de uma série de campos magnéticos e pulsos de radiofrequência (MORI, 2007). A medida que os parâmetros de aquisição são alterados, o sinal das imagens podem refletir diversas características dos tecidos, o que traz informações úteis, para diagnóstico de doenças específicas (MORI; BARKER, 1999). A figura 1 mostra duas imagens de ressonância magnética extraídas de (MITTIMANN, 2009).

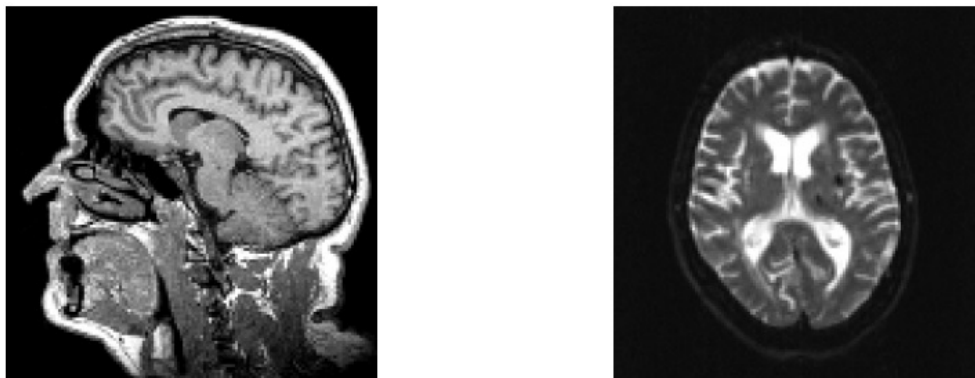


Figura 1 – Volume de imagens de ressonância magnética.

É através da ressonância magnética que é possível medir a intensidade da difusão da água. Para fazê-lo, dois gradientes são aplicados aos campos magnéticos, separados por um intervalo de tempo. Ambos os gradientes têm a mesma intensidade e direção, porém sentidos opostos. Os gradientes fazem com que o campo magnético seja aplicado de forma diferenciada, o que confere excitações diferentes aos prótons conforme sua localização ao longo dos gradientes. O segundo gradiente anula a excitação produzida pelo primeiro, pois tem sentido oposto, porém essa anulação não acontece com os prótons que se difundiram ao longo da direção do gradiente. O sinal contido nas imagens obtidas dessa forma contém justamente informação a respeito dos prótons que se moveram ao longo do gradiente.

A Figura 2 extraída de (IMAGING, 2013), mostra uma sequência de imagens obtidas com diferentes gradientes aplicados ao campo magnético. Todas as imagens são do mesmo exame e da mesma fatia.

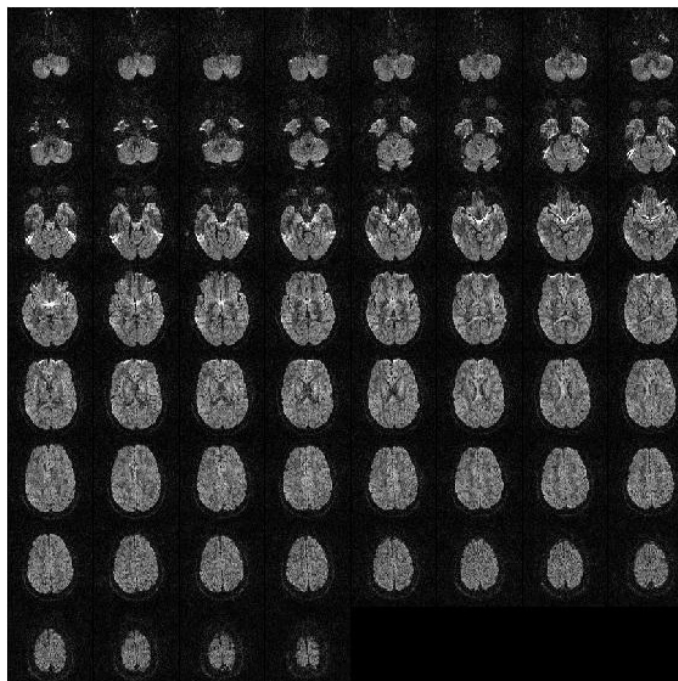


Figura 2 – Fatia obtida usando a ferramenta Matlab.

Através da equação de Stejskal-Tanner (STEJSKAL; TANNER, 1965) é possível relacionar o sinal  $S$  obtido com os gradientes ativos ao coeficiente de difusão  $D$  do meio:

$$\ln\left(\frac{S}{S_0}\right) = -bD \quad (5.1)$$

onde  $S_0$  é a intensidade do sinal sem a aplicação dos gradientes e  $b$  é uma constante calculada a partir dos parâmetros de aquisição das imagens. Segundo (BASSER et al., 1994) o valor de  $b$  pode ser definido por:

$$b = \gamma^2 g^2 \delta^2 \left( \Delta - \frac{\delta}{3} \right) \quad (5.2)$$

onde  $\gamma$  é a razão giromagnética,  $g$  a intensidade do gradiente,  $\delta$  a largura do gradiente e  $\Delta$  o intervalo entre gradientes. O sinal  $S_0$  é obtido com  $b = 0$ .

Para descrever este movimento de água nas estruturas celulares, torna-se necessário a utilização de um tensor. Este tensor é uma matriz  $3 \times 3$ , simétrica, definida positiva, gerada pela aplicação de três gradientes ortogonais e independentes entre si,  $x$ ,  $y$  e  $z$  em 6 direções diferentes:

$$D = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Além da representação matricial do tensor, pode-se representá-lo na forma de elipsóide, como mostra a figura 3. Nesta representação, se a difusão for anisotrópica, então, o elipsóide será alongado e a medida que se aproxima do isotrópico, a conformação vai se tornando circular (MORI; ZHANG, 2006).

A matriz do tensor é constituída por nove elementos, por ela ser simétrica existem três elementos iguais ( $D_{xy} = D_{yx}$ ,  $D_{xz} = D_{zx}$  e  $D_{yz} = D_{zy}$ ) (BEAULIEU, 2005).

A partir deste tensor de difusão é possível obter os autovetores ( $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$ ) e autovalores ( $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ ) para cada um dos eixos dos elipsóides, (MORI; ZHANG, 2006).

A aquisição do tensor de difusão é feito através de uma imagem sem gradientes,  $b = 0$ , e um conjunto de imagens com gradientes específicos em várias direções que podem variar de 6, 25, 32 e 61 direções. A intensidade de sinal em cada pixel (voxel) das imagens com gradiente e sem gradiente são representados por  $S$  e  $S_0$ , respectivamente.

Em meio isotrópico o coeficiente representado pela equação 5.1 é suficiente para caracterizar a difusão, mas, quando se trata de meios anisotrópicos o tensor de difusão é

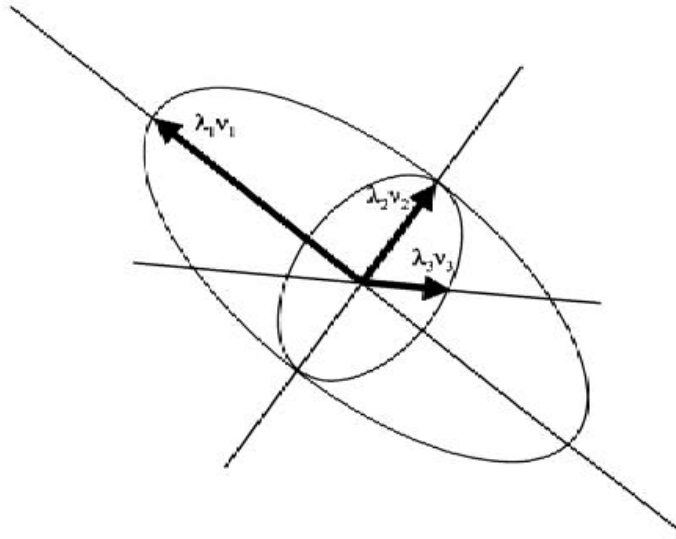


Figura 3 – Representação do elipsóide e seus autovalores e autovetores, (PEREIRA, 2008).

utilizado. Desta forma, a equação (5.1) sofre uma adaptação (BASSER; PAJEVIC, 2003).

$$\ln\left(\frac{S}{S_0}\right) = -bg^T g \cdot D \quad (5.4)$$

onde temos  $D$  como o tensor de difusão, a operação " $\cdot$ ", refere-se ao produto por escalar e  $g$  é um vetor unitário na mesma direção do gradiente aplicado.

Neste momento nos deparamos com o fato de que a resolução desta equação só é possível com pelo menos sete imagens conhecidas, para se determinar  $D$ . Uma com gradiente de campo magnético nulo e seis com gradiente aplicados em direções não-colineares. Desta forma, obtemos um sistema de equações

$$\ln\left(\frac{S_i}{S_0}\right) = -bg_i^T g_i \cdot D \quad (5.5)$$

onde as variáveis a serem determinadas, são os seis elementos que compõe o tensor  $D$ , visto que é simétrico.

### 5.1.2 Cálculo do tensor

Para determinar o tensor  $D$ , precisamos resolver o sistema 5.5. Para isso, expresaremos-lo sob uma forma mais conveniente para organização das ideias e compreensão por parte do leitor. A estrutura resultante para o sistema é

$$AX = B, \quad (5.6)$$

onde  $A$  é uma matriz dos coeficientes do sistema, o vetor  $X$  são as variáveis e o vetor  $B$  as constantes (WESTIN et al., 2002) e (STEJSKAL; TANNER, 1965).

Admitindo que o número mínimo de imagem seja sete, o vetor  $B$ , pode ser definido como

$$B = \begin{bmatrix} \ln(s_1/S_0) \\ \ln(s_2/S_0) \\ \ln(s_3/S_0) \\ \ln(s_4/S_0) \\ \ln(s_5/S_0) \\ \ln(s_6/S_0) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

que corresponde ao lado esquerdo sistema 5.5.

Para obter a matriz  $A$ , do lado direito do sistema 5.5, levamos em consideração que  $D$  pode ser escrito como na equação 5.3. Contudo, calculamos para cada gradiente  $g_i$ , o lado direito da equação 5.5 que corresponde a uma das seis imagens adquiridas na difusão. Veja

$$-bg_i^T g_i \cdot D = -b \begin{bmatrix} g_{ix}g_{ix} & g_{ix}g_{iy} & g_{ix}g_{iz} \\ g_{ix}g_{iy} & g_{iy}g_{iy} & g_{iy}g_{iz} \\ g_{ix}g_{iz} & g_{iy}g_{iz} & g_{iz}g_{iz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

resolvendo a operação de matrizes do lado direito, temos a seguinte expansão

$$= -b(g_{ix}^2 d_{xx} + g_{iy}^2 d_{yy} + g_{iz}^2 d_{zz} + 2g_{ix}g_{iy}d_{xy} + 2g_{ix}g_{iz}d_{xz} + 2g_{iy}g_{iz}d_{yz}). \quad (5.9)$$

Extraindo da expansão acima os coeficientes das variáveis  $d_{xx}$ ,  $d_{yy}$ ,  $d_{zz}$ ,  $d_{xy}$ ,  $d_{xz}$  e  $d_{yz}$ , podemos montar a matriz  $A$  da seguinte forma

$$A = -b \begin{bmatrix} g_{1x}^2 & g_{1y}^2 & g_{1z}^2 & 2g_{1x}g_{1y} & 2g_{1x}g_{1z} & 2g_{1y}g_{1z} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{6x}^2 & g_{6y}^2 & g_{6z}^2 & 2g_{6x}g_{6y} & 2g_{6x}g_{6z} & 2g_{6y}g_{6z} \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

O sistema finalmente pode ser resolvido, através do método de eliminação de GAUSS, decomposição LU ou algum método iterativo. Para mais detalhes sobre estes métodos, ver (BOLDRINI et al., 1980) e (PULINO, 2013).

### 5.1.3 Índices invariantes

O tensor de difusão  $D$  contém várias informações e, muitas aplicações requerem uma simples noção de quantidade de anisotropia. No entanto, para medições quantitativas

no material branco cerebral, um único número é mais útil para comparar diferentes grupos ou para monitorar mudanças no mesmo. Este número é chamado de índice de difusão anisotropia (IDA), e vários foram sugeridos.

Os IDA's mais utilizados variam de 0 (isotrópico) a 1 (anisotrópico), e eles podem ser calculados a partir dos autovalores associados aos tensores de difusão.

A partir dos tensores de difusão podemos calcular uma série desses índices, que ajudam a caracterizá-los, especialmente no que se refere à sua forma e tamanho. Esses escalares são invariantes, ou seja, têm o mesmo valor independente da orientação do tensor. A utilidade dos índices está em fornecer informações relevantes sobre cada ponto da imagem, como a organização e conformação dos tensores, veja (BASSER; PAJEVIC, 2003). Nesta seção, denotamos os autovetores do tensor de difusão por  $e_i$  e os autovalores associados a eles por  $\lambda_i$ , com  $i = 1, \dots, 3$ .

Aqui descreveremos alguns desses índices, os mesmos podem ser encontrados em (BASSER; PAJEVIC, 2003). São eles:

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (5.11)$$

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3, \quad e \quad (5.12)$$

$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \quad (5.13)$$

A invariância desses índices decorre diretamente do fato de que não se baseiam nos elementos do tensor, mas nos autovalores, que são em si invariantes. O índice  $I_1$  é um escalar bem conhecido pela designação de traço do tensor. Através dele, podemos definir outro índice muito importante, a difusidade média que é a média entre os autovalores associados ao tensor de difusão. Esta, será definida como

$$I_4 = \frac{I_1}{3}$$

Podemos definir também, a magnitude do tensor, que corresponde a sua norma, com respeito ao seu espectro. Neste caso, tem-se

$$I_5 = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}$$

Com base nos índices apresentados, podemos definir o índice invariante de anisotropia fraccional ( $AF$ ) de um tensor como

$$AF = \sqrt{\frac{3[(\lambda_1 - I_4) + (\lambda_2 - I_4) + (\lambda_3 - I_4)]}{2I_5}} \quad (5.14)$$



O índice  $AF$  assume valores no domínio  $[0, 1]$ . Um meio totalmente isotrópico tem como resultado  $AF = 0$ , e um meio em que uma das direções de difusão é muito maior que as demais, isto é,  $\lambda_1 \gg \lambda_2 \approx \lambda_3$ , resulta em um valor de  $AF$  próximo de 1. Baseando-se na relação entre os autovalores do tensor de difusão, em (WESTIN et al., 2002) a difusão foi dividida em três casos

- Caso linear, em que  $\lambda_1 \gg \lambda_2 \approx \lambda_3$ : a difusão acontece principalmente na direção do autovetor  $e_1$ ;
- Caso planar, em que  $\lambda_1 \approx \lambda_2 \gg \lambda_3$ : a difusão restringe-se ao plano definido pelos autovetores  $e_1$  e  $e_2$ ;
- Caso esférico, em que  $\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx \lambda_3$ : a difusão é isotrópica.

Para mais detalhes sobre outros índices invariantes, ver (BASSER; PAJEVIC, 2003).

## 6 Filtro de Média Riemanniana de dados tensoriais

Difusão tensorial de imagem por ressonância magnética(DTI-RM) é uma modalidade que descreve a difusão da molécula de água no tecido, o que pode ajudar a conhecer a estrutura interna do mesmo. O tensor resultante é uma quantificação macroscópica de um fenômeno que ocorre em nível molecular, e como visto na seção anterior, é representado por uma matriz simétrica definida positiva (BASSER; PAJEVIC, 2003).

Quando se operam dados reais, grande quantidade deles não cumprem a definição positiva, devido a fatores externos que alteram as propriedades do meio, incluindo técnicas de captação desses dados e ferramentas para o processamento dos mesmos.

Por outro lado, existem ferramentas para o processamento de imagens, como a média riemanniana, que garantem a propriedade citada. Portanto, quanto a esse aspecto, podemos desenhar um filtro de imagem que preserva a condição de positividade, (MOAKHER, 2005).

A importância de manter a definição positiva para os dados captados esta ligada a representação elipsoidal proposta para tensores, bem como a preservação do sentido da difusão anisotrópica para região observada.

Além de garantir a definição positiva, podemos definir um filtro a partir da média que corrige ruído impulsivo e preserva o contorno das regiões presentes em uma imagem em DTI-RM (ZHANG; EDWIN, 2009). Este trabalho, tem por objetivo aplicar o filtro de média riemanniana de dados tensoriais em imagens captadas por aparelhos de ressonância magnética para eliminar distorções provocadas por interferências externas.

Para computar o filtro de média riemanniana, empregamos uma variante do método de ponto proximal introduzido em (GREGORIO; OLIVEIRA, 2009). Faremos uma comparação do seu desempenho com o desempenho do método do gradiente proposto em (ZHANG; EDWIN, 2009; PENNEC et al., 2005; FLETCHER; JOSHI, 2004) e o método de Richardson, introduzido em (BINI; IANNANZO, 2013).

### 6.1 Filtro de Média Riemanniana

Os filtros clássicos de média e mediana para escala de cinza são filtros não-lineares cuja resposta baseia-se na disposição dos pixels contidos na região de imagem a ser filtrada. Eles substituem o valor do pixel central pela média ou mediana dos pixels vizinhos a ele, (FILHO; NETO, 1999), (ASTOLA; HAAVISTO, 1990), (WELK et al., 2007) e

(TRAHANIAS; VENETSANOPOULOS, 1993). No entanto, nenhum dos trabalhos citados anteriormente emprega a média riemanniana. Apenas médias euclidianas são consideradas.

Em ZHANG e EDWIN (2009) e ZHANG e HANCOCK (2006), foi definido um filtro gaussiano que combina as vantagens do filtro de mediana e do filtro gaussiano anisotrópico. O filtro gaussiano clássico foi proposto por PENNEC et al. (2005) para suavizar os dados de imagem não-lineares.

Partindo do princípio que não queremos suavizar ruídos gaussianos, simplificamos o filtro proposto em (ZHANG; EDWIN, 2009), com o objetivo de resolvermos apenas ruídos impulsivos e preservar bordas.

Para dados de imagem não-euclidiano, o filtro de média pode ser generalizado através da estrutura do espaço, usando as distâncias geodésicas em  $S_{++}^n$ . Neste caso, definimos uma vizinhança de pixels  $W = w_1, \dots, w_m$ ,  $I_0 : \mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3 \rightarrow M$  e determinamos o seguinte filtro

$$I_{media} = \underset{\mu \in S_{++}^n}{\text{minimizar}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{1}{n} d(\mu, w_i)^2 \right\}, \quad i = 1, \dots, m \quad (6.1)$$

onde  $d(X, Y)$  é a distância Riemanniana entre  $X$  e  $Y$  em  $S_{++}^n$ .

Segundo ZHANG e EDWIN (2009) e (PENNEC et al., 2005), o filtro riemanniano em variedade curva em qualquer estágio do processo de difusão, preserva características como a geometria dos dados, isto é, as condições de simetria e positividade são garantidas.

Para o cálculo da média, podemos utilizar a seguinte equação numérica através da utilização dos pixels em escala de cinza

$$W = \{I_{(i+1,j)}, I_{(i-1,j)}, I_{(i,j+1)}, I_{(i,j-1)}, I_{(i-1,j+1)}, I_{(i+1,j-1)}, I_{(i+1,j+1)}, I_{(i-1,j-1)}\}.$$

Aqui  $W$  é um ponteiro indicando 8 tensores  $w_k$ .

$$\mu = \underset{\mu \in S_{++}^n}{\text{arg mim}} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} d(\mu, w_k)^2,$$

$$I_{i,j} = \mu.$$

Um bom ganho que podemos ter com relação a implementação, está ligado a criação de uma segunda imagem que acomodará as médias gerada pelos pixels vizinhos contidos na imagem original, com isso, poderemos fazer comparações entre ambas para avaliar o ganho com relação ao método.

A filtragem leva em conta a posição do pixel. Se observada a figura abaixo, podemos ver que o pixel central  $w_0$  será o elemento de referência para o cálculo da média através da utilização dos vizinhos ao redor dele. Utilizando o processo descrito anteriormente para gerar a média, definimos um novo pixel filtrado que será posicionado nas mesmas coordenadas do pixel de referência em uma nova imagem.

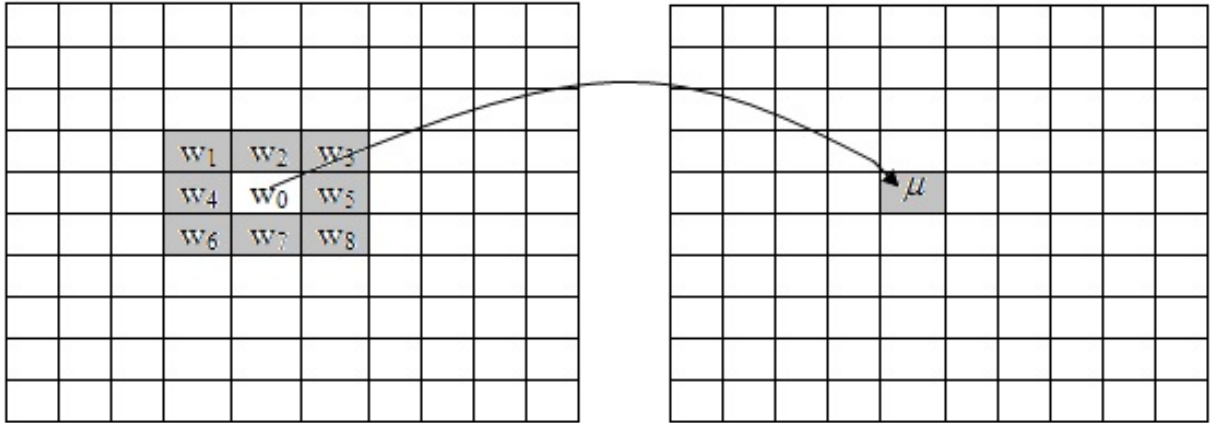


Figura 4 – Esquema de filtragem de uma imagem.

Vemos que  $\mu$  é a média ponderada pelos vizinhos de  $w_0$ . Para cada pixel percorrido, define-se uma vizinhança como descrita na figura acima e posteriormente aplica-se o filtro de média riemanniana sobre eles. O processo computacional é oneroso, pois, para cada célula resolve-se um problema de otimização, além disso, a busca é feita de forma sequencial, onde percorre-se toda a malha elemento por elemento.

## 7 Resultados

Para aplicação do filtro proposto, geramos imagens do cérebro, através de dados reais obtido no formato DICOM disponível em (IMAGING, 2013). Estas imagens foram obtidas com a aplicação de gradientes em 61 direções. Para a visualização, utilizamos a função `plotDTI.m` no Matlab para plotar o campo tensorial (BARMPOUTIS, 2013). Como resultado, obtivemos a figura 5 que serviu como referência para aplicação do filtro.

Para realização dos testes, foi utilizada uma máquina Intel Xeon processor E3-1270V2, 8MB cache, 3.50 GHz, sistema operacional LINUX Ubuntu e uma licença MATLAB 2012a instalada, do projeto: "Algoritmo de ponto proximal com decomposições de Schur em domínios de positividade"/APQ1-FAPERJ/2012-2013, coordenado pelo professor Ronaldo Gregório.



Figura 5 – Imagem representada por Elipsóide.

Selecionamos regiões de interesse (RI ou ROI como usado em Inglês) na imagem, para aplicar o filtro de média riemanniana e comparar as performances dos métodos do gradiente, de ponto proximal e de Richardson-like, quando empregados para computá-lo.

Iniciamos com uma comparação entre os métodos citados, onde, os resultados obtidos referem-se a uma região de interesse de dimensões  $15 \times 25$ . Essa RI inicialmente, foi selecionada de modo que todos métodos descritos concluíssem o processo de filtragem. Utilizamos uma janela contendo 8 tensores vizinhos que foram utilizados para o cálculo da média, os resultados estão dispostos na tabela 1.

Podemos observar que o método do gradiente, assim como, o método de Richardson-Like, apesar de precisar de mais iterações para calcular a média, faz esse cálculo em tempo de execução inferior ao do método de ponto proximal. Visto que o critério de parada,  $d(X^{k+1}, X^k) < 3.16 \times 10^{-9}$ , é o mesmo para todos os métodos.

	Média de Iterações	Tempo de Filtragem (minutos)
Método de Ponto Proximal	10	40
Método Gradiente	120	8
Richardson-Like	25	6.75

Tabela 1 – Experimentos computacionais com os métodos.

Porém, quando os tensores possuem autovalores relativamente pequenos, os métodos do gradiente e de Richardson-like abortam suas iterações, acusando singularidade da matriz. Esses métodos, são implementados usando a decomposição de Cholesky para fatorar a variável do problema e os dados de entrada, que são matrizes simétricas definidas positivas, na forma  $LL^T$ . O espaço de busca para o problema passa a ser então o conjunto de matrizes triangulares inferiores, cujos elementos da diagonal são estritamente positivos. Em geral, decomposições de Cholesky tornam-se instáveis quando aplicadas a matrizes mal-condicionadas. Já o método de ponto proximal, não apresenta essa patologia e sua performance permaneceu estável em todos os testes realizados.

No entanto, conseguimos encontrar uma região onde aplicamos os métodos sem abortagem das operações. Deste modo, obtemos êxito no processo de filtragem e uma melhor comparação entre a performãnce dos filtros. Porém, estamos cientes da robustez do método de ponto prosimal, pois, mesmo não sendo tão rápido, obtivemos resultados satizfatório no processo de filtragem, uma vez que este funcionou em qualquer região selecionada da imagem.

A imagem 6 apresenta os resultados da filtragem através dos métodos descritos anteriormente para a região de interesse referida.

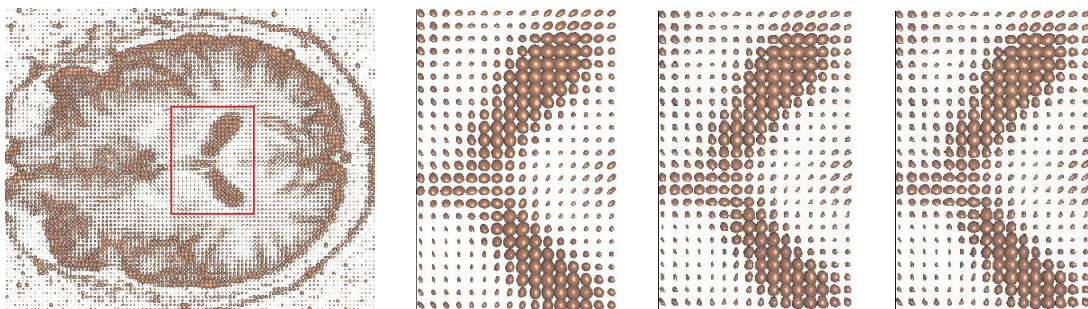


Figura 6 – Filtragem referente aos dados da tabela 1.

A primeira imagem localiza a região de interesse, as próximas imagens referem-se a região filtrada utilizando os métodos de ponto proximal, método do gradiente e Richardson-Like respectivamente.

O filtro de média, emite a média ponderada riemanniana dos vizinhos mais próximos do núcleo que se deseja filtrar. Para regiões de contorno, ele preserva as propriedades

originais da imagem. A figura 7, destaca uma parte da imagem para filtragem e a figura 8 mostra a aplicação do filtro de média riemanniana, na parte destacada, que apresenta ruídos naturais.

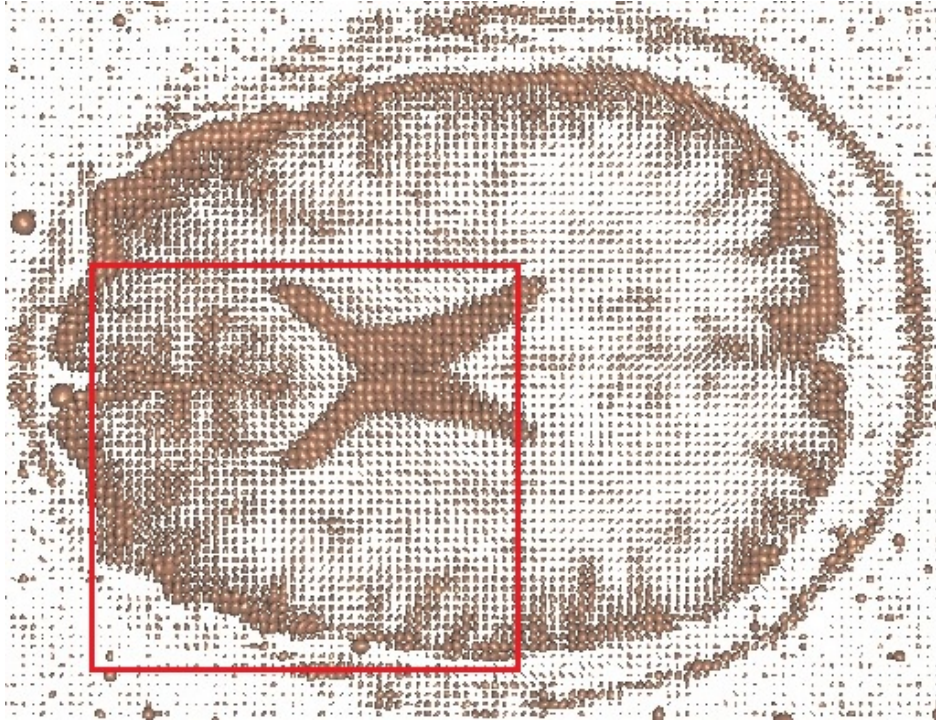


Figura 7 – Imagem com a região de interesse definida.

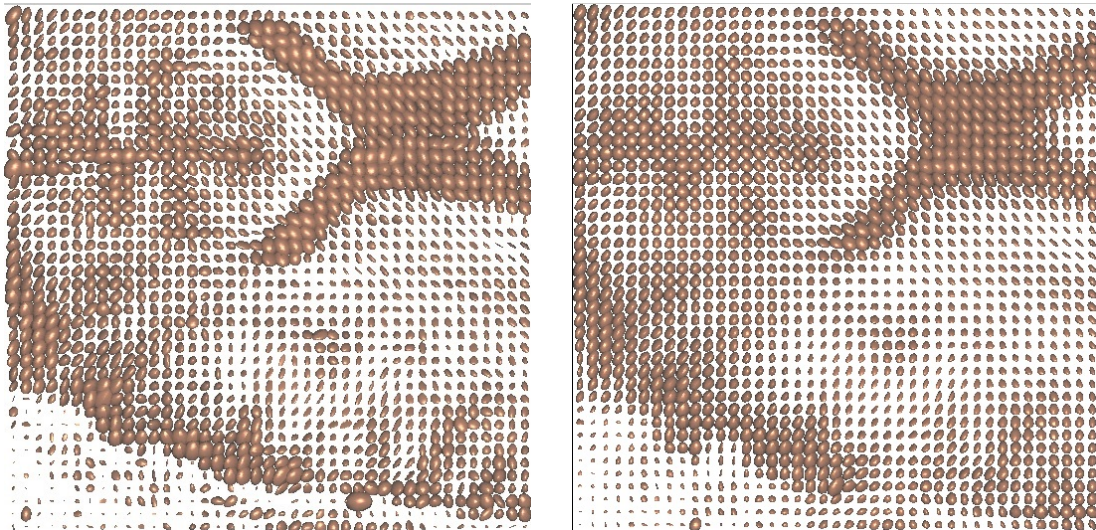


Figura 8 – Comparação das imagens antes e após a aplicação do filtro.

Podemos verificar que houve uma uniformização do campo tensorial sem interferência significativa no contorno da região.

Uma das características principais do filtro de média riemanniana é a eliminação de todas as matrizes (tensores) simétricas definidas negativas, ou seja, ele elimina todos os os

tensores que contém autovalores menores que zero. Essa característica de positividade é muito importante quando se pretende definir um mapa de Anisotropia Fracionada ( $AF$ ), uma vez que a construção do mapa depende da existência de apenas tensores positivos na região observada (BASSER; PAJEVIC, 2003).

A figura 9 corresponde a outra imagem do cérebro. Devemos nos perguntar sobre o por quê da não aplicação do filtro na imagem inteira e sim em regiões de interesse. A questão está ligada ao tempo de execução, pois, para cada pixel de imagem, um problema de otimização é resolvido, dessa forma, como temos imagens cuja a dimensão é  $102 \times 102$  e levando em conta que precisamos de no mínimo 10 segundos para computar uma média, seriam gastos em média 28 horas para filtrar toda a imagem.

Esse é um problema para trabalhos futuros. Como sugestão, destacamos o emprego de técnicas de paralelização do código uma vez que este foi escrito de forma sequencial. A região em destaque na figura 9 novamente refere-se a parte interessada para estudo:

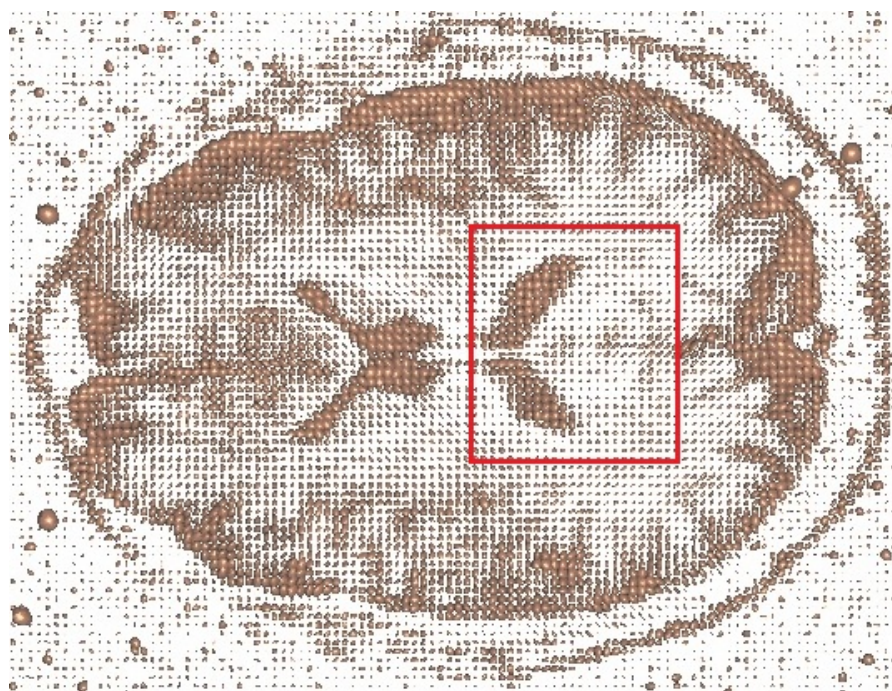


Figura 9 – Imagem real do cérebro destacando a região de interesse para aplicação do filtro.

Na figura 10 as imagens foram posicionadas em planos  $3D$  para melhor visualização dos tensores. A imagem da esquerda corresponde a região selecionada antes da aplicação do filtro e a da direita após a aplicação do mesmo. Podemos perceber que os tensores distribuíram-se de forma homogênea após a aplicação do filtro. Se observarmos as regiões destacadas pelas elipses em azul na imagem à esquerda com a filtrada à direita, podemos perceber uma distribuição mais suave dos tensores das regiões em destaque.



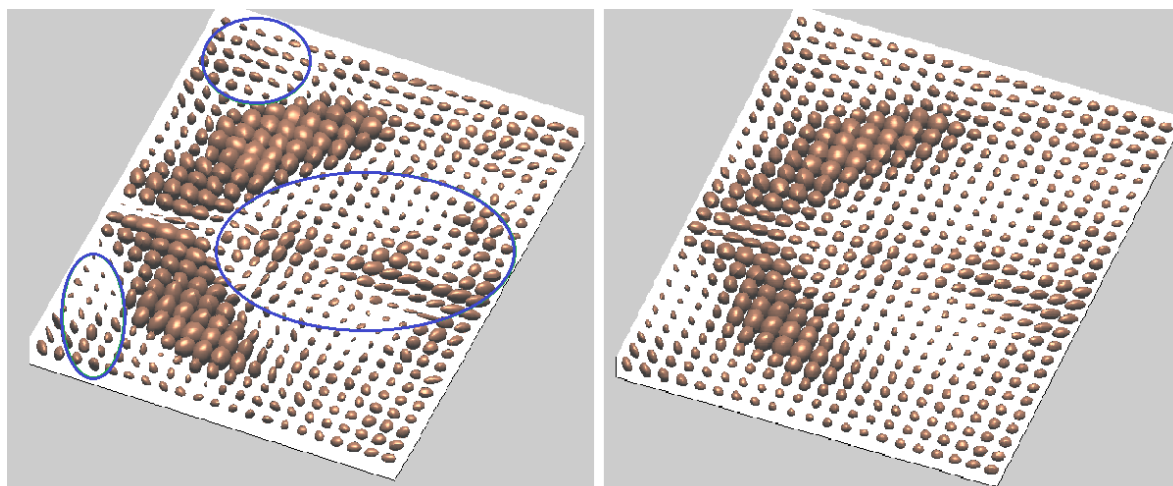


Figura 10 – Imagem real e filtrada em um plano tridimensional.

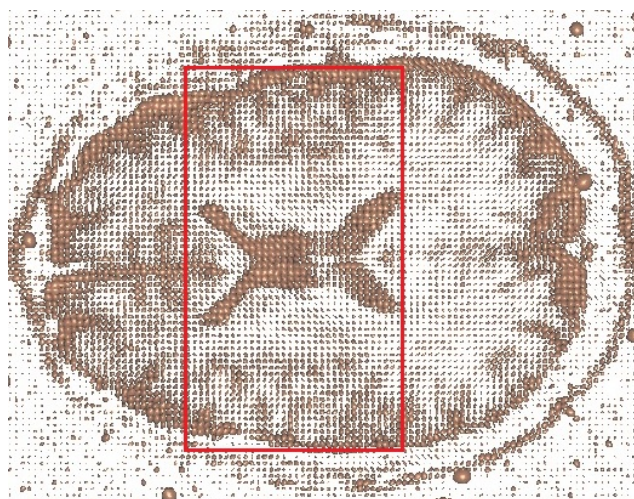


Figura 11 – Destacando região de interesse para filtragem.

A figura 11 apresenta uma outra RI para filtragem. As imagens que seguem na figura 12 representam, respectivamente, a RI destacada antes e após a aplicação do filtro de média riemanniano.

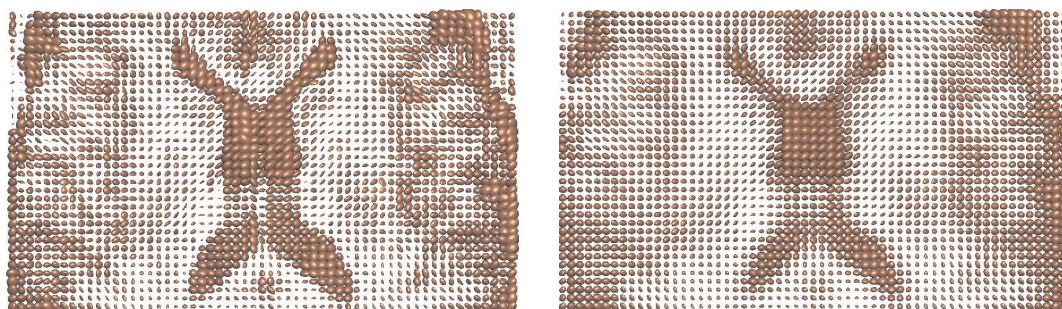


Figura 12 – Região de interesse definida na figura 11.

As figuras 13, 14, 15 e 16 apresentam mais comparações entre regiões de interesse originais e filtradas respectivamente. Aqui temos as imagens completas utilizadas destacando a região de interesse, a região de interesse antes e após a filtragem.



Figura 13 – Resultado da filtragem (a).

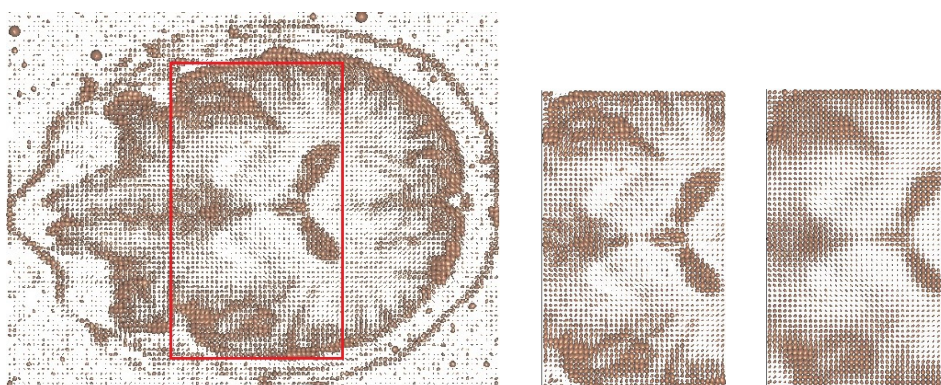


Figura 14 – Resultado da filtragem (b).

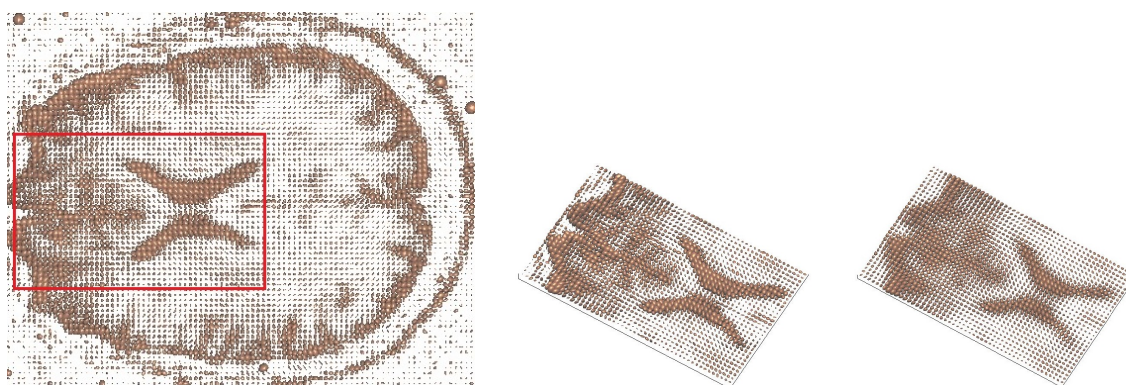


Figura 15 – Resultado da filtragem (c).

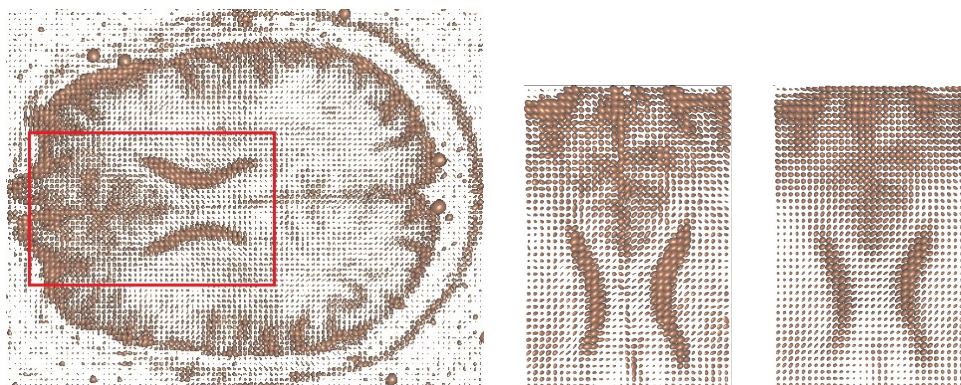


Figura 16 – Resultado da filtragem (d).

Nas imagens apresentadas nas figuras 17 e 18, podemos perceber tensores com dimensões fora do padrão, ou seja, tensores geometricamente fora das características da região onde se localizam. Isso ocorreu devido a presença de ruídos nos processos de aquisição de imagens através do aparelho de ressonância magnética e transmissão de dados do aparelho para o servidor. Em paralelo, é apresentada a mesma imagem após a filtragem.

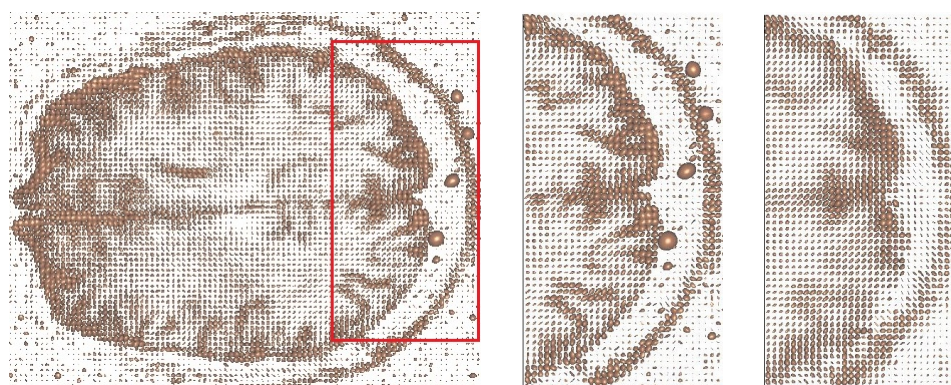


Figura 17 – Imagens completa, RI real e filtrada.

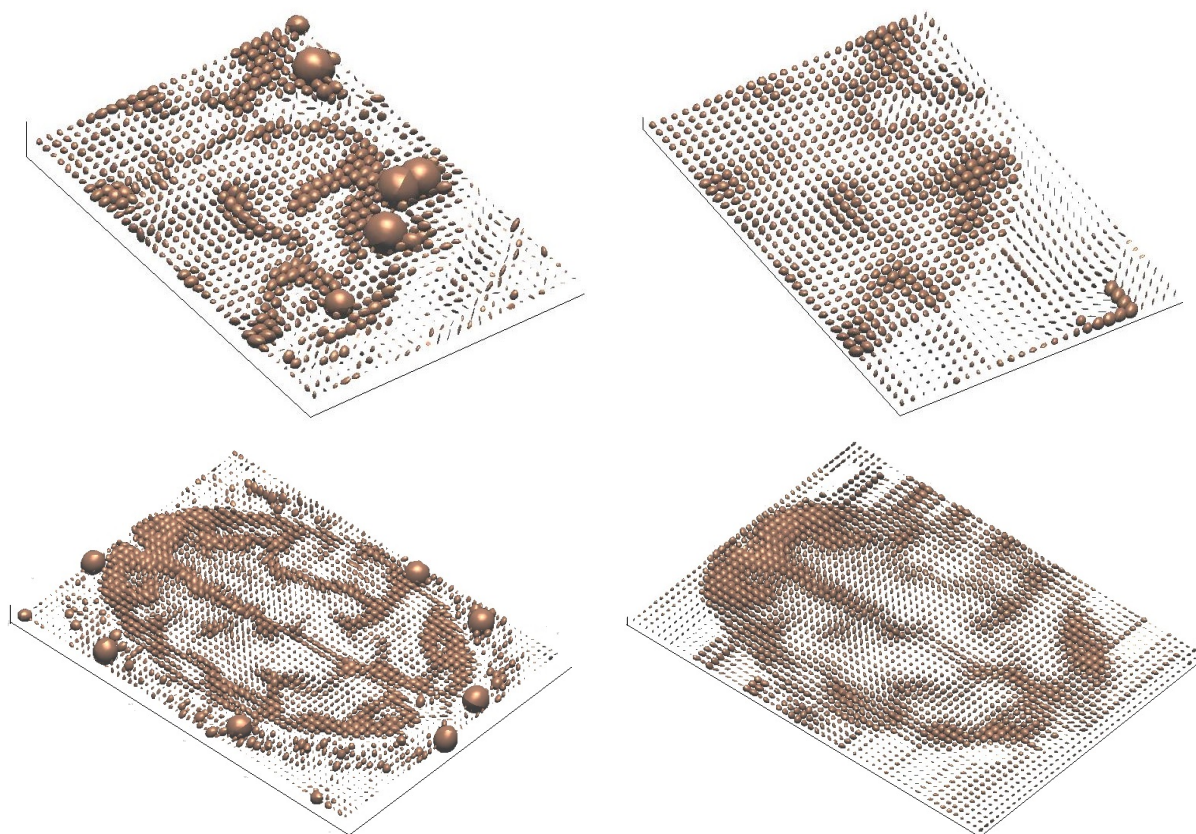


Figura 18 – Redução do número de tensores ruidosos após aplicação do filtro de média riemanniana.

A figura 19 apresenta uma última imagem filtrada por completo. À saber, ela encontra-se subdividida em, aproximadamente, 11000 pixels (elipsóides).

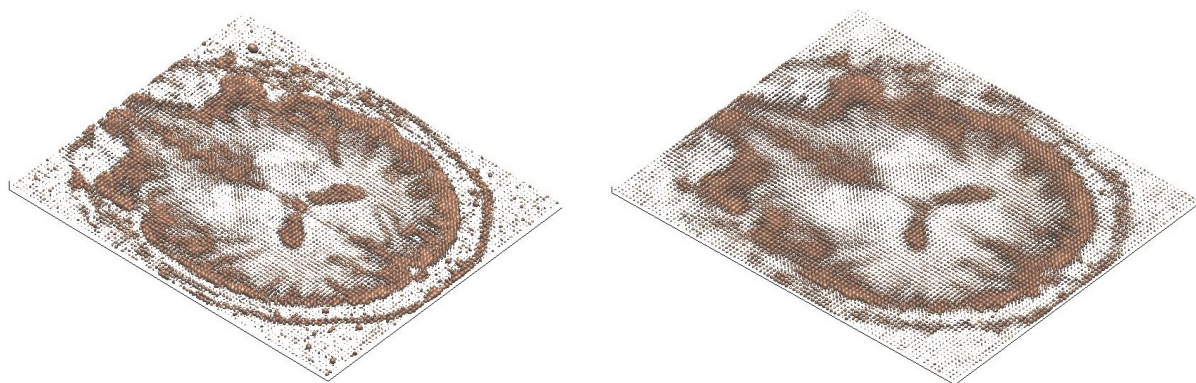


Figura 19 – Aplicação do filtro em uma imagem completa.

Nesta imagem, temos uma região de interesse onde aplicamos o filtro de média riemanniano duas vezes sobre a região, e obtivemos o seguinte resultado:

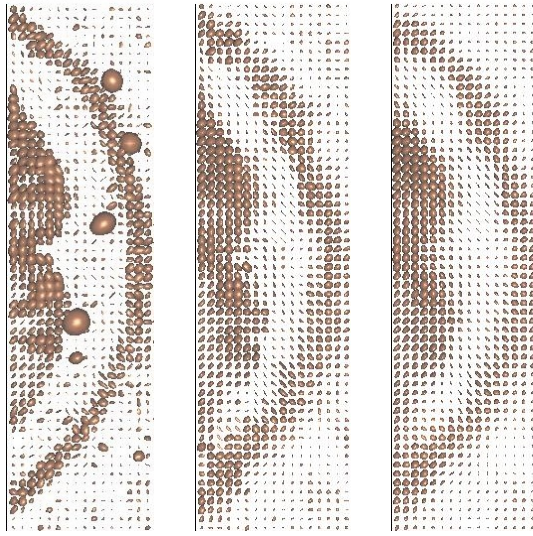


Figura 20 – Dupla aplicação do filtro em uma região de interesse.

Podemos perceber que o filtro ainda suaviza após uma segunda filtragem, porém, observamos que começa a surgir um borramento da imagem, ou seja, a região começa a se desfazer. Isso ocorre, devido a normalização dos dados presentes na janela acessada pelo filtro, onde os pesos associados aos tensores começam a ter o mesmo valor.

## 8 Conclusão e Trabalhos futuros

Entendemos a importância do processo de filtragem em uma imagem e a definição de novas metodologias para definição de novos filtros. A filtragem é uma etapa de extrema importância, principalmente quando se trata de imagens médicas, pois, é através delas que doenças são diagnosticadas. Dessa forma, a filtragem torna-se indispensável, de modo a eliminar elementos indesejáveis da imagem.

Apresentamos os resultados da aplicação do filtro no capítulo 7 onde fizemos a comparação da imagem antes e após a filtragem e constatamos uma grande redução dos ruídos nas imagens filtradas obtendo regiões de imagem suavizadas. conseguimos aplicar todos os métodos abordados e ter uma comparação mais plausível entre eles.

Verificamos que os métodos tanto do gradiente quanto do Richardson-Like foram mais rápidos com relação ao método de ponto proximal. Porém, isso só foi possível uma vez que os tensores presentes na região não eram mal-condicionados, ou seja, para qualquer região mesmo regiões mal-condicionadas o método de ponto proximal possui uma performance mais estável que a dos outros dois métodos, em relação as regiões onde os pixels são representados por matrizes simétricas definidas positivas cujos autovalores encontram-se muito próximo de zero.

Contudo, obtivemos um resultado muito importante e satisfatório que não estava nos objetivos. Este resultado se refere a "robustez" do método, que é um resultado de extrema importância que se pode ter com relação a um método para cômputo de filtro, ou em qualquer outra circunstância.

Robustez no dicionário refere-se a qualidade de robusto, força, vigor, fortaleza. Porém, no meio científico esse termo é muito utilizado, principalmente na engenharia, cuja sua definição é: desempenho esperado mesmo com variações do ambiente. Ou seja, independente do problema, sempre teremos resultados esperados através da utilização de um método robusto.

Para pesquisas futuras, propomos uma possível implementação do filtro de forma paralelizada. Com isso, teremos um ganho considerável em relação ao tempo de execução do processo de filtragem. A implementação em uma linguagem livre também é um ponto importante a ser trabalhado.

## Referências

- ASSAF, B. A. et al. Diffusion tensor imaging of the hippocampal formation in temporal lobe epilepsy. *AJNR Am J Neuroradiol*, v. 24(9): p. 1857-1862, 2003. Citado na página 12.
- ASTOLA, J.; HAAVISTO, P. Neuvo, vector median filters. *Proceedings of the IEEE*, v. 78 (4), pp. 678–689, 1990. Citado na página 33.
- BARMPOUTIS, A. *FDT FanDtasia*. <http://www.cise.ufl.edu/>: [s.n.], 2013. Citado na página 36.
- BASSER, P. J. et al. Estimation of the effective self-diffusion tensor from the nmr spin echo. *Journal of Magnetic Resonance B* 103., J, 247–254, 1994. Citado na página 28.
- BASSER, P. J.; PAJEVIC, S. A normal distribution for tensor valued random variables: applications to diffusion tensor mri. *IEEE Trans. Med. Imaging* 22., (7) 785–794, 2003. Citado 5 vezes nas páginas 29, 31, 32, 33 e 39.
- BEAULIEU, C. The basis of anisotropic water diffusion in the nervous system a technical review. *NMR Biomed.*, Nov-Dec; 15(7-8): 435-55. Review, 2005. Citado na página 28.
- BINI, D. A.; IANNANZO, B. Computing the karcher mean of symmetric positive definite matrices, linear algebra and its applications. v. 438, 1700-1710, 2013. Citado na página 33.
- BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra Linear*. Harbra LTDA, 3ª edição, São Paulo,: [s.n.], 1980. Citado na página 30.
- CARMO, M. P. D. *Riemannian geometry. Mathematics: Theory e Applications*. Birkhäuser Boston Inc.: Boston, MA, Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.: [s.n.], 1992. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 16.
- ERIKSSON, S. H. et al. Diffusion tensor imaging in patients with epilepsy and malformations of cortical development. *Brain*, 124(3): p. 617-626, v. 24(9): p. 1857-1862, 2001. Citado na página 12.
- FALEIROS, A. C. *Curso de Álgebra Linear Aplicada*. <[http://posmat.ufabc.edu.br/attachments/043\\_notasdeaulaalgebralineara\\_plicadafaleiros.pdf](http://posmat.ufabc.edu.br/attachments/043_notasdeaulaalgebralineara_plicadafaleiros.pdf)>, às 11:00 hs: [s.n.], 2013. Citado na página 20.
- FERREIRA, O. P.; OLIVEIRA, P. R. Proximal point algorithm on riemannian manifolds. *Optimizacion.*, v. 51, n. 2, pp. 257-270, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- FILHO, O. M.; NETO, H. V. *Processamento digital de Imagens*. Rio de Janeiro: Brasport. Série Acadêmica.: [s.n.], 1999. Citado na página 33.
- FLETCHER, P. T.; JOSHI, S. Principal geodesic analysis on symmetric spaces: statistics of diffusion tensors. In *Proceedings of Workshop on Computer Vision Approaches to Medical Image Analysis (CVAMIA)*, 2004. Citado na página 33.

GREGORIO, R.; OLIVEIRA, P. R. Proximal point algorithm with schur decomposition on the cone of symmetric semidefinite positive matrices. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 355, n. 2, 469-479, 2009. Citado 6 vezes nas páginas 13, 17, 23, 24, 25 e 33.

GREGÓRIO, R. *Algoritmo de ponto proximal no cone das matrizes simétricas semidefinidas positivas e um método de escalarização log-quadrático para programação multiobjetivo*. UFRJ/ COOPE/ Programas de Engenharia de Sistemas e Computação.: [s.n.], 2008. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

HIRIART-URRUTY, J. B.; LEMARÉCHAL, C. Convex analysis and minimization algorithms. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag: Berlin, Fundamentals., v. 305, 1993. Citado na página 16.

HORN, R.; JOHNSON, C. Matrix analysis. *Sci. Tech. Perspect.* 23, v. 1 ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1985. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 23.

IMAGING, C. para o C. A. *dti30.zip*. 2013. Disponível em: <<http://www.cabiatl.com/Resources/DTI/dti30.zip>>. Acesso em: 20 mar. 2013. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 36.

IZMAILOV, A.; SOLODOV, M. Otimização: Condições de otimalidade, elementos de análise convexa e de dualidade. *IMPA: Rio de Janeiro, RJ.*, v. 1, 2005. Citado na página 16.

MAZZOLA, A. A. Ressonância magnética: princípios de formação da imagem e aplicações em imagem funcional. *Revista Brasileira de Física Médica*, vol. 3(1), pp. 117–129, 2009. Citado na página 26.

MCROBBIE, D. W. et al. Mri from picture to proton. *Cambridge University Press*, 2007. Citado na página 26.

MITTIMANN, A. Tractografia em tempo real através de unidades de processamento gráfico. *Florianópolis, SC*, 2009. Citado na página 26.

MOAKHER, M. A history of greek mathematics. *From Thales to Euclid*, Dover, New York, Vol. 1, 1981. Citado na página 21.

MOAKHER, M. Means and averaging in the group of rotations. *SIAM J. Matrix Anal., Appl.* 24, PP. 1-16, 2002. Citado na página 22.

MOAKHER, M. A differential geometry approach to the geometric mean of symmetric positive-definite matrices. *SIAM J. Matrix Anal., Appl.* 26, pp. 735–747, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 19, 23, 24 e 33.

MORI, S. Introduction to diffusion tensor imaging. *Elsevier.*, 2007. Citado na página 26.

MORI, S.; BARKER, P. B. Diffusion magnetic resonance imaging: Its principles and applications. *The Anatomical Record* 257, v. 102-109, 1999. Citado na página 26.

MORI, S.; ZHANG, J. *Principles of diffusion tensor imaging and its applications to basic neuroscience research*. 51(5):527-39. Review.: [s.n.], 2006. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 28.



- MOSHEYE, L.; ZIBULEVSK, M. Penalty/barrier multiplier algorithm for semidefinite programming. *Optimization Methods and Softwares.*, v.13, n.4, p.235-261, 2000. Citado na página 18.
- NESTEROV, Y. E.; TODD, M. J. On the riemannian geometry defined by self-concordant barriers and interior-point methods. *Foundations of Computational Mathematics*, v.2, n.4, p. 333-361, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- PENNEC, X. et al. A riemannian framework for tensor computing. *EPIDAURE / ASCLEPIOS Project-team, INRIA Sophia-Antipolis 2004 Route des Lucioles BP 93, F-06902 Sophia Antipolis Cedex, FRANCE*, v. 149, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 12, 20, 33 e 34.
- PEREIRA, A. S. B. M. *Imagem de Tensor de Difusão em Alzheimer*. Faculdade de ciências e tecnologia, Lisboa.: [s.n.], 2008. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 29.
- PULINO, P. *Álgebra Linear e suas Alicações: Notas de Aula*. 2013. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/~simpulino/ALESA/>>. Acesso em: 23 mar. 2013. Citado na página 30.
- ROTHAUS, O. S. Domains of positivity. *Abh. Math. Sem. Univ.*, v.24, n.3, p. 189-235, 1960. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- SAKAI, T. Riemannian geometry. *In: translations of mathematical monographs, American Mathematical Society, Providence, R.I.*, v. 149, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 16.
- SPIESSER, M. Les médiétés dans la pensée grecque, in musique et mathématiques. *Sci. Tech. Perspect. 23*, Université de Nantes, Nantes, France, pp. 1–71, 1993. Citado na página 21.
- STEJSKAL, E. O.; TANNER, J. E. Pin diffusion measurements: spin references echoes in the presence of a time-dependent field gradient. *NMR Biomed.*, S J. Chem. Phys. 42, 288–292, 1965. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 30.
- SYMMS, M. R. et al. A review of structural magnetic resonance neuroimaging. *Journal Neurol Neurosurg Psychiatry*, v. 75(9): p. 1235-1244, 2004. Citado na página 12.
- TRAHANIAS, P.; VENETSANOPOULOS, A. Vector directional filters — a new class of multichannel image processing filters. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 2 (4), pp. 528–534, 1993. Citado na página 34.
- WELK, M. et al. Medianand related local filters for tensor-value dimages. *Signal Processing*, v. 87, 291–308, 2007. Citado na página 33.
- WESTIN, C. F. et al. *Processing and visualization for diffusion tensor MRI*. Brigham E Women’s Hospital, Harvard Medical School, Department of Radiology, 75 Francis Street, Boston, MA 02115, USA: [s.n.], 2002. Citado 3 vezes nas páginas 12, 30 e 32.
- ZHANG, F.; EDWIN, R. *New Riemannian techniques for directional and tensorial image data*. Department of Computer Science, University of York, York YO10 5DD, UK. Elsevier Ltd. All rights reserved: [s.n.], 2009. Citado 4 vezes nas páginas 12, 13, 33 e 34.

---

ZHANG, F.; HANCOCK, E. R. A riemannian weighted filter for edge-sensitive image smoothing. *in: Proceedings of International Conference on Pattern Recognition*, p. 594 – 598, 2006. Citado 2 vezes nas páginas [12](#) e [34](#).